МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ШЕВЧЕНКО Георгій Михайлович

УДК 519.21

СТОХАСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДЛЯ ДРОБОВИХ ТА МУЛЬТИДРОБОВИХ ПРОЦЕСІВ У МОДЕЛЯХ З ДОВГОСТРОКОВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ

Спеціальність: 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2014

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України .

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Мішура Юлія Степанівна,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Кнопов Павло Соломонович,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, завідувач відділу математичних методів дослідження операцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
Копитко Богдан Іванович,
Львівський національний університет імені Івана Франка, завідувач кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Пилипенко Андрій Юрійович,
Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник.

Захист відбудеться 29 вересня 2014 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022 м. Київ, проспект Глушкова 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601 м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий 27 серпня 2014 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Багато фізичних, біологічних, хімічних, економічних, фінансових процесів і систем керуються великою кількістю випадкових та детермінованих факторів. Для їхнього моделювання використовують випадкові процеси та стохастичні диференціальні рівняння. Протягом першої половини XX століття у якості моделі випадковості використовували переважно вінерівський процес, який є математичною моделлю броунівського руху. У фізиці вінерівський процес почали використовувати, починаючи з робіт А. Ейнштейна та М. Смолуховського, але раніше вінерівський процес неявно було використано у роботах Л. Башельє для моделювання цінових процесів фінансових активів.

Вінерівський процес характеризується незалежними однаково розподіленими приростами, він є марківським процесом, і це суттєво обмежує можливості його застосування. Зокрема, вінерівський процес не дозволяє моделювати явище так званої довгострокової залежності, яке полягає у наявності настільки сильної залежності між приростами процесу, що вона помітна навіть при безмежному збільшенні інтервалу спостереження. Це явище вперше було описане Г.Е. Хюрстом, гідрологом, який займався спостереженнями за рівнем Ніла з метою визначення оптимального розміру дамби. Після цього явище довгострокової залежності було відмічено багатьма дослідниками, особливо у фізиці, де воно набуло назву аномальної дифузії. Прорив у моделюванні довгострокової залежності було зроблено Б. Мандельбротом та Дж. Ван Нессом, які запропонували використовувати для цього дробовий броунівський рух, який вперше під назвою «спіралі Вінера» було введено у роботах А.Н. Колмогорова. Дробовий броунівський рух має параметр, показник Хюрста, який визначає силу залежності та регулярність траєкторій процесу.

Дробовий броунівський рух досліджувався у роботах багатьох авторів, включаючи Б. Мандельброта, Л. Декресфонда, Р.Д. Елліотта, Ю.С. Мішури, Д. Нуаларта, І. Нурдена, Б. Оксендала, М.С. Такку, Й. Ху, М. Целє, А.Н. Ширяєва та інших. Стохастичний аналіз для дробового броунівського руху розроблявся Л. Декресфондом, Д. Нуалартом, Б. Оксендалом, Т. Лайонсом, М. Целє та іншими. Через наявність сильної залежності в цінових процесах на фінансовому ринку, Б. Мандельбротом було запропоновано використовувати дробовий броунівський рух для їхнього моделювання. Незважаючи на наявність арбітражу в моделях фінансового ринку з дробовим броунівським рухом, його фінансові застосування інтенсивно досліджувалися, зокрема, у роботах Ф. Бьяджіні, К. Бендера, Е. Валкейли, Р.Д. Елліотта, Ю.С. Мішури, Б. Оксендала, Т. Соттінена, Й. Ху, Д. ван дер Хука, А.Н. Ширяєва та інших авторів.

Дробовий броунівський рух має властивості стаціонарності приростів та самоподібності, що полягають в інваріантності його властивостей як відносно моменту часу, так і відносно шкали. Проте емпіричні спостереження як за фізичними, так і за фінансовими процесами, вказують на те, що для багатьох реальних процесів їхня регулярність та сила залежності змінюються з часом. Для моделювання явища мінливості основних характеристик процесу було запропоновано використовувати мультидробові (або мультифрактальні) процеси. Мультидробовость процесу може виявлятися як по відношенню до моменту часу, якщо характеристики процесу змінюються у часі, так і по відношенню до масштабу, в якому він розглядається.

Ще одним недоліком дробового броунівського руху, який обмежує коло потенційних застосувань, є надзвичайно легкі хвости нормального розподілу. Це мотивує вивчення процесів з властивістю довгострокової залежності, які мають розподіли з важчими хвостами, зокрема, стійкі розподіли. Вивчення дробових стійких процесів також зумовлено наступним фактом: якщо процес є, як дробовий броунівський рух, самоподібним та має стаціонарні прирості, то його розподіл є стійким. Цікавий клас процесів з довгостроковою залежністю, який має «середні» хвости (важчі, ніж у нормального розподілу, і легші, ніж у стійкого), виникає у так званих нецентральних граничних теоремах для сильно залежних випадкових величин. Найбільш дослідженим з них є процес Ерміта рангу 2, який називають процесом Розенблатта.

Інший тип мультидробовості, мультидробовість відносно шкали, полягає у суттєвої залежності властивостей процесу від масштабу, в якому він розглядається. Така властивість моделюється частіше за все з допомогою взяття лінійної комбінації або суміші різних дробових процесів. Найбільш дослідженим з таких процесів є лінійна комбінація вінерівського та дробового броунівського процесів, це так званий змішаний дробовий броунівський рух. Змішаний дробовий броунівський рух має кращі властивості з точки зору фінансового моделювання, у той самий час зберігаючи властивість сильної залежності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках державних бюджетних дослідницьких наукових тем № 11БФ038-02 «Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей» (номер державної реєстрації 0111U006561), № 06БФ038-03 «Аналітичні та стохастичні методи дослідження динамічних систем» (номер державної реєстрації 0106U005864) та договірних НДР №11ДФ038-02 «Дробові й мультидробові процеси та їх застосування у фінансовій математиці» (номер державної реєстрації 0111U007051), №13ДФ038-02 «Статистичний і стохастичний аналіз мультидробових та змішаних моделей із застосуваннями до актуальних прикладних задач» (номер державної реєстрації 0113U007581) на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка і входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і завдання дослідження. Дисертаційну роботу присвячено дробовим і мультидробовим процесам, які використовуються для моделювання складної поведінки випадкових систем. Прикладами дробових процесів є дробовий броунівський рух, дробовий стійкий процес, процес Розенблата. Ці процеси є самоподібними, мають стаціонарні прирости і не є марковськими процесами, тобто майбутня їхня поведінка залежить не тільки від теперішнього стану системи, але й від всієї попередньої еволюції. Дробові стійкі і квадратично гауссівські процеси, а також мультидробові процеси є мало дослідженими, що викликано радше не меншою областю застосувань, а більшими технічними складнощами, пов'язаними з дослідженням таких процесів. Стохастичний аналіз відносно цих процесів не було побудовано, тому більшість питань щодо цих процесів були відкритими.

Метою роботи є розробка основ стохастичного аналізу мультидробових процесів та застосування отриманих результатів до розв'язання задач, які виникають у фінансовій математиці.

Об'єктом дослідження є випадкові явища з властивостями довгострокової залежності та суттєвої неоднорідності в часі й просторі.

Предметом дослідження є стохастичний аналіз дробових і мультидробових процесів, які використовуються для моделювання таких явищ, та його застосування до розв'язання задач фінансової математики.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, теорії стохастичних диференціальних рівнянь, гармонійного аналізу, функціонального аналізу, теорії міри тощо.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна результатів полягає у розробці наукових основ стохастичного аналізу дробових і мультидробових процесів і базується на наступних положеннях. У дисертаційній роботі вперше:

— розроблено методи наближеного розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь з дробовим броунівським рухом;
— встановлено швидкість збіжності дискретних апроксимацій стохастичних диференціальних рівнянь з дробовим броунівським рухом;
— запропоновано строго консистентні статистичні оцінки параметру зносу в рівнянні з дробовим броунівським рухом;
— доведено існування моментів у розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння;
— отримано достатні умови показникової інтегрованості розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння;
— запроновано означення дійсного гармонізованого мультидробового стійкого руху; знайдено умови існування та єдиності розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння із затримкою;

— доведено локальну недетермінованість дійсного гармонізованого мультидробового стійкого руху, існування та регулярність локального часу для цього процесу;
— доведено існування локального часу для мультидробового стійкого поля, для процесу Розенблатта, мультидробового процесу Розенблатта та узагальненого мультидробового процесу Розенблатта;
— отримано критерій відсутності ε-арбітражу в термінах ε-мартингальних мір;
— у моделі з пропорційним податком на капітал портфеля встановлено критерій відсутності арбітражу;
— розв'язано задачу про зображення випадкових величин потраєкторним інтегралом відносно дробового броунівського руху та змішаного дробового броунівського руху.

Удосконалено:
— умови існування та єдиності розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння;
— оцінки швидкості збіжності апроксимацій Ейлера для розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння;
— оцінки на моменти інтегральних функціоналів від дифузійних процесів.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є безперечним внеском у теорію стохастичних диференціальних рівнянь, теорію випадкових процесів, фінансову математику. Запропоновані в дисертації методи можуть бути корисними при дослідженні математичних моделей випадкових явищ зі складною поведінкою, які характеризуються довгостроковою залежністю і суттєвою неоднорідністю.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Особистий внесок автора до статей, опублікованих у співавторстві, є таким.

Стаття [1]: основні результати статті щодо обмеженого арбітражу в багатоперіодній моделі, а саме: леми 3.3, 3.4, 3.5, теореми 3.1 та 4.1. Стаття [2]: основні результати щодо диференційованості за Маллявеном розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з дробовим броунівським рухом. Стаття [3]: результати розділів 3 та 4 щодо швидкості збіжності апроксимацій Ейлера розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з потраєкторним інтегралом та з інтегралом Скорохода. Стаття [7]: результати розділу 2 щодо властивостей області оптимальної зупинки та функції вартості у задачі обміну одного фінансового активу на інший, розділу 3 інтегрального рівняння на криву оптимальної зупинки, розділу 4 щодо асимптотичного розкладу рівняння кривої оптимальної зупинки. Стаття [9]: результати розділу 2 статті про неперервність та локалізованість дійсного гармонізованого мультидробового стійкого руху та результати розділу 3 про локальну недетермінованість дійсного гармонізованого мультидробового стійкого руху, існування та неперервність локального часу. Стаття [10]: результати розділів 3 і 4 щодо швидкості збіжності апроксимацій Ейлера розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння. Стаття [11]: результати розділу 3 щодо оцінок на апроксимації Ейлера розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння, результати розділу 4 щодо фундаментальності розв'язків та результати розділу 5 щодо існування єдиного розв'язку рівняння. Стаття [12]: допоміжні результати у розділі 2 статті та основні результати статті про існування та єдиність розв'язку у розділі 3 та про збіжність розв'язків у розділі 4. Стаття [13]: основний результат статті про збіжність апроксимацій у сенсі майже напевно. Стаття [14]: основні результати статті щодо розподілу локального часу однорідного транзієнтного дифузійного процесу. Стаття [16]: допоміжна лема про існування процесу, інтеграл від якого є нескінченним та основні результати статті щодо зображення випадкової величини стохастичним інтегралом відносно дробового броунівського руху з узгодженим інтеграндом. Стаття [19]: теореми 1 та 2 щодо диференційованості за Маллявеном розв'язків змішаних стохастичних диференціальних рівнянь та лема 3 про інтегрованість розв'язку лінійного рівняння. Стаття [20]: результати розділів 2 та 3 щодо оцінок дробових похідних дробового броунівського руху та розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь і щодо строгої конзистентності статистичних оцінок параметру зносу.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на 24 міжнародних наукових конференціях та 13 засіданнях наукових семінарів провідних українських та закордонних наукових установ.

Публікації. Основні результати роботи викладено у 21 науковій статті [1]–[21], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, та додатково відображено в 12 матеріалах конференцій [22]–[33]. З 21 статті 8 опубліковано без співавторів, 13 опубліковано в журналах, що індексуються в наукометричній базі Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел і списку публікацій автора. Обсяг дисертації становить 335 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел (189 найменувань) та список публікацій автора (33 найменування) займають 26 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність обраної теми, визначено мету і завдання, об'єкт предмет, методику дослідження; окреслено можливі практичні застосування одержаних результатів, особистий внесок здобувача, апробацію отриманих результатів.

Перший розділ містить історичний огляд літератури за тематикою даної роботи та спорідненими питаннями, висвітлює сучасний стан вивчення проблем, пов'язаних з тими, що розглядаються у дисертаційній роботі.

У **другому розділі** наведено основні позначення, які використано в дисертації, та твердження, що мають безпосереднє відношення до змісту дисертаційної роботи.

Третій розділ присвячено стохастичним диференціальним рівнянням, керованим дробовим броунівським рухом. У підрозділі 3.1 розглядається рівняння вигляду

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t a_i(s, X(s))ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(s, X(s))dB_j^H(s), \tag{3.1}$$

$i = 1, \dots, d$, $t \in [0, T]$, де процеси $B_i^H, i = 1, ..., m$ — дробові броунівські рухи з параметром Хюрста $H > 1/2$, $X(0)$ — d-вимірний випадковий вектор, коефіцієнти a_i, $b_{i\,j}$, $: \ \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \ \to \ \mathbb{R}$ є вимірними. Скорочено рівняння (3.1) записується як

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dB^H(s).$$

Накладаються наступні припущення на коефіцієнти.

(A1) умова лінійного зростання: для усіх $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \le C(1 + |x|);$$

(A2) коефіцієнт b має обмежену похідну: для усіх $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\left|\partial_x b(t, x)\right| \le C;$$

(A3) коефіцієнт a є локально ліпшицевим, похідна коефіцієнту $\partial_x b$ є локально гельдеровою з показником $\kappa \in (1/H - 1, 1)$: для довільного $R > 0$, $t \in [0, T]$ та $x, y \in \mathbb{R}^d$ з $|x| < R$, $|y| < R$

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leqslant C_R\, |x - y|\,,$$
$$|\partial_x b(t, x) - \partial_x b(t, y)| \leqslant C_R\, |x - y|^\kappa\,;$$

(A4) коефіцієнт b та його похідна є гельдеровими з показником $\beta \in (1-H, 1]$: для всіх $t, s \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|b(t, x) - b(s, x)| + |\partial_x b(t, x) - \partial_x b(s, x)| \le C|t - s|^\beta.$$

Апроксимації Ейлера розв'язку рівняння (3.1) визначаються наступним чином. Для $N \geqslant 1$ розглядається рівномірне розбиття $\tau_n = n\delta, n = 0, \dots, N$, відрізку $[0, T]$, де $\delta = T/N$. Початкове значення апроксимацій $X^\delta(0) = X(0)$, подальші значення визначимо за допомогою рекурентного співвідношення

$$X^\delta(\tau_{n+1}) = X^\delta(\tau_n) + a(\tau_n, X^\delta(\tau_n))\delta + b(\tau_n, X^\delta(\tau_n))\Delta B_n^H,$$

де $\Delta B_n^H = B^H(\tau_{n+1}) - B^H(\tau_n)$. Неперервні інтерполяції визначаються за допомогою рівняння

$$X^\delta(t) = X(0) + \int_0^t a(t_u^\delta, X^\delta(t_u^\delta))du + \int_0^t b(t_u^\delta, X^\delta(t_u^\delta))dB^H(u), \tag{3.3}$$

де $t_u^\delta = \tau_{n_u}, n_u = \max\{n : \tau_n \le u\}$. Основним результатом підрозділу є наступна теорема про швидкість збіжності апроксимацій Ейлера. Позначимо

$$\Delta_{u,s}^\delta := \left|X(s) - X^\delta(s) - X(u) + X^\delta(u)\right|.$$

Теорема 3.2. *Нехай виконано умови* (A1)–(A4)*, а також*

(A5) *гельдеровість коефіцієнту a за першою змінною: знайдеться* $\gamma \in [2H - 1, 1]$*, що для всіх* $t, s \in [0, T]$*,* $x \in \mathbb{R}^d$

$$|a(t, x) - a(s, x)| \le C|t - s|^\gamma;$$

(A6) *показник* β *з умови* (A4) *задовольняє* $\beta \in [H, 1]$.

Тоді:

(i) для довільних достатньо малих $\varepsilon > 0$ *і* $\rho > 0$ *знайдеться такі* $\delta_0 > 0$ *і* $\Omega_{\varepsilon,\delta_0,\rho} \in \mathscr{F}$*, що* $P(\Omega_{\varepsilon,\delta_0,\rho}) > 1 - \varepsilon$ *і для всіх* $\omega \in \Omega_{\varepsilon,\delta_0,\rho}$*,* $\delta < \delta_0$

$$U_\delta := \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} \left(\left|X(s) - X^\delta(s)\right| + \int_0^{t_s^\delta} \left|\Delta_{u,s}^\delta\right| (s - u)^{-\alpha - 1} du \right) \leqslant C_\rho(\omega)\delta^{2H-1-\rho},$$

де $C(\omega)$ *не залежить від* δ *і* ε*;*

(ii) якщо додатково коефіцієнти a та b обмежені, то для будь-якого $\rho \in (0, 2H - 1)$

$$U_\delta \leqslant C_\rho(\omega)\delta^{2H-1-\rho},$$

з незалежною від δ *сталою* $C(\omega)$.

У підрозділі 3.2 розглядається одновимірне квазілінійне рівняння з інтегралом Скорохода

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s), \omega)\, ds + \int_0^t b(s)X(s) \diamond W^H(s)\, ds, \tag{3.21}$$

де W^H — дробовий шум з параметром Хюрста $H > 1/2$; початкова умова $X(0)$ є невипадковою. Накладаються наступні припущення на коефіцієнти a і b.

(B1) Умова лінійного зростання та умова Ліпшиця на a: для всіх $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$|a(t,x,\omega)| \leqslant C(1+|x|),$$
$$|a(t,x,\omega) - a(t,y,\omega)| \leqslant C\,|x-y|\,.$$

(B2) Гладкість a відносно ω: для $t \in [0, T]$ і для $h \in L^1(\mathbb{R})$

$$|a(t,x,\omega+h) - a(t,x,\omega)| \leqslant C(1+|x|)\int_{\mathbb{R}} |h(s)|\,ds.$$

(B3) Коефіцієнт a є гельдеровим порядку H за t зі сталою, що може зростати лінійно за x:

$$|a(t,x,\omega) - a(s,x,\omega)| \leqslant C(1+|x|)\,|t-s|^H\,;$$

(B4) Коефіцієнт b є гельдеровим порядку H за t:

$$|b(t) - b(s)| \leqslant C\,|t-s|^H\,.$$

Дискретні апроксимації $\widetilde{X}$ розв'язку рівняння (3.21) будуються за допомогою дискретизації часу на його зображенні у вигляді

$$X(t) = J_{-b}(t) \diamond Z(t),$$

де процес $Z(t)$ є розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$Z(t) = X(0) + \int_0^t J_b(s) a(s, J_b^{-1}(s) Z(s), \omega + M b_s)\,ds;$$

тут $J_b(t) = \exp^{\diamond}\left\{-\int_0^t b(s)dB^H(s)\right\}$ — стохастична експонента Віка, $b_t(s) = b(s)\mathbb{1}_{[0,t]}(s)$, M — такий оператор:

$$Mf(x) = K\int_x^T (s-x)^{H-3/2} f(s)\,ds, \quad K = \left(\frac{H(2H-1)}{\mathrm{B}(H-1/2, 2-2H)}\right)^{1/2}.$$

Знайдено швидкість збіжності дискретних апроксимацій розв'язку рівняння (3.21).

Теорема 3.4. *За умов* (B1)–(B4) *апроксимації* $\widetilde{X}$ *збігаються до розв'язку* X *рівняння* (3.21) *у середньому квадратичному, більше того,*

$$\mathsf{E}\left[(X(t) - \widetilde{X}(t))^2\right] \leqslant C\delta^{2H}.$$

У підрозділі 3.3 вивчається питання диференційованості за Маллявеном розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з дробовим броунівським рухом. У пункті 3.3.1 розглядається квазілінійне рівняння у $\mathbb{R}^d$ вигляду

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s))ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b_j X(s) dB_j^H(s) \qquad (3.27)$$

з невипадковим початковим значенням $X(0)$. Припускається, що у рівнянні показник Хюрста $H > 3/4$, $a \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 3.5. *За зроблених припущень розв'язок рівняння* (3.27) *належить* $\mathbb{D}^{1,p}$ *для кожного* $p > 0$.

У пункті 3.3.2 розглядається одновимірне нелінійне рівняння вигляду

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s))ds + \int_0^t b(X(s))dB^H(s). \qquad (3.29)$$

Теорема 3.6. *Нехай коефіцієнти рівняння* (3.29) *задовольняють такі умови:* $a, b \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, $\inf_{\mathbb{R}} |b| > 0$. *Тоді для всіх* $k \geqslant 1$ *розв'язок* $X(t)$ *цього рівняння належить* $\mathbb{D}^{k,\infty}$, *тобто* $X(t)$ *є нескінченно диференційованим за Маллявеном, а всі його похідні є суттєво обмеженими.*

Підрозділ 3.4 присвячено оцінюванню невідомого параметру в одновимірному стохастичному диференціальному рівнянні

$$X(t) = X(0) + \theta \int_0^t a(X(s))ds + \int_0^t b(X(s))dB^{H,\theta}(s) \qquad (3.30)$$

за спостереженнями $X(t_k^n)$ розв'язку на наступному рівномірному розбитті відрізка $[0, 2^n]$: $t_k^n = k2^{-n}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{2n}$. Накладаються наступні припущення на коефіцієнти рівняння (3.30).

(C1) $|a(x)| + |b(x)| \leqslant C$ для усіх $x \in \mathbb{R}$,

(C2) $|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leqslant C\,|x - y|$ для усіх $x, y \in \mathbb{R}$,

(C3) для деякого $\delta \in (1/H - 1, 1]$ та усіх $R > 0$, $x \in [-R, R]$, $y \in [-R, R]$ виконано нерівність $\left|b'(x) - b'(y)\right| \leqslant C_R\,|x - y|^\delta$;

(C4) існує така стала $M > 0$, що для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$|a(x)| \geqslant M, \qquad |b(x)| \geqslant M.$$

У пунктах 3.4.1 і 3.4.2 отримано оцінки відповідно дробової похідної дробового броунівського руху та розв'язку рівняння (3.30).

У пункті 3.4.3 побудовано оцінки параметру θ у рівнянні (3.30). Спочатку розглядається наступна оцінка, одержана дискретизацією оцінки максимальної вірогідності:

$$\hat{\theta}_n^{(1)} = \frac{\sum_{k=1}^{2^{2n}-1} \left(t_k^n\right)^{\lambda} \left(2^n - t_k^n\right)^{\lambda} b\left(X(t_{k-1}^n)\right)^{-1} \left(X(t_k^n) - X(t_{k-1}^n)\right)}{\sum_{k=1}^{2^{2n}-1} 2^{-n} \left(t_k^n\right)^{\lambda} \left(2^n - t_k^n\right)^{\lambda} b(X(t_{k-1}^n))^{-1} a(X(t_{k-1}^n))},$$

де $\lambda = 1/2 - H$. Доведено, що ця оцінка є консистентною і знайдено швидкість її збіжності до справжнього значення параметру. А саме, для фіксованих $\beta \in (1/2, H)$, $\gamma > 1/2$ доведено наступний результат, у якому $\kappa = \gamma/\beta$.

Теорема 3.10. *З імовірністю* 1 $\hat{\theta}_n^{(1)} \to \theta$, $n \to \infty$. *Більше того, знайдеться така випадкова величина* η *з усіма скінченними моментами, що* $\left|\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta\right| \leqslant \eta n^{\kappa+\gamma} 2^{-\rho n}$, *де* $\rho = (1 - H) \wedge (2\beta - 1)$.

Розглядається також простіша оцінка

$$\hat{\theta}_n^{(2)} = \frac{\sum_{k=1}^{2^{2n}-1} b\left(X(t_{k-1}^n)\right)^{-1} \left(X(t_k^n) - X(t_{k-1}^n)\right)}{\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{2n}-1} b\left(X(t_{k-1}^n)\right)^{-1} a\left(X(t_{k-1}^n)\right)},$$

що є дискретизованою оцінкою максимальної вірогідності для θ у рівнянні (3.30), у якому B^H замінено на вінерівський процес.

Теорема 3.11. *З імовірністю* 1 $\hat{\theta}_n^{(2)} \to \theta$, $n \to \infty$. *Більше того, знайдеться така випадкова величина* η' *з усіма скінченними моментами, що* $\left|\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta\right| \leqslant \eta' n^{\kappa+\gamma} 2^{-\rho n}$.

У пункті 3.4.4 проведено аналіз побудованих статистичних оцінок за допомогою комп'ютерного моделювання.

Четвертий розділ присвячено змішаним стохастичним диференціальним рівнянням вигляду

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X) ds + \int_0^t b(s, X) dW(s) + \int_0^t c(s, X) dZ(s),$$

де W — вінерівський процес, Z — процес, траєкторії якого задовольняють умову Гельдера з показником більше 1/2.

У підрозділі 4.1 розглядаються змішані стохастичні диференціальні рівняння із затримкою. Нехай для фіксованого горизонту затримки $r > 0$ визначено $\mathscr{C} = C([-r, 0]; \mathbb{R}^d)$ — банахів простір $\mathbb{R}^d$-значних функцій на $[-r, 0]$ з супремум-нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{C}}$, для процесу $\xi = \{\xi(t), t \in [-r, T]\}$ та $t \in [0, T]$ *сегмент* $\xi_t \in \mathscr{C}$ визначається як $\xi_t(s) = \xi(t + s)$, $s \in [-r, 0]$. Змішане стохастичне диференціальне рівняння із затримкою визначається як наступне рівняння у $\mathbb{R}^d$:

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t a(s, X_s)ds + \int\limits_0^t b(s, X_s)dW(s) + \int\limits_0^t c(s, X_s)dZ(s). \qquad (4.2)$$

де коефіцієнти $a\colon [0,T] \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}^d$, $b\colon [0,T] \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}^{d\times m}$, $c\colon [0,T] \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}^{d\times l}$ є вимірними, процес $Z = \{Z(t), t \in [0,T]\}$ у $\mathbb{R}^l$ є $\mathbb{F}$-узгодженим та має траєкторії, що задовольняють умову Гельдера з показником $\gamma > 1/2$, $W = \{W(t), t \in [0,T]\}$ є стандартним $\mathbb{F}$-вінерівським процесом у $\mathbb{R}^m$. Початкова умова для цього рівняння задається як $X(t) = \eta(t)$, $t \in [-r, 0]$, де $\eta\colon [-r,0] \to \mathbb{R}^d$ задовольняє умову Гельдера з показником $\theta > 1 - \gamma$.

На коефіцієнти рівняння (4.1) накладаються наступні припущення.

(D1) Лінійне зростання: для усіх $\psi \in \mathscr{C}$, $t \in [0,T]$,

$$|a(t,\psi)| + |b(t,\psi)| + |c(t,\psi)| \le C(1 + \|\psi\|_{\mathscr{C}}).$$

(D2) Для усіх $t \in [0,T]$, $\psi \in \mathscr{C}$, коефіцієнт c диференційований за Фреше за другим аргументом, похідна $\partial_\psi c(t,\psi) \in L(\mathscr{C}, \mathbb{R}^{d\times l})$ обмежена рівномірно за $t \in [0,T], \psi \in \mathscr{C}$:

$$\left\|\partial_\psi c(t,\psi)\right\|_{L(\mathscr{C},\mathbb{R}^{d\times l})} \leqslant C.$$

(D3) Функції a, b та $\partial_\psi c$ локально задовольняють умову Ліпшиця за змінною ψ: для будь-якого $R > 0$, $t \in [0,T]$, і всіх ψ_1, ψ_2 з $\left\|\psi_1\right\| \leqslant R$, $\left\|\psi_2\right\| \leqslant R$

$$\begin{gathered} |a(t,\psi_1) - a(t,\psi_2)| + |b(t,\psi_1) - b(t,\psi_2)| \\ + \left\|\partial_\psi c(t,\psi_1) - \partial_\psi c(t,\psi_2)\right\|_{L(\mathscr{C},\mathbb{R}^{d\times l})} \le C_R \left\|\psi_1 - \psi_2\right\|_{\mathscr{C}}. \end{gathered}$$

(D4) Функції c та $\partial_\psi c$ є гельдеровими за t: для деякого $\beta \in (1-\gamma, 1)$ і для всіх $s, t \in [0,T]$, $\psi \in \mathscr{C}$

$$\begin{gathered} |c(s,\psi) - c(t,\psi)| \leqslant C|s-t|^\beta (1 + \|\psi\|_{\mathscr{C}}), \\ \left\|\partial_\psi c(s,\psi) - \partial_\psi c(t,\psi)\right\|_{L(\mathscr{C},\mathbb{R}^{d\times l})} \le C|s-t|^\beta. \end{gathered}$$

Основним результатом підрозділу 4.1 є теорема про існування та єдиність розв'язку рівняння (4.2).

Теорема 4.1. *За умов* (D1)–(D4) *рівняння* (4.2) *має єдиний розв'язок.*

У підрозділі 4.2 розглядається звичайне змішане стохастичне диференціальне рівняння, тобто рівняння вигляду

$$\begin{aligned} X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s) \\ + \int_0^t c(s, X(s))dZ(s), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Тут коефіцієнти $a\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $b\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$, $c\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times l}$ є вимірними, початкова умова $X(0)$ невипадкова. Як і у підрозділі 4.1, процес $W = \{Z(t), t \in [0,T]\}$ є $\mathbb{R}^m$-вимірним стандартним $\mathbb{F}$-вінерівським процесом, процес $Z = \{Z(t), t \in [0,T]\}$ у $\mathbb{R}^l$ є $\mathbb{F}$-узгодженим та має траєкторії, що задовольняють умову Гельдера з показником $\gamma > 1/2$. На коефіцієнти рівняння (4.15) накладаються наступні умови.

(S1) Для всіх $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| + |c(t,x)| \le C(1 + |x|).$$

(S2) Функція c є диференційованою за другою змінною, причому ця похідна обмежена: для всіх $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\left|\partial_x c(t,x)\right| \leqslant C.$$

(S3) Для довільних $R > 0$, $t \in [0,T]$ і таких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, що $\left|x_1\right| \leqslant R$, $\left|x_2\right| \leqslant R$, виконано

$$\begin{aligned} &\left|a(t,x_1) - a(t,x_2)\right| + \left|b(t,x_1) - b(t,x_2)\right| \\ &+ \left|\partial_x c(t,x_1) - \partial_x c(t,x_2)\right| \le C_R \left|x_1 - x_2\right|. \end{aligned}$$

(S4) Для деякого $\beta \in (1-\mu, 1/2)$ і для всіх $s,t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |c(t,x) - c(s,x)| &\leqslant C\,|t-s|^\beta\,(1 + |x|), \\ \left|\partial_x c(s,x) - \partial_x c(t,x)\right| &\le C|s-t|^\beta. \end{aligned}$$

Існування та єдиність розв'язку рівняння (4.15) міститься у наступній теоремі.

Теорема 4.3. *За умов* (S1)–(S4) *рівняння* (4.15) *має єдиний розв'язок.*

У підрозділі 4.3 розглянуто питання існування моментів у розв'язку рівняння (4.15). Нехай $\|f\|_{a,b,\infty} = \sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$ позначає рівномірну норму функції f на відрізку $[a,b]$, а $\|f\|_{a,b,\gamma} = \sup_{a\leqslant x<y\leqslant b}\frac{|f(x)-f(y)|}{(y-x)^\gamma}$ позначає гельдерову напівнорму.

Існування моментів розв'язку доведено без додаткових припущень на коефіцієнти, крім тих, що потрібні для існування та єдиності розв'язку.

Теорема 4.5. *Припустимо, що виконано умови* (S1)–(S4) *та*

$$\mathsf{E}\left[\exp\left\{c\,\|Z\|_{0,T,\gamma}^{1/\gamma}\right\}\right] < \infty.$$

Тоді для довільного $p > 0$ розв'язок X рівняння (4.15) *задовольняє*

$$\mathsf{E}\left[\|X\|_{0,T,\infty}^{p}\right] < \infty.$$

Показникову інтегрованість доведено за іншого набору умов.

(R1) Для всіх $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| + |c(t,x)| \le C.$$

(R2) Для всіх $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\left|\partial_x c(t,x)\right| \leqslant C.$$

(R3) Для всіх $R > 0$, $t \in [0,T]$ і таких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, що $\left|x_1\right| \leqslant R$, $\left|x_2\right| \leqslant R$, виконано

$$\begin{aligned}&\left|a(t,x_1) - a(t,x_2)\right| + \left|b(t,x_1) - b(t,x_2)\right|\\ &+ \left|\partial_x c(t,x_1) - \partial_x c(t,x_2)\right| \le C_R \left|x_1 - x_2\right|.\end{aligned}$$

(R4) Для всіх $s,t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|c(t,x) - c(s,x)| + \left|\partial_x c(t,x) - \partial_x c(s,x)\right| \le C|s-t|^{\beta}.$$

Теорема 4.6. *Припустимо, що виконано умови* (R1)–(R4) *та для довільних $c > 0$, $\alpha \in (0,2)$*

$$\mathsf{E}\left[\exp\left\{c\,\|Z\|_{0,T,\gamma}^{\alpha}\right\}\right] < \infty.$$

Тоді для довільних $c > 0$, $\mu \in (0, 4\gamma/(2\gamma+1))$ розв'язок X рівняння (4.15) *задовольняє*

$$\mathsf{E}\left[\exp\left\{c\,\|X\|_{0,T,\infty}^{\mu}\right\}\right] < \infty.$$

З цих теорем виведено інтегрованість і показникову інтегрованість розв'язків змішаного стохастичного диференціального рівняння з дробовим броунівським рухом.

Наслідок 4.1. *Нехай у рівнянні* (4.15) *процес $Z = B^H$ — дробовий броунівський рух з параметром Хюрста $H \in (1/2, 1)$, а його коефіцієнти задовольняють умови* (S1)–(S4). *Тоді для довільного $p > 0$*

$$\mathsf{E}\left[\|X\|_{0,T,\infty}^{p}\right] < \infty.$$

Наслідок 4.2. *Нехай у рівнянні* (4.15) *процес* $Z = B^H$ *— дробовий броунівський рух з параметром Хюрста* $H \in (1/2, 1)$, *а коефіцієнти рівняння задовольняють умови* (R1)–(R4). *Тоді для довільних* $c > 0$, $\mu \in (0, 4H/(2H+1))$ *розв'язок* X *рівняння* (4.15) *задовольняє*

$$\mathsf{E}\left[\exp\left\{c\,\|X\|^{\mu}_{0,T,\infty}\right\}\right] < \infty.$$

У пункті 4.3.1 доведено результат про інтегрованість розв'язків спеціального змішаного стохастичного диференціального рівняння, коефіцієнти якого залежать від розв'язку рівняння (4.15) і можуть зростати швидше за лінійну функцію.

Підрозділ 4.4 присвячено питанню сильної диференційованості за Маллявеном розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння з дробовим броунівським рухом. Розглядається однорідне змішане стохастичне диференціальне рівняння на відрізку $[0, T]$

$$\begin{aligned} X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s))ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t b_i(X(s))dW_i(s) \\ + \sum_{j=1}^l \int_0^t c_j(X(s))dB^H_j(s), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{4.24}$$

де для $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$ функції $a, b_i, c_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ є неперервними, W — стандартний $\mathbb{F}$-вінерівський процес у $\mathbb{R}^d$, B^H — незалежний від W $\mathbb{F}$-узгоджений дробовий броунівський рух у $\mathbb{R}^l$. На коефіцієнти рівняння накладаються такі припущення:

(M1) коефіцієнти a, b, c обмежені разом з похідними;

(M2) коефіцієнт c двічі диференційований, похідна c'' обмежена.

Основним результатом підрозділу є наступна теорема про сильну диференційованість за Маллявеном.

Теорема 4.8. *Нехай* X *— розв'язок рівняння* (4.24) *коефіцієнти якого задовольняють* (M1), (M2). *Тоді для усіх* $t > 0$ $X(t) \in \bigcap_{p\geqslant 1} \mathbb{D}^{1,p}$.

У підрозділі 4.5 розглядаються наближення Ейлера для одновимірного змішаного стохастичного диференціального рівняння

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s) + \int_0^t c(X(s))dB^H(s),\ t \in [0,T], \tag{4.27}$$

де W — стандартний однорідний $\mathbb{F}$-вінерівський процес, B^H — незалежний від W $\mathbb{F}$-узгоджений дробовий броунівський рух з показником Хюрста $H > 1/2$. На коефіцієнти накладаються наступні умови.

(E1) коефіцієнти a і b обмежені разом зі своїми похідними a'_x, b'_x:

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| + \left|a'_x(t,x)\right| + \left|b'_x(t,x)\right| \leqslant C;$$

(E2) коефіцієнти a і b є рівномірно гельдеровими з показником $2H - 1$ за першою змінною:

$$|a(t,x) - a(s,x)| + |b(t,x) - b(s,x)| \leqslant C\,|t-s|^{2H-1};$$

(E3) коефіцієнт c обмежений разом з похідними першого та другого порядку та відокремлений від нуля:

$$0 < c(x) + c(x)^{-1} + \left|c'(x)\right| + \left|c''(x)\right| \leqslant C.$$

Для $N \geqslant 1$ розглядається рівномірне розбиття відрізку $[0,T]$: $\{0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_N = T,\ \delta = T/N\}$, $\nu_k = k\delta$. Апроксимації Ейлера для рівняння (4.27) визначаються рекурентно як

$$X^\delta(\nu_{k+1}) = X^\delta(\nu_k) + a(\nu_k, X^\delta(\nu_k))\delta + b(\nu_k, X^\delta(\nu_k))\Delta W_k + c(X^\delta(\nu_k))\Delta B^H_k,$$

де $\Delta W_k = W(\nu_{k+1}) - W(\nu_k)$, $\Delta B^H_k = B^H(\nu_{k+1}) - B^H(\nu_k)$. Початкове значення апроксимацій — $X^\delta(\nu_0) = X(0)$. Апроксимації неперервно інтерполюються за допомогою рівняння

$$X^\delta(u) = X(0) + \int_0^u a(t^\delta_s, X^\delta(t^\delta_s))ds + \int_0^u b(t^\delta_s, X^\delta((t^\delta_s)))dW(s) + \int_0^u c(X(t^\delta_s))dB^H(s), \tag{4.28}$$

де $n^\delta_u = \max\{n : \nu_n \le u\}$, $t^\delta_u = \nu_{n^\delta_u}$. Основним результатом підрозділу є точна оцінка порядку швидкості апроксимацій Ейлера у середньому квадратичному.

Теорема 4.9. *За умов* (E1)–(E3) *для апроксимацій Ейлера* (4.28) *розв'язку рівняння* (4.27) *виконано*

$$\mathsf{E}\left[\left(X(t)-X^{\delta}(t)\right)^{2}\right]\leqslant C(\delta+\delta^{4H-2}).$$

У підрозділі 4.6 розглянуто одновимірне змішане стохастичне диференціальне рівняння на $[0,T]$ зі стрибками

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0)+\int_0^t a(s,X(s))ds+\int_0^t b(s,X(s))dW(s) \\ &+\int_0^t c(s,X(s))dB^H(s)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} q(s,X(s-),y)\nu(ds,dy), \end{aligned} \tag{4.38}$$

де W — стандартний вінерівський процес; B^H — дробовий броунівський рух з параметром Хюрста $H\in(1/2,1)$; ν — пуассонівська міра зі скінченною інтенсивністю, тобто $\mathsf{E}\left[\,\nu(dt,dy)\,\right]=\Pi(dy)dt$, і міра Π скінченна. Існування і єдиність розв'язку рівняння (4.38) доведено без додаткових припущень на стрибкову компоненту.

Теорема 4.10. *За умов* (S1)–(S4) *рівняння* (4.38) *має єдиний розв'язок.*

У пункті 4.6.2 розглянуто питання інтегрованості розв'язків рівняння (4.38). Зроблено додаткове припущення про обмеженість коефіцієнту b.

(H1) для всіх $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$

$$|b(t,x)|\leqslant C.$$

На стрибкову частину накладено такі припущення.

(H2) Міра ν не залежить від B^H, W.

(H3) Знайдеться така функція $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, що для всіх $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$

$$|q(t,x,y)|\leqslant g(y)(1+|x|).$$

(H4) Для всіх $p>0$

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)^p\Pi(dy)<\infty.$$

Теорема 4.11. *За припущень* (S1)–(S4), (H1)–(H4) *розв'язок X рівняння* (4.38) *для кожного $p>0$ задовольняє*

$$\mathsf{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|^p\right]<\infty.$$

П'ятий розділ дисертації присвячено властивостям реалізацій мультидробових процесів і полів. У підрозділі 5.1 визначено мультидробовий процес Розенблатта.

Означення 5.1. Мультидробовий процес Розенблатта з функцією Хюрста (або функціональним параметром) H – це процес

$$X_t = \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^t (s-x)_+^{H(t)/2-1} (s-y)_+^{H(t)/2-1} ds\, W(dx) W(dy). \tag{5.5}$$

На функцію H накладається наступне припущення:

$$|H(t) - H(s)| \leqslant C\, |t-s|^\gamma\,, \quad t, s \in [0, T], \tag{5.6}$$

де $\gamma > \max_{t\in[0,T]} H(t)$. У пункті 5.1.2 вивчено основні властивості мультидробового процесу Розенблатта та доведено його неперервність.

Теорема 5.1. *Траєкторії мультидробового процесу Розенблатта є неперервними майже напевно. Більше того, на кожному відрізку $[a, b] \subset [0, T]$ вони майже напевно задовольняють умову Гельдера з будь-яким показником $\delta < \min_{t\in[a,b]} H(t)$.*

У пункті 5.1.3 доведено локалізованість мультидробового процесу Розенблатта. Пункт 5.1.4 містить основний результат підрозділу про існування локального часу в мультидробового процесу Розенблатта.

Теорема 5.4. *Мультидробовий процес Розенблатта, визначений формулою* (5.5)*, має квадратично інтегрований локальний час на відрізку* $[0, T]$.

У підрозділі 5.2 визначено дійсний гармонізований мультидробовий стійкий процес.

Означення 5.4. *Дійсний гармонізований мультидробовий стійкий процес* (дгмсп) з функцією Хюрста $H(t)$ та параметром стійкості $\alpha \in (1, 2]$ визначається як

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} - 1}{|x|^{1/\alpha + H(t)}} M(dx). \tag{5.10}$$

На функцію H накладається умова (5.6). У пункті 5.2.2 доведено локалізованість дгмсп.

Теорема 5.5. *Дгмсп X має версію, яка задовольняє умову Гельдера з будь-яким показником $\kappa < H'$, більше того, має місце оцінка*

$$\sup_{\substack{t,s\in[0,T]\\ |t-s|<\delta}} |X(t) - X(s)| = o(\delta^{H'}\, |\log\delta|^{1/\alpha+1/2+\varepsilon}), \quad \delta \to 0+,$$

для всіх $T, \varepsilon > 0$.

У пункті 5.2.3 доведено локалізованість дгмсп. У пункті 5.2.2 доведено існування квадратично інтегрованого локального часу в дгмсп.

Твердження 5.5. *Дгмсп X має локальний час $L(t,x)$, який задовольняє умову*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}\left[L(t,x)^2 \right] dx < \infty.$$

Також у цьому пункті доведено локальну недетермінованість дгмсп, а з неї виведено регулярність локального часу. У наступній теоремі $H'' = \max_{t\in[0,T]} H(t)$.

Теорема 5.8. *Локальний час $L(t,x)$ дгмсп X неперервний за сукупністю змінних (t,x) при $t>0$, більше того, для будь-якого $\kappa < (1/H''-1)/2$ він задовольняє умову Гельдера з показником κ.*

У підрозділі 5.2 визначено гармонізоване мультидробове стійке поле. Нехай $T=(T_1,\dots,T_k)\in\mathbb{R}_+^N$, $[0,T]=\prod_{k=1}^N[0,T_k]$.

Означення 5.7. Для даної неперервної функції $H:[0,T]\to(0,1)^N$ *анізотропне гармонізоване мультидробове стійке* (N,d)*-поле* з функцією Хюрста H та параметром стійкості $\alpha\in(1,2]$ визначається як

$$Z(t) = \operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\prod_{k=1}^{N}\frac{e^{it_kx_k}-1}{\left|x_k\right|^{1/\alpha+H_k(t)}}M(dx).$$

У випадку $\alpha=2$, тобто коли M має гауссівський розподіл, Z назвемо *анізотропним гармонізованим мультидробовим броунівським* (N,d)*-полем* з функцією Хюрста H.

На функцію H накладається аналог умови (5.6):

$$|H(t)-H(s)| \leqslant C\,|t-s|^{\gamma}$$

з показником $\gamma > \max_{\substack{t\in[0,T]\\k=1,\dots,N}} H_k(t)$.

У пункті 5.3.3 доведено неперевність гармонізованого мультидробового стійкого поля. Нехай $H'=\min_{k=1,\dots,N} H_k'$, $H_k'=\min_{t\in[0,T]} H_k(t)$.

Теорема 5.9. *Поле X має модифікацію з майже напевне неперервними реалізаціями. Більше того, для всіх $\varepsilon>0$ має місце оцінка*

$$|Z(t)-Z(s)| \leqslant C(\omega)\,|t-s|^{H'}\,|\ln|t-s||^{1/\alpha+1/2+\varepsilon}$$

майже напевно для всіх $t,s\in[0,T]$.

У пункті 5.3.4 розглядається локальний час гармонізованого мультидробового стійкого поля.

Теорема 5.10. *Якщо* $d < \sum_{k=1}^{N} 1/H'_k$, *то процес* Z *має локальний час* $L(t,x)$, *причому*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathsf{E}\left[L(t,x)^2 \right] dx < \infty.$$

У пункті 5.3.5 доведено регулярність локального часу в гауссівському випадку.

У підрозділі 5.4 визначено гладкі наближення двопараметричного випадкового поля B:

$$B_t^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} \int\limits_{t_2}^{t_2+\varepsilon} B_s\, ds = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{[0,\varepsilon]^2} B_{s+t}\, ds,$$

де $t = (t_1, t_2)$, $s = (s_1, s_2)$.

На поле B накладаються наступні умови: Нехай випадкове поле $\left\{ B_t, t \in [0,T] \right\}$ задовольняє наступні умови

(F1) B_t — центроване гауссівське;

(F2) знайдуться такі сталі $C > 0$ і $\lambda > 1$, що для усіх $s, t \in [0,T]$

$$\mathsf{E}(\Delta_s B_t)^2 \leqslant C(\left|t_1 - s_1\right| \left|t_2 - s_2\right|)^{\lambda};$$

(F3) траєкторії поля B_t неперервні з імовірністю 1.

За таких припущень доведено збіжність гладких апроксимацій у спеціальному просторі Бєсова двопараметричних функцій.

Теорема 5.12. *За умов* (F1)–(F3) *для усіх* $\beta_1, \beta_2 \in (0, \lambda/2)$ *має місце збіжність майже напевно*

$$\|B^{\varepsilon} - B\|_{1,\beta_1,\beta_2} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Дані результати застосовано до дробових та мультидробових анізотропних полів.

Шостий розділ присвячено фінансовим застосуванням стохастичного аналізу. У підрозділі 6.1 розглядаються зображення випадкових величин у вигляді потраєкторного інтегралу за дробовим броунівським рухом, тобто зображення

$$\xi = \int\limits_0^1 \psi_s d B_s^H,$$

де процес ψ є узгодженим. Пункт 6.1.1 містить допоміжну конструкцію, а саме, в ньому побудовано такий узгоджений процес φ, що для кожного $t \in [0,1)$ $\|\varphi\|_{\alpha,t} < \infty$, тобто інтеграл $v_t := \int_0^t \varphi_s d B_s^H$ визначено, і $v_t \to +\infty$, $t \to 1-$, м.н. У пункті 6.1.2 доведено, що для довільного розподілу знайдеться такий узгоджений процес ζ, для якого інтеграл $\int_0^1 \zeta_s d B_s^H$ має даний розподіл. У пункті 6.1.3 доведено, що довільну випадкову величину можна зобразити інтегралом у невласному сенсі.

Теорема 6.2. *Для довільної $\mathscr{F}_1$-вимірної величини ξ знайдеться такий $\mathbb{F}$-узгоджений процес ψ, що*

— *Для довільного $t < 1$ $\|\psi\|_{\alpha,t} < \infty$ м.н.*

— $\lim_{t\to 1} \int_0^t \psi_s d B_s^H = \xi$ *м.н.*

У пункті 6.1.4 дано достатню умову існування власного інтегрального зображення.

Теорема 6.3. *Нехай для випадкової величини ξ існує число $a > 0$ і такий $\mathbb{F}$-узгоджений майже напевно a-гельдерів процес $\left\{z_t, t \in [0,1]\right\}$, що $z_1 = \xi$. Тоді для довільного $\alpha \in (1-H, (1-H+a) \wedge 1/2)$ існує такий $\mathbb{F}$-узгоджений процес ψ, що $\|\psi\|_{\alpha,1} < \infty$ та $\int_0^1 \psi_s d B_s^H = \xi$.*

Наведено приклади випадкових величин, які задовольняють припущення даної теореми; виявляється, що практично всі випадкові величини, які виникають в фінансовій математиці як платіжні зобов'язання, задовольняють ці припущення. Наведено також приклад випадкової величини, яка не задовольняє припущення теореми 6.3. У пункті 6.1.5 наведено застосування одержаних результатів про інтегральні зображення у дробовій моделі Блека–Шоулза. Зокрема, доведено, що в цій моделі є сильний арбітраж, показано, що кожне платіжне зобов'язання є слабко хеджованим, та дано умови, за яких платіжне зобов'язання є хеджованим.

У підрозділі 6.2 розглядаються задача оптимального обміну фінансових активів, ціни яких моделюються корельованими геометричними броунівськими рухами. У пункті 6.2.1 сформульовано основні властивості області оптимального обміну, зокрема, доведено, що вона має порогову структуру, тобто лежить по один бік від певної кривої. У пункті 6.2.2 виведено рівняння для функції винагород та порогової кривої у задачі оптимального обміну. У пункті 6.2.3 доведено деякі важливі властивості порогової кривої. Основним результатом цього пункту є теорема про асимптотику порогової кривої в околі моменту закінчення можливості обміну.

Теорема 6.10. $\mu(t) = \frac{\delta_2}{\delta_1}(1 - a\sigma t^{1/2} + O(t))$, *де додатна стала a визначається рівністю*

$$a = \sup_{\tau\in[0,1]} \frac{\mathsf{E}\left[\tau W_\tau\right]}{\mathsf{E}\left[\tau\right]}.$$

У пункті 6.2.4 виведено трансцендентне рівняння для сталої a, визначеної у теоремі 6.10.

Підрозділ 6.3 присвячено арбітражу в багатоперіодних моделях фінансового ринку з дискретним часом. Розглядаються дві моделі: з обмеженням на портфель і з податком на величину портфеля. У кожній з цих моделей сформульовано аналог основної теореми фінансової математики, що пов'язує відсутність арбітражу з існуванням певних мір, подібних до мартингальних.

У підрозділі 6.4 розглядаються локальні часи та інтегральні функціонали від однорідного транзієнтного дифузійного процесу X. Основними результатами пункту 6.4.1 є теорема 6.17 та наслідок 6.2, які виражають розподіл локального часу безпосередньо через коефіцієнти дифузійного процесу. В декількох конкретних прикладах розподіл знайдено явно. В пункті 6.4.2 сформульовано необхідні та достатні умови скінченності функціоналів вигляду $J_\infty(f) = \int_0^\infty f(X_s)ds$ у термінах коефіцієнтів зносу та дифузії процесу X. Також дано достатні умови скінченності моментів і показникових моментів таких функціоналів.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано наступні результати за напрямками досліджень, що проводилися.

Розвиток стохастичного аналізу для дробового броунівського руху. Для стохастичних диференціальних рівнянь, що містять дробовий броунівський рух з показником Хюрста $H > 1/2$, отримано наступні результати:

- побудовано апроксимації Ейлера розв'язку рівняння з потраєкторним інтегралом;
- знайдено порядок швидкості збіжності апроксимацій Ейлера розв'язку рівняння з потраєкторним інтегралом;
- побудовано дискретні апроксимації розв'язку рівняння з інтегралом Скорохода;
- знайдено порядок швидкості збіжності дискретних апроксимацій для квазілінійного одновимірного рівняння з інтегралом Скорохода;
- доведено диференційованість за Маллявеном у сильному сенсі для багатовимірного квазілінійного рівняння;
- доведено диференційованість за Маллявеном у сильному сенсі для одновимірного однорідного нелінійного рівняння;
- побудовано строго консистентні оцінки невідомого параметру зносу та знайдено оцінки з імовірністю 1 швидкості збіжності статистичних оцінок до істинного значення параметру.

Розробка теорії змішаних стохастичних диференціальних рівнянь. Для змішаних стохастичних диференціальних рівнянь, керованих вінерівським процесом та процесом Z, траєкторії якого задовольняють умову Гельдера з показником $\gamma > 1/2$, отримано такі результати:

— доведено існування та єдиність розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння із затримкою та без затримки;
— доведено неперервінсть розв'язку рівняння за процесом Z;
— доведено інтегрованість та показникову інтегрованість розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння;
— доведено диференційованість за Маллявеном у сильному сенсі розв'язку однорідного змішаного стохастичного диференціального рівняння;
— знайдено швидкість збіжності апроксимацій Ейлера розв'язку одновимірного змішаного стохастичного диференціального рівняння;
— доведено існування та єдиність, інтегрованість розв'язку змішаного стохастичного диференціального рівняння зі стрибками.

Розвиток теорії мультидробових процесів і полів. Одержано такі результати стосовно мультидробових процесів і полів:
— визначено мультидробовий процес Розенблатта, доведено його локалізованість, існування квадратично інтегрованого локального часу;
— визначено дійсний гармонізований мультидробовий стійкий процес, доведено його непервність і локалізованість, доведено існування, сумісну неперервність та гельдеровість за просторовою змінною його локального часу;
— визначено гармонізоване мультидробове стійке поле, для нього доведено неперервність і існування локального часу;
— доведено властивість секторної локальної недетермінованості для гармонізованого мультидробового гауссівського поля;
— доведено збіжність з імовірністю 1 гладких апроксимацій гауссівських полів.

Застосування стохастичного аналізу до задач фінасової математики. Отримано наступні результати стосовно фінансових застосувань стохастичного аналізу:
— побудоване зображення довільної випадкової величини невласним інтегралом від узгодженого процесу за дробовим броунівським рухом;
— дано достатні умови зображення випадкової величини інтегралом від узгодженого процесу за дробовим броунівським рухом;
— в задачі обміну одного фінансового активу на іншій доведено порогову структуру множини оптимальної зупинки, виведене рівняння з рухомою межею на функцію винагород та інтегральне рівняння для межі оптимального обміну;
— доведено критерії відсутності ε-арбітражу та відсутності арбітражу в моделі з пропорційним податком на капітал.
— отримано оцінки моментів інтегральних функціоналів від однорідного транзієнтного дифузійного процесу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Мішура, Ю. С. Обмежений арбітраж у многоперіодній моделі фінансового ринку з дискретним часом / Ю. С. Мішура, Г. М. Шевченко, П. С. Шеляженко // Теор. імовір. мат. стат. — 2007. — №. 83. — С. 122–132.
2. Mishura, Y. S. On differentiability of solution to stochastic differential equation with fractional Brownian motion / Y. S. Mishura, G. M. Shevchenko // Theory Stoch. Process. — 2007. — Vol. 13, no. 1-2. — P. 243–250.
3. Mishura, Y. S. The rate of convergence for Euler approximations of solutions of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion / Y. S. Mishura, G. M. Shevchenko // Stochastics. — 2008. — Vol. 80, no. 5. — P. 489–511.
4. Шевченко, Г. М. Арбітраж у моделі фінансового ринку за наявності пропорційного податку на величину портфеля / Г. М. Шевченко // Теор. імовір. мат. стат. — 2009. — №. 81. — С. 155–163.
5. Шевченко, Г. М. Про сталу, пов'язану з опціонами Американського типу / Г. М. Шевченко // Теор. імовір. мат. стат. — 2010. — №. 82. — С. 107–111
6. Шевченко, Г. М. Властивості траєкторій мультидробового процесу Розенблатта / Г. М. Шевченко // Теор. імовір. мат. стат. — 2010. — №. 83. — С. 138–147.
7. Mishura, Y. S. The optimal time to exchange one asset for another on finite interval/ Yu. S. Mishura, G. M. Shevchenko // Optimality and Risk – Modern Trends in Mathematical Finance — Berlin: Springer, 2010. — P. 197-210.
8. Шевченко, Г. М. Локальні властивості мультидробового стійкого поля / Г. М. Шевченко // Теор. імовір. мат. стат. — 2011. — №. 85. — С. 140–149.
9. Dozzi, M. Real harmonizable multifractional stable process and its local properties. / M. Dozzi, G. Shevchenko // Stochastic Processes Appl. — 2011. — Vol. 121, no. 7. — P. 1509–1523.
10. Mishura, Y. S. Rate of convergence of Euler approximations of solution to mixed stochastic differential equation involving Brownian motion and fractional Brownian motion / Y. S. Mishura, G. M. Shevchenko // Random Oper. Stoch. Equ. — 2011. — Vol. 19, no. 4. — P. 387–406.
11. Mishura, Y. S. Stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$ / Y. S. Mishura, G. M. Shevchenko // Comm. Statist. Theory Methods. — 2011. — Vol. 40, no. 19–20. — P. 3492–3508.
12. Mishura, Y. S. Mixed stochastic differential equations with long-range dependence: Existence, uniqueness and convergence of solutions / Y. S. Mishura, G. S. Shevchenko // Comput. Math. Appl. — 2012. — Vol. 64, no. 10. — P. 3217–3227.

13. Ralchenko, K. V. Smooth approximations for fractional and multifractional fields/ K. V. Ralchenko, G. M. Shevchenko // Random Oper. Stoch. Equ. — 2012. — Vol. 20, no. 3. — P. 209–232.
14. Перестюк, М. О. Про розподіл локального часу однорідного дифузійного процесу / М. О. Перестюк, Ю. С. Мішура, Г. М. Шевченко // Доповіді НАН України. Серія Математика. — 2013. — № 10. — С. 29–35.
15. Шевченко, Г. М. Інтегрованість розв'язків змішаних стохастичних диференціальних рівнянь / Г. М. Шевченко // Укр. мат. вісник. — 2013. — Т. 10, № 4. — С. 559–574.
16. Mishura, Y. S. Random variables as pathwise integrals with respect to fractional Brownian motion / Y. S. Mishura, G. M. Shevchenko, E. Valkeila // Stochastic Process. Appl. — 2013. — Vol. 123, no. 6. — P. 2353–2369.
17. Shevchenko, G. M. Local times for multifractional square Gaussian processes / G. M. Shevchenko // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. — 2013. — no. 4. — P. 27–31.
18. Shevchenko, G. M. Mixed stochastic delay differential equations / G. M. Shevchenko // Теор. імовір. мат. стат. — 2013. — Vol. 89. — P. 169–182.
19. Shevchenko, G. M. Malliavin regularity of solutions to mixed stochastic differential equations / G. M. Shevchenko, T. O. Shalaiko // Stat. Probab. Letters. — 2013. — Vol. 83, no. 12. — P. 2638–2646.
20. Asymptotic properties of drift parameter estimator based on discrete observations of stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion / Y. Mishura, K. Ral'chenko, O. Seleznev, G. Shevchenko // Modern Stochastics and Applications. — Berlin: Springer, 2014. — P. 303–318. — (Springer Optimization and Its Applications; 90).
21. Shevchenko, G. M. Mixed fractional stochastic differential equations with jumps / G. M. Shevchenko // Stochastics. — 2014. — Vol. 86, no. 2. — P. 203–217.
22. Шевченко, Г. М. Оптимальний момент обміну одного фінансового активу на інший /Г. М. Шевченко // Конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та суміжні питання». — Умань. — 2008. — С. 73.
23. Mishura, Y. S. Bounded arbitrage for multi-period model of financial market with discrete time / Y. S. Mishura, G. M. Shevchenko, P. S. Shelyazhenko // International Conference «European Young Statisticians Meeting». — Castro Urdiales, Spain. 2007. — P. 453.
24. Shevchenko, G. M. Approximation for the density of solution to a fractional stochastic differential equation / G. M. Shevchenko // International Conference «Skorokhod space: 50 Years on». — Kyiv. — 2007. — P. 72.
25. Shevchenko, G. M. A generalization of fractional Brownian motion / G. M. Shevchenko // International Conference «Stochastic Analysis and Random Dynamics». — Lviv. — 2009. — P. 234.

26. Shevchenko, G. M. Multifractal Brownian Motion: Definition, properties and Integration / G. M. Shevchenko // International Conference «Stochastic Processes and Applications». — Berlin, Germany. — 2009. — P. 152.
27. Shevchenko, G. M. Path properties of multifractional Rosenblatt processes / G. M. Shevchenko // International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications II». — Kyiv. — 2010. — P. 17.
28. Shevchenko, G. M. Arbitrage in a model with an expenditure on the portfolio value / G. M. Shevchenko // International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications II». — Kyiv. — 2010. — P. 59.
29. Shevchenko, G. M. Fractional and multifractional models in finance / G. M. Shevchenko // Spring School «Stochastic Models in Finance and Insurance». — Jena. — 2011. — P. 33.
30. Shevchenko, G. M. Recent progress in mixed stochastic differential equations / G. M. Shevchenko // International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III». — Kyiv. — 2012. — P. 19.
31. Mishura, Y. S. Parameter estimation in the models with long-range dependence / Y. S. Mishura, K. V. Ralchenko, G. M. Shevchenko / International Conference «Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics». — Minsk, Belarus. — 2013. — P. 83–86.
32. Shevchenko, G. M. Limit theorems for mixed stochastic differential equations / G. M. Shevchenko // International Conference «Mathematics in Armenia: Advances and Perspectives». — Tsaghkadzor, Armenia. — 2013. — P. 104.
33. Shevchenko, G. M. Local times of multifractional square-gaussian processes / G. M. Shevchenko // International Conference «11th Germany Probability and Stochastics Days». — Ulm, Germany. — 2014. — P. 52.

АНОТАЦІЯ

Шевченко Г. М. Стохастичний аналіз для дробових та мультидробових процесів у моделях з довгостроковою залежністю. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2014.

Дисертаційну роботу присвячено дробовим та мультидробовим процесам, що використовуються при моделюванні явищ із властивістю сильної залежності. Першим напрямком досліджень є розвиток стохастичного аналізу для дробового броунівського руху, що полягає у побудові наближених методів розв’язання стохастичних диференціальних рівнянь з дробовим броунівським рухом, статистичних методів для таких рівнянь, встановленні регулярності за Маллявеном їхніх розв’язків. Другим напрямком є розробка завершеної теорії

змішаних стохастичних диференціальних рівнянь, що полягає у встановленні умов існування та єдиності розв'язку, існуванні моментів розв'язку, побудові наближених методів розв'язання змішаних стохастичних диференціальних рівнянь, встановленні регулярності за Маллявеном. Третім напрямком досліджень є розвиток теорії мультидробових процесів, що полягає у визначенні нових мультидробових процесів і полів з потрібними модельними якостями, встановленні таких властивостей реалізацій цих процесів, як неперервність та існування локального часу, побудові гладких апроксимацій таких процесів і полів у заданих функціональних просторах. Останнім напрямком є застосування стохастичного аналізу до таких актуальних задач фінансової математики, як хеджування платіжних зобов'язань, встановлення критеріїв безарбітражності фінансових моделей, оптимальне виконання фінансових зобов'язань.

Ключові слова: дробовий броунівський рух, вінерівський процес, мультидробовий процес, стохастичне диференціальне рівняння, змішане стохастичне диференціальне рівняння, узагальнений інтеграл Лебега–Стілтьєса, інтеграл Юнга, інтеграл Скорохода, апроксимації Ейлера, стохастична похідна, локалізованість, локальний час, стійкий розподіл, строго консистентна оцінка, інтегральне зображення, арбітраж, хеджування.

АННОТАЦИЯ

Шевченко Г. М. Стохастический анализ для дробных и мультидробных процессов в моделях с долгосрочной зависимостью. — Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2014.

Диссертационная работа посвящена дробным и мультидробным процессам, использующимся при моделировании явлений со свойством сильной зависимости.

Для стохастических дифференциальных уравнений, содержащих дробное броуновское движение с показателем Хюрста $H > 1/2$, получены такие результаты. Построены апроксимации Эйлера для решений уравнений с потраекторным интегралом и найдена их скорость сходимости. Построены дискретные апроксимации для решений квазилинейных уравнений с интегралом Скорохода и найдена их скорость сходимости. Доказана дифференцируемость по Маллявену в сильном смысле решений. Предложены строго состоятельные оценки неизвестного параметра сноса і найдены оценки с вероятностью 1 скорости сходимости этих оценок к истинному значению параметра.

Изучены смешанные стохастические дифференциальные уравнения, источником случайности в которых являются как винеровский процесс, так и про-

цесс Z с траекториями, удовлетворяющими условию Гельдера с показателем $\gamma > 1/2$. Для них доказаны существование и единственность решения, непрерывность решения по процессу Z. Даны достаточные условия существования моментов и экспоненциальных моментов решения. Доказана дифференцируемость по Маллявену решений однородного смешанного стохастического дифференциального уравнения с гладкими коэффициентами. Построены аппроксимации Эйлера решения одномерного смешанного стохастического дифференциального уравнения и найдена их скорость сходимости в среднем квадратическом к решению. Доказаны существование и единственность решения смешанного стохастического дифференциального уравнения со скачками. Доказано существование моментов решения смешанного стохастического дифференциального уравнения со скачками.

Разработана теория мультидробных процессов и полей. Дано определение мультидробного процесса Розенблатта, доказаны его локализируемость и существование у него квадратически интегрируемого локального времени. Дано определение действительного гармонизируемого мультидробного устойчивого процесса, доказаны его непрерывность и локализируемость, доказаны существование и непрерывность по совокупности переменных локального времени, гельдеровское свойство локального времени по пространственной переменной. Дано определение гармонизируемого мультидробного устойчивого поля, доказаны его непрерывность и существование локального времени; в гауссовском случае получено свойство секторной локальной недетерминированности. Доказана сходимость с вероятностью 1 гладких аппроксимаций гауссовских полей.

Рассмотрены применения стохастического анализа в финансовой математике. Построено представление произвольной случайной величины в виде несобственного интеграла от согласованного процесса по дробному броуновскому движению. Найдены достаточные условия существования представления в виде собственного интеграла. В задаче обмена одного финансового актива на другой доказано, что множество оптимальной остановки имеет пороговую структуру, выведено уравнение на функцию стоимости соответствующего платежного обязательства, получено интегральное уравнение для границы оптимального обмена. Доказаны критерии отсутствия ε-арбитража и отсутствия арбитража в модели с пропорциональным налогом на капитал.

Ключевые слова: дробное броуновское движение, винеровский процесс, мультидробный процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, смешанное стохастическое дифференциальное уравнение, обобщенный интеграл Лебега–Стилтьеса, интеграл Юнга, интеграл Скорохода, аппроксимации Эйлера, стохастическая производная, локализируемость, локальное время, устойчивое распределение, строго состоятельная оценка, интегральное представление, арбитраж, хеджирование.

ABSTRACT

Shevchenko G.M. Stochastic analysis for fractional and multifractional processes in models with long memory. — Manuscript.

Doctor's thesis in Physics and Mathematics, speciality 01.01.05 — probability theory and mathematical statistics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2014.

The thesis is devoted to fractional and multifractional processes, which are used to model phenomena with long memory property. The first line of research is the development of stochastic analysis for fractional Brownian motion, which consists in constructing numerical and statistical methods for stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion, and establishing Malliavin regularity of solutions to such equations. The second line of research is the elaboration of the theory of mixed stochastic differential equations, which consists in obtaining conditions for the unique solvability, integrability, as well as in constructing numerical methods to solve such equations and establishing the Malliavin regularity of their solutions. The third line of research is the development of the theory of fractional and multifractional processes, which consists in defining new multifractional processes with desired modelling qualities, establishing their pathwise properties such as the existence and regularity of local times, constructing their smooth approximations. The last line of research is the application of stochastic analysis to financial mathematics problems such as hedging contingent claims, finding criteria for absence of arbitrage, optimal exercise of financial contracts.

Keywords: fractional Brownian motion, Wiener process, multifractional process, stochastic differential equation, mixed stochastic differential equation, generalized Lebesgue–Stieltjes integral, Young integral, Skorokhod integral, Euler approximations, stochastic derivative, localizability, local time, stable distribution, strongly consistent estimator, integral representation, arbitrage, hedging.

Підписано до друку ... Формат 60 × 84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 28. Умовн. друк. арк. 1,9.
Тираж 120 пр. Зам. ....

....