МАКОГІН ВІТАЛІЙ ІВАНОВИЧ. Назва дисертаційної роботи: "АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ТА ПОТРАЄКТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ АВТОМОДЕЛЬНИХ ДРОБОВИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ"

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

МАКОГІН ВІТАЛІЙ ІВАНОВИЧ

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ТА ПОТРАЄКТОРНІ

ВЛАСТИВОСТІ

АВТОМОДЕЛЬНИХ ДРОБОВИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

Мішура Юлія Степанівна,

доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2015

2

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень 4

Вступ 5

Розділ 1. Огляд літератури за темою дисертації 26

1.1. Автомодельні процеси . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

1.1.1. Поняття автомодельності . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

1.1.2. Дробовий броунівський рух. . . . . . . . . . . . . . . . 29

1.2. Автомодельні випадкові поля . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

1.2.1. Дробові автомодельні випадкові поля . . . . . . . . . . 32

1.3. Застосування . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

1.4. Висновки до огляду літератури за темою дисертації . . . . . . 37

Розділ 2. Означення дійснозначних автомодельних полів та властивості їх коваріаційних функцій 39

2.1. Можливі означення автомодельної властивості . . . . . . . . . 40

2.2. Гауссівські автомодельні поля . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

2.3. Поля зі стаціонарними приростами . . . . . . . . . . . . . . . 44

2.4. Перетворення Ламперті для автомодельних полів . . . . . . . 47

2.5. Теорема для коваріаціної функції . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

2.6. Гауссівське автомодельне поле з H = (0.5, 0.5) . . . . . . . . . 61

2.7. Висновки до другого розділу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

Розділ 3. Сильні граничні теореми для автомодельних полів 66

3.1. Автомодельні поля з ергодичним масштабним перетворенням 67

3.2. Верхні та нижні обмежувальні функції для ергодичних полів . 69

3.3. Сильні граничні теореми . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

3.4. Сильні граничні теореми для гауссівських автомодельних полів 82

3.5. Висновки до третього розділу . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86

3

Розділ 4. Верхні максимальні ймовірності для гауссівських автомодельних полів 87

4.1. Верхні максимальні оцінки гауссівських полів на компакті . . 88

4.2. Випадкові поля на просторі (T, ρ1) . . . . . . . . . . . . . . . . 90

4.3. Випадкові поля на просторі (T, ρ2) . . . . . . . . . . . . . . . . 96

4.4. Висновки до четвертого розділу . . . . . . . . . . . . . . . . . 106

Розділ 5. Асимптотичні властивості інтегральних функціоналів

від дробових броунівських полів 107

5.1. Асимптотичне зростання анізотропного гауссівського автомодельного поля . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107

5.2. Теорема про збіжність інтегрального функціоналу типу середнього від d-вимірного N-параметричного анізотропного дробового броунівського поля . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111

5.3. Слабка збіжність нормованого інтегрального функціоналу від

d-вимірного N-параметричного автомодельного поля до локального часу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117

5.4. Висновки до п’ятого розділу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119

Висновки 121

Список використаних джерел 123

Додатки 133

Додаток А. Асимптотична поведінка траєкторій гауссівського автомодельного процесу 134

4

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

0 = (0, . . . , 0) ∈ R

N .

1 = (1, . . . , 1) ∈ R

N .

d= – рівність скінченно вимірних розподілів.

x · y = (x1y1, . . . , xN yN ) – покоординатний добуток двох векторів x =

(x1, . . . , xN ) ∈ R

N , y = (y1, . . . , yN ) ∈ R

N .

a · x = (ax1, . . . , axN ), x = (x1, . . . , xN ) ∈ R

N , a ∈ R.

t1 ∨ t2 = max{t1, t2}.

t1 ∧ t2 = min{t1, t2}.

χA(x) – індикаторна функція.

R

k

+ = [0, +∞)

k

, k ⩾ 1.

[a, b] = [a1, b1] × · · · × [aN , bN ], де a = (a1, . . . , aN ) ∈ R

N , b = (b1, . . . , bN ) ∈

R

N .

5

ВСТУП

Актуальність теми

Автомодельні випадкові поля є інваріантними відносно певного масштабування часу та простору. Вони є узагальненням автомодельних процесів на

багатопараметричний випадок. Найвідоміший приклад автомодельного процесу – дробовий броунівський рух, що був введений в 1940 році А. М. Колмогоровим. Починаючи з 50-х років ХХ століття спостерігається підвищений

інтерес до вивчення різних властивостей випадкових полів.

Гауссівські випадкові поля були ретельно вивчені і застосовані в широкому діапазоні наук, включаючи фізику, інженерію, гідрологію, біологію, економіку та фінанси. Багато вибірок даних, що відносяться до вищевказаних наук, мають анізотропну природу в тому сенсі, що у них є різні геометричні та

ймовірнісні характеристики уздовж різних напрямків. Тому для моделювання таких даних потрібні поля відповідної анізотропної структури. Наприклад,

А. Бонамі та А. Естраде 1

, Д. Бенсон 2

, С. Девіс та П. Холл 3

, запропонували

застосувати анізотропні гауссівські випадкові поля, як більш реалістичні моделі. Більше того анізотропні гауссівські випадкові поля також природно виникають в теорії стохастичних диференціальних рівнянь, наприклад у роботі

Б. Оксендала та Т. Чжана 4

. Тому дослідження ймовірнісних та статистичних

властивостей анізотропних випадкових полів є важливим як у теорії, так і на

практиці.

1Bonami A. Anisotropic analysis of some Gaussian models / Aline Bonami, Anne Estrade // Journal of Fourier

analysis and applications. — 2003. — Vol. 9, no. 3. — P. 215–236.

2Benson David A. Aquifer operator scaling and the effect on solute mixing and dispersion / David A. Benson,

Mark M. Meerschaert, Boris Baeumer, Hans-Peter Scheffler // Water Resources Research. — 2006. — Vol. 42, no. 1.

3Davies Steve. Fractal analysis of surface roughness by using spatial data / Steve Davies, Peter Hall // Journal of

the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). — 1999. — Vol. 61, no. 1. — P. 3–37.

4Øksendal B. Multiparameter fractional Brownian motion and quasi-linear stochastic partial differential equations /

Øksendal, Bernt, and Tusheng Zhang // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes.

— 2001. — Vol. 71, no.3-4. — P. 141-163.

6

Анізотропне дробове броунівське поле є узагальненням дробового броунівського руху на випадок полів. В науковій літературі відсутні роботи, де

було б досліджено асимптотичну поведінку інтегральних функціоналів від таких полів. Також однією з особливостей дробового броунівського руху є те,

що це єдиний гауссівський автомодельний процес зі стаціонарними приростами. Для автомодельних випадкових полів проблема наявності чи відсутності такої властивості залишалася нерозв’язаною. Це робить актуальним вибір

задач, поставлених в дисертації, а отримані результати доповнюють вже існуючі.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню теорії автомодельних випадкових полів, анізотропних гауссівських полів, дробових броунівських полів, їх асимптотичній поведінці та потраєкторним властивостям.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана в рамках державної бюджетної дослідницької наукової теми № 11БФ038-02 “Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей” (номер державної реєстрації 0111U006561), що виконується на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механікоматематичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, і входить до комплексного тематичного плану науководослідних робіт “Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки

та фінансів”.

Мета і завдання дослідження

Метою дисертаційної роботи є подальший розвиток теорії автомодельних полів, встановлення асимптотичної поведінки таких полів, дослідження

гауссівських автомодельних полів зі стаціонарними приростами на прямокутниках.

Для досягнення мети дисертації були поставлені наступні задачі:

• Встановити взаємозв’язок різних означень властивості автомодельності для випадкових полів.

7

• Дослідити існування таких гауссівських автомодельних випадкових полів зі стаціонарними приростами на прямокутниках, розподіли яких не співпадають з розподілами анізотропного дробового

броунівського поля.

• Довести закони нуля та одиниці для автомодельних полів з ергодичним масштабним перетворенням, траєкторії яких нормовані

верхніми та нижніми обмежувальними функціями. Отримати сильні граничні теореми для анізотропних автомодельних полів.

• Побудувати верхні максимальні оцінки для гауссівських автомодельних полів зі стаціонарними приростами на прямокутниках.

• Дослідити збіжність інтегральних функціоналів від d-вимірного

N-параметричного анізотропного автомодельного поля.

Об’єктом дослідження є анізотропні автомодельні дробові випадкові поля та їх коваріаційні функції.

Предметом дослідження є гранична поведінка траєкторій автомодельних

дробових випадкових полів. Крім того, предметом дослідження є характеризація та властивості коваріаційних функцій гауссівських автомодельних полів.

Методи дослідження

Для розв’язання сформульованих задач дисертаційної роботи використовуються результати і методи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів, елементи теорії міри та інтегралу.

Наукова новизна одержаних результатів

В дисертаційній роботі вперше комплексно досліджено властивості коваріаційних функцій автомодельних випадкових полів зі стаціонарними приростами на прямокутниках.

Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист:

8

1. Доведено лему, що встановлює еквівалентність означення анізотропної та покоординатної властивостей автомодельності випадкових полів.

2. Доведено твердження, що характеризує наявність стаціонарних приростів автомодельного поля в термінах коваріаційної функції відповідного стаціонарного поля, що є перетворенням Ламперті такого автомодельного поля.

3. Сконструйовано клас коваріаційних функцій, та відповідно, клас таких гауссівських автомодельних випадкових полів зі стаціонарними

приростами на прямокутниках, розподіли яких не співпадають з розподілами анізотропного дробового броунівського поля.

4. Наведено приклад гауссівського автомодельного поля з індексом

Хюрста (0.5,0.5) та стаціонарними приростами, що не є полем ВінераЧенцова. Доведено, що таке поле не має незалежних приростів на прямокутниках.

5. Доведено закон нуля та одиниці для полів з ергодичним масштабним

перетворенням, траєкторії яких нормовані нижніми та верхніми монотонними обмежувальними функціями.

6. Доведено сильні граничні теореми для анізотропних автомодельних

полів. Отримано такі граничні теореми для гауссівських полів.

7. Побудовано верхні максимальні оцінки для гауссівських автомодельних полів зі стаціонарними приростами на прямокутниках. Такі оцінки отримано для полів, заданих на одиничному квадраті та нормованих полів, заданих на площині.

8. Доведено теорему про збіжність інтегрального функціоналу типу середнього від d-вимірного N-параметричного анізотропного дробового броунівського поля.

9. Доведено збіжність нормованого інтегрального функціоналу від dвимір-ного N-параметричного анізотропного автомодельного поля до

9

локального часу у припущенні, що його неперервний локальний час

існує.

Практичне значення одержаних результатів

Отримані в роботі результати мають теоретичне значення при подальшому розвитку теорії автомодельних полів, моделюванні стохастичних моделей,

що мають анізотропні властивості. Вони можуть бути використані при аналізі властивостей статистичних оцінок максимальної вірогідності невідомого

параметра зсуву в стохастичному диференціальному рівнянні, що керується

дробовим броунівським рухом.

Практична цінність результатів дисертації полягає у можливості їх застосування в фінансовій математиці, статистичній гідрології, обробці зображень

та для моделювання кліматичних явищ.

Особистий внесок здобувача

Усі основні результати роботи належать здобувачу. У двох роботах, підготовлених разом із науковим керівником проф. Мішурою Ю.С., та одній роботі, підготовленій разом з проф. Козаченком Ю.В., останнім належать формулювання задач та методика досліджень, а всі результати отримані здобувачем

самостійно. Одна робота опублікована у співпраці з Мішурою Ю.С., Шевченком Г.М., Золотою А.В., де здобувачу належать такі результати: встановлення асимптотичної поведінки гауссівського автомодельного поля, отримання

асимптотичної поведінки анізотропного дробового броунівського поля та його дробової похідної.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наступних наукових семінарах, міжнародних і всеукраїнських конференціях:

1. The Satellite Summer School to the 7th International Conference on Lévy

Processes. Bedlewo, Poland. 09.07.2013 - 13.07.2013.

2. The 7th International Conference on Lévy Processes: Theory and Applications. Wroclaw, Poland. 15.07.2013 - 19.07.2013.

10

3. The doctoral School “Lévy Processes and Autosimilarity”. Tunis, 28.10.2013

- 03.11.2013.

4. International Conference “Lévy Processes and Autosimilarity.” Tunis,

04.11.2013-09.11.2013.

5. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичноїго аналізу.” Ворохта, Україна. 24.02.2014-

02.03.2014.

6. ХІІ-та Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна-2014.” Київ, Україна.

25–28.03.2014.

7. П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла

Кравчука. Київ, Україна. 15.05.2014-17.05.2014.

8. Humboldt Kolleg “The Education and Science and their Role in Social and

Industrial Progress of Society.” Київ, Україна. 12.05.2014-17.05.2014.

9. 11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vilnius, Lithuania. 30.06.2014 - 04.07.2014.

10. 2nd European Actuarial Journal (EAJ) Conference. TU, Vienna, Austria.

10.09.2014-12.09.2014.

11. EMS School on Stochastic Analysis with applications in biology, finance

and physics. Bedlewo, Poland. 06.10.2014-11.10.2014.

12. International Conference “Probability, Reliability and Stochastic Optimization”. м. Київ, Україна. 07.04.2015-10.04.2015.

13. Засідання наукового семінару “Теорія ймовірностей та математична

статистика” при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом

проф. Мішури Ю.С. та проф. Козаченка Ю.В. (м. Київ, Україна, 2015).

14. Засідання наукового семінару “Статистичні проблеми для випадкових

процесів і полів” кафедри математичного аналізу та теорії ймовірно-

11

стей НТУУ ”КПІ” під керівництвом проф. Клесова О.І. та проф. Іванова О.В. (м. Київ, Україна, 2015).

15. Засідання наукового семінару Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України під керівництвом проф. Кнопова П. С. (м. Київ,

Україна, 2015).

16. Засідання наукового семінару з фрактального аналізу Національного

педагогічного університету імені М. П. Драгоманова під керівництвом

проф. Працьовитого М. В. (м. Київ, Україна, 2015).

Публікації

За результатами дисертації опубліковано 12 наукових публікацій. З них

5 статей, опублікованих у фахових виданнях [8], [9], [71], [72], [73], та 7 тез

доповідей [10], [11], [12], [74], [75], [76], [77]. Три статті [71], [72], [73] опубліковані у закордонних виданнях. Стаття [9] опублікована у виданні України,

що включено до наукометричної бази Scopus.

Структура дисертації

Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, розбитих на підрозділи,

висновків, списку використаних джерел, та одного додатку. Обсяг дисертації становить 138 сторінок, список використаних джерел (105 найменувань)

займає 11 сторінок.

Основний зміст роботи

У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертації, вказується зв’язок

роботи з науковими програмами, планами, темами, зазначено мету та задачі

дослідження, включаючи його об’єкт та предмет, методи дослідження, наукову новизну одержаних результатів та їх практичне значення, вказано особистий внесок аспіранта, список його публікацій, а також структуру дисертації.

Перший розділ дисертації присвячено огляду літератури за темою дисертації. Розкрито історію питань, пов’язаних з тематикою роботи, та наведено

огляд основних праць з теми дисертації. Також наведено стислий огляд тих

результатів теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів, які використовуються в дисертації.

12

У другому розділі дисертації досліджено можливі означення властивості

автомодельності для випадкових полів, та досліджено властивості коваріаційної функції автомодельних полів зі стаціонарними приростами на прямокутниках.

У першому підрозділі другого розділу вводиться основний об’єкт дослідження – анізотропне автомодельне випадкове поле, що задовольняє означенню 0.0.2.

Означення 0.0.1. Дійснозначне випадкове поле {X(t), t = (t1, . . . , tN ) ∈

R

N } є автомодельним з індексом H > 0, якщо для кожного a > 0

{X(at),t ∈ R

N }

d= {a

HX(t),t ∈ R

N },

де d= позначає рівність скінченно вимірних розподілів.

Означення 0.0.2. Дійснозначне випадкове поле {X(t),t ∈ R

N } є анізотропним автомодельним з індексом H = (H1, . . . , HN ) ∈ (0, +∞)

N , якщо для

будь-якого a = (a1, . . . , aN ) ∈ (0, +∞)

N

{

X(a · t),t ∈ R

N

} d=

{

a

H1

1

· · · a

HN

N X(t),t ∈ R

N

}

,

де a · t = (a1t1, . . . , aN tN ) – покоординатний добуток двох векторів a, t.

Означення 0.0.3. Дійснозначне випадкове поле {X(t), t ∈ R

N } є покоординатно автомодельним з індексом H = (H1, . . . , HN ) ∈ (0, +∞)

N , якщо для

будь-якого a > 0 та 1 ⩽ k ⩽ N

{

X(t1, . . . , tk−1, atk, tk+1, . . . , tN ),t ∈ R

N

} d=

{

a

HkX(t), t ∈ R

N

}

.

Встановлено взаємозв’язок цих означень.

Лема 0.0.4. Випадкове поле є анізотропним автомодельним (за означенням 0.0.2) тоді і тільки тоді, коли воно є покоординатно автомодельним (за

означенням 0.0.3).

Лема 0.0.5. Нехай випадкове поле {X(t),t ∈ R

N } є анізотропним автомодельним (за означенням 0.0.2) з індексом H = (H1, . . . , HN ) ∈ (0, 1)N . Тоді

X є автомодельним за означенням 0.0.1 з індексом H = H1 + · · · + HN .

13

У другому підрозділі другого розділу встановлено відповідність між типом коваріаційної функції та типом властивості автомодельності для центрованих гауссівських випадкових полів.

Лема 0.0.6. Нехай коваріаційні функції C1, C2 : R

N × R

N → R центрованих гауссівських полів {X1(t),t ∈ R

N } та {X2(t),t ∈ R

N } відповідно, мають

такі властивості:

(i) Для довільних t,s ∈ R

N , a ∈ (0, +∞)

2

C1(a · t, a · s) = a

2H1

1

· · · a

2HN

N C1(t,s),

де 0 < H1 < 1, . . . , 0 < HN < 1.

(ii) Для довільних t,s ∈ R

N , a > 0

C2(at, as) = a

2HC2(t,s),

де 0 < H < 1.

Тоді X1 є анізотропним автомодельним полем (за означенням 0.0.2) з індексом H = (H1, . . . , HN ), та поле X2 є автомодельним з індексом H за означенням 0.0.1.

Наведемо означення дробових броунівських полів, що є прикладами гауссівських автомодельних полів.

Означення 0.0.7. Дійснозначним дробовим броунівським полем (дробовим

броунівським полем Леві) з індексом Хюрста H ∈ (0, 1) називається центроване гауссівське автомодельне поле BH = {BH(t),t ∈ R

N

+ } з коваріаційною

функцією

E

(

B

H(t)B

H(s)

)

=

1

2

(

∥t∥

2H + ∥s∥

2H − ∥t − s∥

2H

)

, t,s ∈ R

N

+ ,

де R

N

+ = [0, +∞)

N .

Дробове броунівське поле Леві є автомодельним полем у сенсі означення 0.0.1.

14

Означення 0.0.8. Дійснозначним анізотропним дробовим броунівським

полем з індексом Хюрста H = (H1, . . . , HN ), 0 < Hi < 1, i = 1, N називається центроване гауссівське автомодельне поле BH = {BH(t),t ∈ R

N

+ } з

коваріаційною функцією

E

(

B

H

(t)B

H

(s)

)

= 2−N ∏

N

i=1

(

|ti

|

2Hi + |si

|

2Hi − |ti − si

|

2Hi

)

, t,s ∈ R

N

+ .

Це поле є анізотропним автомодельним за означенням 0.0.2.

У третьому підрозділі другого розділу наведено означення приростів на

прямокутниках.

Означення 0.0.9. Розглянемо випадкове поле X = {X(t),t ∈ R

2}. Для

довільного u = (u1, u2) ∈ R

2 та довільного v = (v1, v2) ∈ R

2 таких, що

v1 > u1, v2 > u2 визначимо приріст на прямокутнику

∆uX(v) = X(v1, v2) − X(u1, v2) − X(v1, u2) + X(u1, u2).

Поле X має стаціонарні прирости на прямокутниках, якщо для довільного

u = (u1, u1) ∈ R

2

: {∆uX(u + h), h ∈ R

2

+}

d= {∆0X(h), h ∈ R

2

+}.

Анізотропне дробове броунівське поле має стаціонарні прирости на прямокутниках. Для автомодельних полів зі стаціонарними приростами на прямокутниках встановлено деякі властивості коваріаційної функції. Зокрема, у

третьому підрозділі другого розділу доведено наступну лему.

Лема 0.0.10. Нехай автомодельне поле X має стаціонарні прирости на

прямокутниках. Тоді для всіх s,t ∈ R

2

+ маємо

E[X(t)X(s)] + E[X(t1, s2)X(s1, t2)]

=

1

2

∏

i=1,2

(

t

2Hi

i + s

2Hi

i − |ti − si

|

2Hi

)

EX

2

(1). (1)

У четвертому підрозділі другого розділу наведено зв’язок автомодельних

та стаціонарних випадкових полів через перетворення Ламперті. Для анізотропних автомодельних полів у сенсі означення 0.0.2 введено перетворення

15

Ламперті τH у наступному вигляді:

τHX(t) = Z(t) = e

−H1t1 e

−H2t2X(e

t1

, et2

),t ∈ R

2

. (2)

Тоді Z є центрованим строго стаціонарним полем.

Означення 0.0.11. Випадкове поле {U(t), t ∈ R

N } є строго стаціонарним,

якщо ∀s ∈ R

N

{U(t + s),t ∈ R

N }

d= {U(t),t ∈ R

N }.

Коваріаційну функцію поля Z позначено як

R(v) = E[Z(t)Z(t + v)], t, v ∈ R

2

. (3)

Введемо додаткові позначення:

FH(v) = e

Hv + e

−Hv −

e

v/2 − e

−v/2

2H

, v ∈ R,

R0(v) = ∏

i=1,2

(

cosh(Hivi) − 2

(2Hi−1) |sinh(vi/2)|

2Hi

)

=

1

4

∏

i=1,2

FHi

(vi), v ∈ R

2

,

де H, H1, H2 ∈ (0, 1).

Зауваження 0.0.12. Для анізотропного дробового броунівського поля BH відповідне строго стаціонарне випадкове поле Z = {Z(t) =

e

−t1H1 e

−t2H2BH (e

t1

, et2 ), t ∈ R

2} має коваріаційну функцію R0.

Досліджено наявність стаціонарних приростів автомодельного поля в термінах коваріаційної функції відповідного стаціонарного поля з перетворення

Ламперті.

Твердження 0.0.13. Нехай X = {X(t),t ∈ R

2

+} – дійснозначне автомодельне випадкове поле з індексом H = (H1, H2) ∈ (0, 1)2 та R є коваріаційною

функцією (3) стаціонарного поля Z з перетворення Ламперті поля X. Якщо

поле X має стаціонарні прирости на прямокутниках, то

R(v) + R(v1, −v2) = 1

2

FH1

(v1)FH2

(v2) = 2R0(v), v ∈ R

2

. (4)

16

Твердження 0.0.14. Нехай Z – деяке центроване строго стаціонарне

випадкове поле, а його коваріаційна R задовольняє рівність (4) для деяких

(H1, H2) ∈ (0, 1)2

. Нехай випадкове поле X визначене з оберненого перетворення Ламперті (2) поля Z як X(t) = t

H1

1

t

H2

2 Z(ln t1, ln t2),t ∈ R

2

+. Тоді X є

анізотропним автомодельним полем з індексом (H1, H2) ∈ (0, 1)2 та

E(∆sX(t))2 = (t1 − s1)

2H1

(t2 − s2)

2H2

= E(∆0X(t − s))2

, 0 ⩽ s1 ⩽ t1, 0 ⩽ s2 ⩽ t2.

У п’ятому підрозділі другого розділу доведено основний результат розділу — існування такого анізотропного гауссівського автомодельного поля зі

стаціонарними приростами на прямокутниках, що не є анізотропним дробовим броунівським полем

ВИСНОВКИ

Вдисертаційнійроботіотримановажливірезультатиякідозволяютьописатиасимптотичнуповедінкутапотраєкторнівластивостіавтомодельних

дробовихвипадковихполівасаме

•дослідженоковаріаційнуструктуруполівзістаціонарнимиприростаминапрямокутниках

•вивченоасимптотичнуповедінкуверхніхмаксимальнихймовірностейтраєкторійтаінтегральнихфункціоналів

Основнірезультатидисертаційноїроботи

Доведенолемущовстановлюєеквівалентністьозначенняанізотропноїтапокоординатноївластивостейавтомодельностівипадковихполів

ДоведенотвердженнящохарактеризуєнаявністьстаціонарнихприростівавтомодельногополявтермінахковаріаційноїфункціївідповідногостаціонарногополязперетворенняЛамперті

Сконструйованокласковаріаційнихфункційтавідповіднокластакихгауссівськихавтомодельнихвипадковихполівзістаціонарними

приростаминапрямокутникахрозподілиякихнеспівпадаютьзрозподіламианізотропногодробовогоброунівськогополя

Наведеноприкладгауссівськогоавтомодельногополязіндексом

Хюрстатастаціонарнимиприростаминапрямокутникахщо

неєполемВінераЧенцоваДоведенощотакеполенемаєнезалежних

приростівнапрямокутниках

Доведенозаконнулятаодиницідляполівзергодичниммасштабним

перетвореннямтраєкторіїякихнормованінижнімитаверхнімимонотоннимиобмежувальнимифункціями



Доведеносильніграничнітеоремидляанізотропнихавтомодельних

полівОтриманотакіграничнітеоремидлягауссівськихполів

ПобудовановерхнімаксимальніоцінкидлягауссівськихавтомодельнихполівзістаціонарнимиприростамиТакіоцінкиотриманодляполівзаданихнаодиничномуквадратітанормованихполівзаданихна

площині

Доведенотеоремупрозбіжністьінтегральногофункціоналутипусередньоговідвимірногопараметричногоанізотропногодробовогоброунівськогополя

Доведенозбіжністьнормованогоінтегральногофункціоналувідвимірногопараметричногоанізотропногоавтомодельногополядо

локальногочасууприпущенніщойогонеперервнийлокальнийчас

існує