

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский
центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской
академии наук»

На правах рукописи
УДК 519.85

ПОПОВ ИГОРЬ ВИКТОРОВИЧ

МЕТОД АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2022

Работа прошла апробацию в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится **«09» сентября 2022 г.** в **14-00** на заседании диссертационного совета **ФПМИ.01.01.07.004**, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

по адресу: 141701, московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ, Физтех и на сайте организации <https://mipt.ru>.

Автореферат разослан «___» апреля 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Войтиков Константин Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Для численного решения уравнений и систем гиперболического типа в 50-е - 60-е годы прошлого века было предложено большое количество разнообразных методов. Первоначально численные методы для решения уравнений и систем этого типа строились под практические задачи. Так появился метод характеристик. Он позволяет находить решение как в аналитическом виде, так и в численном.

Численные методы разрабатывались для неподвижных расчетных областей. Но вскоре возник большой интерес к решению задач с учетом движения поверхностей. В результате появились два подхода, использующие неподвижные (стационарные) сетки и сетки, изменяющиеся динамически путем перехода из координат Эйлера в координаты Лагранжа.

Хорошо известны работы по решению гиперболических уравнений в лагранжевых координатах. Основные особенности лагранжевого подхода заключаются в том, что при использовании этих схем контактный разрыв не размывается. Расчетные ячейки движутся совместно со средой (жидкостью или газом), а скорость движения элементов сетки определяется скоростью течения среды. Такой подход наиболее оправдан для относительно медленных и гладких течений (в приближении малых деформаций ячеек). Чаще всего лагранжевы методы используются для задач со свободной поверхностью и контактными границами.

Схемы в эйлеровых координатах применяются при конечных и больших деформациях рассчитываемого объекта, а также при решении многомерных задач в случае наличия тангенциальных разрывов плотности и скорости среды. Минусом эйлерова подхода является невозможность построения сетки, адаптированной к решению задачи, в условиях отсутствия априорной информации об этом решении. Результатом применения эйлеровых схем в случае сложного поведения решения является неоправданное измельчение

сетки во всей расчетной области, что частично компенсируется построением неравномерных сеток.

На основе этих двух подходов были разработаны схемы в эйлерово-лагранжевых координатах, методы на подвижной эйлеровой сетке, метод частиц и т.д.

Для решения задач газовой динамики на основе смешанных эйлерово-лагранжевых и квазилагранжевых сеток появились численные методы, основанные на адаптивных сетках. Например, метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением, однородный алгоритм расчета разрывных решений на адаптивных сетках, численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры и многие другие.

Параллельно исследователи развивали различного рода численные схемы для процессов нестационарной газовой динамики. Выделяются следующие классы схем: конечно-разностные, конечно-объемные и конечно-элементные, — отличающиеся типом дискретизации по пространству, явные и неявные, — отличающиеся типом дискретизации по времени.

Основоположниками развития схем вычислительной гидродинамики стали зарубежные ученые — Д. фон Нейман, Р. Рихтмайер, П. Лакс, Б. Вендрофф, Ф.Х. Харлоу, К. Флетчер, А. Хартен, Э. Торе.

В России данной проблематикой занимались академики А.А. Самарский, С.К. Годунов, Н.С. Бахвалов, О.М. Белоцерковский, Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокин, Б.Н. Четверушкин, А.С. Холодов, В.А. Левин, член-корреспонденты А.В. Забродин, В.Ф. Тишкин, Ю.П. Попов, профессора А.П. Фаворский, Б.Л. Рождественский, В.С. Рябенький, В.П. Колган, Т.Г. Елизарова, И.Б. Петров, В.В. Остапенко, В.М. Головизнин и представители их научных школ. Перечислить всех ученых, внесших вклад в развитие современных численных методов решения задач вычислительной гидродинамики, достаточно сложная задача.

Разработанные к настоящему времени высокоэффективные численные методы позволяют получать результаты высокой точности для многих нестационарных пространственных задач механики сплошных сред. При этом численные методы именно в газодинамике превратились в необходимый и широко используемый в современной инженерной практике инструмент создания конкретных технических изделий.

Тем не менее, даже при таком многообразии методов для решения задач механики сплошной среды, универсального метода создать пока не удалось, поэтому численные методы продолжают развиваться, и создаются новые учитывающие конкретные постановки задач и требования по точности решения.

На основе опыта вышеперечисленных научных школ возникла идея создания метода, активно реагирующего на различные виды неустойчивости (связанной как с физическими явлениями, так и с численными эффектами), и построения с его помощью простых и эффективных алгоритмов выявления неустойчивости в процессе решения задач. Эта идея была реализована в виде метода адаптивной искусственной вязкости (метод АИВ), которому посвящена диссертация.

Перейдем к рассмотрению подходов и методов численного решения уравнений гиперболического типа, основанных на явных разностных схемах. Перечислим явные разностные схемы, получившие наиболее широкое практическое применение для решения одномерного уравнения переноса, наиболее сложного в реализации численными методами.

1. Явная схема с направленной разностью, которая имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству.
2. Схема Лакса-Вендроффа (центрально-разностная схема) со вторым порядком аппроксимации по времени и пространству.
3. Гибридные схемы Р.П. Федоренко. Это класс разностных схем, в которых в соответствие линейному дифференциальному оператору ставится некий

нелинейный оператор, а коэффициенты схемы даже для простейшего линейного уравнения переноса становятся зависящими от решения.

4. Схема К.И. Бабенко с нелинейными коэффициентами, имеющая второй порядок аппроксимации по времени и пространству, абсолютно устойчивая.

5. Схема второго порядка «Парабола» со вторым порядком аппроксимации по времени и пространству.

6. Схема «Кабаре», основанная на схеме Арие Изерлиса "Чехарда", а также ее модификация - схема "Кабаре" с монотонизаторами.

Схему Федоренко можно выделить из перечисленных выше, как одну из первых схем с искусственной вязкостью, которая монотонизирует¹ численное решение. В остальных схемах для монотонизации чаще всего добавляются регуляризаторы (ограничители) искомых функций или потоков.

Описанные схемы являются либо абсолютно устойчивыми, либо условно устойчивыми. В отличие от них в предлагаемой работе рассматриваются неустойчивые разностные схемы, которые при помощи метода адаптивной искусственной вязкости (метод АИВ) становятся устойчивыми и позволяют проводить на их основе физически корректные численные эксперименты.

Особый интерес исследователей вызывают системы уравнений гиперболического типа, в частности, системы уравнений газовой динамики, так как на их основе численно решаются многие прикладные задачи. Первопроходцами в этом направлении были Джон фон Нейман (John von Neumann) и Роберт Дэвис Рихтмайер (Robert D. Richtmyer). Они решали такие системы с помощью введения искусственной линейной и нелинейной вязкости. Разработанная этими авторами разностная схема, получившая название "схема Неймана-Рихтмайера", имеет, тем не менее, ряд недостатков. Во-первых, она не является консервативной для системы уравнений Эйлера, так как уравнение

¹ Под монотонными разностными схемами в диссертации понимается выполнение принципа максимума и критерию монотонности С.К. Годунова.

энергии аппроксимируется в недивергентной форме. Вторым недостатком схемы является потеря точности и размывание начального профиля из-за введения искусственной вязкости во всей области решения.

Новый подход, который предлагается в настоящей диссертации, позволяет выбирать искусственную вязкость в зависимости от особенностей поведения решения и тем самым устранить недостаток с размыванием как начального профиля, так и разрывов.

Дальнейшее развитие численных методов решения задач газовой динамики было предложено академиком С.К. Годуновым в работах, ставших классическими, а также учениками, предложившими различные модификации его метода в схемах, которые носят название "схемы годуновского типа". Этим же вопросам были посвящены работы зарубежных авторов, в частности, П. Роу, С. Ошера, Б. Энфилдта, А. Хартена, П. Лакса, Б. Ван Лира.

Активное развитие процесса создания новых численных (сеточных) методов связано с поиском новых и наиболее эффективных методов решения уравнений гидродинамики, поскольку задачи современной индустрии требуют высокой точности решения наряду с простотой и быстротой его поиска.

Современные численные методы решения газодинамических задач можно разделить на две группы.

I. Разностные схемы годуновского типа (явные консервативные или потоковые схемы):

1) WAF (Weighted average flux schemes и модификации WAFT и WAFC) - схема средневзвешенного потока, (следует сделать уточнение, что первым разработчиком этой методики является Е.Ф. Торо в отчете колледжа воздухоплавания № 8907 в июне 1989 года под названием TVD regions for the weighted average flux (WAF) method as applied to a model hyperbolic conservation law), в которой используется комбинация метода Годунова и алгоритма вычисления потока методом П. Л. Роу (P. L. Roe).

а) В модифицированном коде WAFT используется решатель задачи Римана о распаде произвольного разрыва.²

б) Схема WAFC аналогична схеме WAFT, но с модификациями Эйнфельдта.

2) WENO5 и CWENO3 (Weighted essentially nonoscillatory schemes.) - взвешенные принципиально не осциллирующие схемы, которые являются усовершенствованными схемами ENO, базирующиеся на схеме А. Хартена (A. Harten) и С. Ошера (S. Osher). Эти схемы имеют высокий порядок аппроксимации на гладких решениях и понижают порядок на ударных волнах. Метод WENO5 имеет пятый порядок точности на гладких решениях, а CWENO3 - третий порядок.

3) CLAW (Clawpack wave propagation scheme) - схема и пакет программ, использующих законы сохранения массы, импульса и энергии (Clawpack - conservation-laws package), разработанный Рэндаллом Левеком (Randall LeVeque).

Все вышеперечисленные схемы хорошо отслеживают разрывы решений. На ряде тестов к ним близок кусочно-параболический метод PPM (Piecewise parabolic method), его разработчики – П. Колелла (P. Colella) и П.Р. Вудвард (P.R. Woodward). PPM относится к классу схем годуновского типа более высокого порядка точности и использует кусочно-параболическую реконструкцию с применением решателя задачи Римана и метода расщепления по пространственным переменным.

Характерным недостатком всех вышеназванных схем (методов) является проявление немонотонности в виде длинных волн с малой амплитудой на константных частях решения (между разрывами). Например, это происходит

² Задача Римана о распаде произвольного разрыва - это задача о вычислении потока через разрыв. Для вычисления потоков таким способом требуется решать нелинейные алгебраические уравнения в каждой ячейке разностной сетки путем огромного количества арифметических операций, особенно при решении многомерных задач. Для простоты чаще всего используется приближенное решение задачи Римана

в известном тесте Noh, где рассчитывается столкновение двух гиперзвуковых потоков холодного плотного газа. В результате столкновения образуются две сильные ударные волны, распространяющиеся в разные стороны, между которыми остается неподвижный газ с постоянными плотностью и давлением.

II. Схемы, использующие искусственную вязкость.

1) LL - положительная схема. Этот метод, разработанный Сюй-Донг Лю (Xu-Dong Liu) и Питером Лаксом (Peter Lax) (LL), основан на теореме Фридрихса³ и подобен предикторно-корректорной схеме с линейной коррекцией потоков.

2) CFLF – комбинированный многошаговый метод первого порядка, который применяется как на эйлеровых, так и на лагранжевых сетках, а также на структурированных и треугольных сетках. Он состоит из n шагов по времени, в том числе: $n-1$ шагов по схеме Лакса-Вендроффа и один шаг по схеме Лакса-Фридрихса.

3) CFLFh – гибридный метод, основанный на комбинированном методе CFLF с поправками потока для членов переноса, взятых из работы Хартона. Формально метод имеет второй порядок аппроксимации.

4) JT – центральная схема с ограничителями (лимиттерами и регуляризаторами). Это двумерный метод, разработанный Гуан-Шань Цзян (Guang-Shan Jiang) и Эйтаном Тадмором (Eitan Tadmor). Его предшественником является одномерный метод, ранее разработанный Хаимом Нессяху (Haim Nessyahu) и Эйтаном Тадмором, основой которого являются явные центрально-разностные схемы без расщепления по пространственным переменным с решателем задачи Римана. Оба метода просты в реализации и экономичны с точки зрения вычислительных затрат.

³ В области $G_1 \subseteq G$, где функция f имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка p включительно, всякое обобщенное решение уравнения $Lu = f$ обладает интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка $2m + p$ включительно. Иными словами, если f принадлежит $W^p(G_1)$, то обобщенное решение u уравнения $Lu = f$ принадлежит $W^{p+2m}(G_1)$.

Подводя итог проведенному краткому анализу характерных свойств второй группы методов, следует отметить, что они приводят к размыванию ударных волн и сильному размыванию контактных разрывов.

Краткое описание разностных схем первой и второй групп, а также сравнение результатов расчётов тестовых задач приведены в работах Liska R., Wendroff B. Wendroff. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations // SIAM J. Sci. Comput. 2003. V. 25. №3. P. 995-1017, Kucharik M., Liska R., Steinberg S., Wendroff B. Optimally-stable second-order accurate difference schemes for non-linear conservation laws in 3D // Applied Numerical Mathematics, 2006, v.56, p. 589-607. Там же отмечены достоинства и недостатки перечисленных методов при решении задач различной степени сложности.

Подобные сравнения метода АИВ с некоторыми из перечисленных методов проводятся в диссертации.

Заслуживают упоминания также явные разностные схемы для кинетически-согласованных, квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений.

Перейдем далее к рассмотрению различных механизмов введения искусственной вязкости в разностные схемы. Как отмечалось выше, впервые ввели искусственную вязкость в разностные уравнения Д. фон Нейман и Р. Рихтмайер.

В 1961 году в журнале "Вычислительная математика и математическая физика" была опубликована статья А.А. Самарского и В.Я. Арсенина, где авторы впервые определили условия, накладываемые на искусственную вязкость, для уравнения плоского одномерного изэнтропического движения газа в переменных Лагранжа.

Приведем их дословно:

«1) система обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой свелась наша задача, должна иметь непрерывное решение;⁴

2) действие $q(s)$ должно быть пренебрежимо малым вне ударного слоя и в области волны разрежения;⁵

3) когда размеры области движения велики по сравнению с толщиной ударного слоя, должны выполняться условия Гюгонио».

Эти требования опубликованы в работе Самарский А.А., Арсенин В.Я. О численном решении уравнений газовой динамики с различными типами вязкости. ЖВМ и МФ, т. 1, №2, 1961 с.357-360.

Также для дифференциально-разностных и разностных уравнений газовой динамики сформулированы еще два требования, опубликованные в работе Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Об искусственной вязкости и устойчивости дифференциально-разностных и разностных уравнений газовой динамики. Препринт №70, 1976, М.: ИПМ АН СССР:

«1) Искусственная вязкость не должна нарушать консервативность динамических уравнений.

2) Искусственная вязкость должна обеспечивать монотонность фронта «модельной» ударной волны, и размывать его на наименьшее возможное количество ячеек.»

Эти требования справедливы и на сегодняшний момент времени, и не только в переменных Лагранжа, и были учтены автором при создании метода АИВ. Эти требования приведены в работе Гарольда Л. Броуда, где автор применил подход с искусственной вязкостью для численного решения

⁴ Для этого вводится автомодельная переменная, которая исходную систему уравнений газовой динамики для описания плоского одномерного изэнтропического движения газа в переменных Лагранжа переводит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Из решения полученной системы ОДУ находится интеграл движения и на его основе определяется искусственная вязкость.

⁵ В статье $q(s)$ - некоторая функция искусственной вязкости см. J. Neumann, M. Richtmyer. A method for the numerical calculations of gidrodinamical shocks. J. Appl. Phys., 1950, 21, № 1, 232.

сферических ударных волн, а полученные результаты были успешно использованы на практике. Аналогичные подходы используются в РФЯЦ-ВНИИЭФ (г. Саров), в частности, в работах А.В. Родионова.

Уравнения, содержащие искусственную вязкость, рассматривались и в работах Б.Л. Рождественского, Н.Н. Яненко. Обобщением их исследований стала монография под их авторством.

Применение искусственной вязкости рассматривалось также в работах:

- 1) Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. — М.: Мир, 1990. — / Пер. с англ;
- 2) Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1970;
- 3) Остапенко В.В. “Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **42:7** (2002), с. 1019–1038;
- 4) Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Москва, Физматлит, 2001.

В Институте математического моделирования РАН, а затем и в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша, вопросами применения искусственной вязкости занимались Б.Н. Четверушкин и Т.Г. Елизарова, что нашло отражение в их монографиях.

Метод АИВ относится к сеточным конечно-разностным схемам. В диссертации используются явные, полностью консервативные, монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации относительно шагов равномерной ортогональной пространственной сетки узлов и шагов по времени в области гладкости решения, а также создан аналог на неструктурированных многоугольных и многогранных выпуклых ячейках. Второй порядок аппроксимации по времени достигается использованием известных поправок Лакса-Вендроффа.

Однако, аппроксимации, содержащие лишь указанные поправки, не обеспечивают монотонности разностной схемы, что быстро приводит к потере

точности сеточного решения. Чтобы добиться монотонности разностной схемы, в нее вводятся диссипативные слагаемые с искусственной вязкостью, имеющей порядок шага пространственной сетки. Вместе с тем введение подобной вязкости приводит к быстрому размыванию контактных разрывов и вновь к потере точности сеточного решения.

Для преодоления этих противоречий, а именно немонотонности решения разностной схемы с поправками Лакса-Вендроффа и сильного размывания контактных разрывов искусственной диссипацией, в диссертации предлагается новый приём введения адаптивной искусственной вязкости, как для решения уравнений газовой динамики, так и для уравнений Навье-Стокса.

Введение адаптивной искусственной вязкости необходимо лишь в точках и областях решения, где возникает численная неустойчивость.

Для уравнений Навье-Стокса была получена искусственная вязкость, вводимая в разностную схему, отличная от вязкости для уравнений Эйлера, которая была сконструирована таким образом, чтобы она отсутствовала в пограничном слое, где присутствует динамическая вязкость. Для уравнений Эйлера был получен интервал возможных значений искусственной вязкости.

Цели и задачи диссертационной работы

Основной целью данной работы было создание простого и эффективного адаптивного численного метода для моделирования задач гидродинамики, как на персональных компьютерах, так и на современных многопроцессорных вычислительных системах.

В рамках достижения указанной цели в диссертации рассматривались следующие задачи:

- на основе предварительного анализа методов и подходов к решению задач газовой динамики разработать или выбрать наиболее адекватный численный метод;
- разработать и дать теоретическое обоснование предлагаемого численного метода - метода АИВ;

- реализовать численный метод АИВ в виде комплексов программ;
- провести детальную верификацию метода АИВ на множестве известных тестовых задач;
- провести численные эксперименты с помощью метода АИВ для ряда сложных практических задач.
- предложить конструкцию адаптивной искусственной вязкости, учитывающей линейную и нелинейную вязкость в зависимости от решения задачи.

Научная новизна полученных результатов

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем:

1. Разработан новый численный метод решения задач на основе введения в локальных областях расчета искусственной вязкости для явных разностных схем.

2. Разработан оригинальный численный метод в одномерных и многомерных постановках, на структурированных и неструктурированных сетках. Особое внимание уделено созданию численного метода АИВ на неструктурированных сетках.

3. В процессе работы над диссертацией автором созданы новые комплексы программ, реализующие разработанный численный метод для решения задач двухфазной фильтрации, задач системы уравнений Эйлера и системы уравнений Навье-Стокса.

4. К числу неоспоримых достоинств разработанного численного метода необходимо отнести и тот факт, что он имеет единственный параметр настройки - число Куранта, все остальные параметры формируются автоматически в процессе расчета.

Теоретическая ценность и практическая значимость

- Разработан новый численный метод решения задач математической физики, конкурентноспособный с современными численными методами, такими как TVD-схемы, ENO, WENO и другими.

- Предложенный численный метод активно используется другими научными коллективами.
- На основе проведенных научных исследований в рамках издательского проекта РФФИ в 2014 году издана книга в соавторстве с И.В. Фрязиновым «Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики», которая вызвала живой интерес научного сообщества.
- Разработаны комплексы программ для численного исследования задач газовой динамики на основе системы уравнений Навье-Стокса.

Методология и методы исследования

В основу диссертационной работы легли численные методы, используемые в задачах газовой динамики.

При построении пространственно-временных аппроксимаций дифференциальных уравнений в частных производных использовались методы конечных разностей и конечных объёмов. Для повышения временной аппроксимации использовались поправки Лакса-Вендроффа, а для повышения по пространственным переменным - центрально-разностные аппроксимации. Для обеспечения монотонности получаемых разностных схем вводились диссипативные слагаемые. Для численного метода, реализованного на неструктурированных сетках, использовался разработанный автором оригинальный алгоритм построения треугольных сеток с использованием критерия Делоне.

Проводился анализ аппроксимации, устойчивости, сходимости и выполнения достаточного условия принципа максимума разностных схем для линейного и нелинейного уравнений переноса. Эти исследования проводились с использованием принципа максимума, критерия Фридрихса и/или спектрального метода.

Для верификации полученных численных результатов осуществлялось их сравнение с известными тестовыми задачами, экспериментальными и расчетными данными других исследователей.

Более подробно результаты проведенных исследований можно описать следующим образом.

Разработан численный метод адаптивной искусственной вязкости решения уравнений линейного и нелинейного переноса, газовой динамики на ортогональных, треугольных и тетраэдральных сетках в случае двумерных и трехмерных задач. Вычислительный код реализован для двумерных задач в декартовых и цилиндрических переменных. Неструктурированные треугольные сетки выбраны согласованными с границами области с заданной точностью. Искомые сеточные функции определялись в центрах описанных около треугольников окружностей, если эти центры лежат внутри треугольников, в противном случае - в центрах тяжести треугольников.

Исходные уравнения газовой динамики аппроксимировались с поправками Лакса-Вендроффа методом баланса массы, импульса, полной энергии, и по явной схеме, в отсутствие искусственной вязкости, находилось на новом временном слое «предикторное» решение задачи (первый этап). Далее около каждой расчетной ячейки рассматривались соседние с ней ячейки. По «предикторному» решению находилось его линейное восполнение на рассматриваемых ячейках и по нему все производные в центре рассматриваемой ячейки. По этим производным определялись области (ячейки), занятые волнами сжатия (ВС), волнами разрежения (ВР), ударными волнами (УВ), контактными разрывами (КР) и осцилляциями сеточной природы (ОСЦ). При их определении проверялись известные неравенства.

Исходя из принципа «замороженных коэффициентов» и условий принципа максимума, находились выражения для искусственной вязкости, монотонизирующие сеточные уравнения в пределах $\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}$. Интервал искусственной вязкости μ учитывал поправки Лакса-Вендроффа. В области УВ и ВС использовалась минимальная вязкость $\mu_{\min}$, в области ОСЦ

максимальная вязкость $\mu_{\max}$, в областях ВР и КР вязкость полагалась $\mu = 0$. В итоге диссипативные слагаемые содержали разрывную вязкость и оказывались отличными от нуля вблизи разрывов, дополнительно не размывая КР и ВР.

На третьем этапе производился пересчет решения на новом временном слое с учетом диссипативных слагаемых и находилось скорректированное решение, которое оказывалось практически монотонным и размывало КР, УВ на 3-5 интервалов.

Таким образом, метод удовлетворяет требованиям дивергентности (консервативности), допускает простое распараллеливание вычислений.

Проведено большое количество расчетов одномерных, двумерных и трехмерных задач. Например,

- Сравнение расчетов задачи о распаде разрыва в одномерной и соответствующей задачи в двумерной постановке на треугольных сетках.

- Расчет задачи о распаде разрыва с образованием четырех контактных разрывов на ортогональных сетках в декартовых переменных и на треугольной сетке. Результаты хорошо совпадают.

- Просчитана на треугольной сетке задача о течении газа внутри трубы. В 2014 году издана книга «Метод адаптивной искусственной вязкости решения уравнений газовой динамики» (276 страниц), обобщившая 11 научных работ, ранее опубликованных в журнале «Математическое моделирование». Первая публикация научных изысканий по методу АИВ относится к 2007 году.

Далее метод АИВ на треугольных сетках был распространен на решение уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости. Решалась задача об обтекании цилиндра потоком набегающего газа. Были получены решения при наличии симметричных вихрей (при небольших Re), течений с отрывом вихрей – дорожки Кармана. При малом числе Маха была рассчитана задача для практически несжимаемой жидкости (задача о течении жидкости в квадратной каверне с подвижной верхней крышкой).

Положения и результаты, выносимые на защиту

- Разработан метод адаптивной искусственной вязкости для повышения устойчивости и монотонности разностных схем, в частности, разработана методика регуляризации неустойчивых разностных схем для гиперболических уравнений.
- Обоснована величина и механизм введения адаптивной искусственной вязкости для уравнений и систем гиперболического типа.
- Предложены новые численные алгоритмы, реализующие метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения задач вычислительной гидродинамики, в частности, реализованы алгоритмы для системы уравнений Эйлера и Навье-Стокса.
- Созданы комплексы программ:
 - 1) в одномерной постановке для системы уравнений Эйлера в декартовых, цилиндрических и сферических координатах;
 - 2) в многомерной постановке для системы уравнений Эйлера на ортогональной и неструктурированной сетках в различных системах координат;
 - 3) в двумерной постановке для системы уравнений Навье-Стокса на неструктурированных сетках;
- Выполнен ряд тестовых и верификационных расчетов как для задач, имеющих аналитическое решение, так и для известных тестовых задач газовой динамики.
- Выполнены расчеты для ряда прикладных задач.

Достоверность результатов

Достоверность полученных в диссертации результатов определяется их теоретическим и численным анализом (предложенный численный метод исследован на устойчивость и сходимость либо теоретически, либо численно) и верификацией при разнообразном тестировании, включающем сравнение с точными решениями (при их наличии), сравнением с результатами экспериментов и расчетами по другим методам, ясным физическим смыслом полученных результатов и согласованностью с современными представлениями о предмете исследования.

Личный вклад

В диссертационной работе представлены результаты, полученные при решающем вкладе соискателя. Основные результаты исследований получены лично соискателем, за исключением предложений о применении в разработанном методе АИВ поправок Лакса-Вендроффа и неравенств для определения областей, занятых ударной волной, контактным разрывом и волной разряжения для задач газовой динамики, внесенных И.В. Фрязиновым, который фактически являлся консультантом при проведении научных изысканий.

Реализация и внедрение результатов работы

Работа выполнялась в рамках научных планов ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Также работа поддерживалась грантами Российского фонда фундаментальных исследований:

16-07-00519-А «Создание комплекса параллельных программ для моделирования процессов тепломассопереноса в областях сложной геометрии на неструктурированных сетках», руководитель;

14-01-07001-Д «Издание книги "Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики"», руководитель;

15-01-04620-А «Разработка и обоснование численных методов, создание параллельных алгоритмов и программ для решения начально-краевых задач для эволюционных уравнений на нерегулярных сетках», исполнитель;

16-29-15095-ОФИ_М «Создание многомасштабных гидродинамических моделей, методов их численного анализа, параллельных алгоритмов и комплексов программ для моделирования нелинейных процессов при прохождении флюида через пласт», исполнитель;

20-51-18004-Болг_А «Численные методы и алгоритмы в теории и приложениях классической гидродинамики и многофазных флюидов в пористых средах», исполнитель.

Апробация работы

Результаты, приведенные в данной диссертационной работе, докладывались и обсуждались на семинарах ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, семинарах кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, институтском семинаре Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, семинарах ИВМ им. Г.И. Марчука РАН, а также были представлены в более чем 40 докладах на международных и всероссийских конференциях: I,V,VI,VII,IX,XI и XVII Международных междисциплинарных научных семинарах «Математические модели и моделирование в лазерно-плазменных процессах и передовых научных технологиях» (Москва, Россия; Будва и Петровац, Черногория), Международных конференциях «Распределенные вычисления и Грид-технологии в науке и образовании» (Дубна, Россия), Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и информатики» (Дубна, Россия), международных конференциях «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (2007, 2012, 2014, 2016, Казань, Россия), Международной конференции по прикладной математике и информатике, посвященной 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына (2010, Москва, Россия), Конференции "Тихоновские чтения 2011" (2011, Москва, Россия), Международных конференциях «Математические модели и вычислительная физика» (Дубна, Россия), Девятой Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. (2012, Алушта, Россия), Международной научной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященной памяти академика А.А. Самарского в связи с 95-летием со дня его рождения (2014, Москва, Россия), на международных конференциях по Численному Анализ и Приложениям (2016, Лозенец, Болгария), Третьей международной конференции «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (2016, Москва, Россия).

Основные публикации

По теме диссертации опубликовано 34 работ, из них 23 – статьи в ведущих отечественных и зарубежных рецензируемых журналах, в том числе 21 – статьи в российских рецензируемых журналах из списка ВАК, RSCI или входящих в международные базы данных и системы цитирования Scopus, Web of Science.

В 2014 году издана книга «Метод адаптивной искусственной вязкости решения уравнений газовой динамики» (276 страниц) по проекту РФФИ 14-01-07001Д.

Полный список публикаций приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и списка работ по теме диссертации. Объем диссертации составляет 283 страницы, текст содержит 94 рисунка и 23 таблицы. Список литературы содержит 136 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий исторический обзор и анализ современных численных методов для решения задач вычислительной гидродинамики. Проведен анализ современных комплексов программ. Сформулированы основные требования при разработке численных методов с применением искусственной вязкости. В жатой форме изложена идея метода АИВ.

Первая глава посвящена регуляризации неустойчивых разностных схем для линейного уравнения переноса как в одномерной, так и в многомерной постановке.

В п. 1.1. рассматриваются классические разностные схемы для линейного уравнения переноса, проводится их анализ на порядок аппроксимации и устойчивость. Уделяется особое внимание вопросу из-за чего некоторые разностные схемы неустойчивы и немонотонны. Предлагается механизм повышения устойчивости разностных схем. Приводится алгоритм регуляризации неустойчивых схем и этапы решения, а также результаты численных экспериментов.

Рассмотрим разностную схему, имеющую центрально-разностную аппроксимацию пространственной производной, для линейного уравнения переноса. Запишем разностную схему в виде

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = 0$$

Согласно теореме, сформулированной С.К. Годуновым, среди линейных разностных схем для решения уравнений в частных производных нет монотонных схем выше первого порядка. При этом, если ввести в уравнение переноса дифференциальный оператор, содержащий искусственную вязкость, то можно эту разностную схему сделать нелинейной и тем самым обойти теорему С.К. Годунова. Такие схемы в научной литературе носят название Nonlinear Flux Correction (NFC). В дифференциальном виде уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

Здесь $\mu(t, x, u)$ - искусственная вязкость (некоторая функция). В разностном виде имеем

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = \frac{1}{h} \left(\mu_{k+1/2} \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} - \mu_{k-1/2} \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h} \right)$$

или

$$u_k^{n+1} = \left(\frac{a\tau}{2h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right) u_{k-1}^n + \left(1 - 2 \frac{\mu\tau}{h^2} \right) u_k^n + \left(-\frac{a\tau}{2h} + \frac{\mu\tau}{h^2} \right) u_{k+1}^n. \quad (1)$$

Представленная разностная схема будет монотонной, если будут выполнены следующие утверждения.

Утверждение 1. Разностная схема (1) будет монотонна при выполнении двух условий:

$$1) \mu_{\min} = \frac{ah}{2} \leq \mu \leq \frac{ah}{2} \frac{1}{\gamma} = \mu_{\max};$$

$$2) 0 < \gamma = \frac{a\tau}{h} \leq 1,$$

где $\gamma = \frac{a\tau}{h}$ - число Куранта.

Но введение дополнительных слагаемых могло нарушить условие устойчивости разностной схемы. Поэтому, используя спектральный метод, было доказано утверждение 2.

Утверждение 2. Разностная схема (1) будет устойчива при выполнении условий:

$$A_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{2 \frac{\tau}{h^2}(1 - \cos \varphi)} \leq \mu \leq A_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\gamma^2(1 - \cos^2 \varphi)}}{2 \frac{\tau}{h^2}(1 - \cos \varphi)},$$

где φ - любое действительное число.

Объединяя эти два утверждения, сформулируем теорему.

Теорема 1. Разностная схема (1) будет монотонна и устойчива (L^2 -диссипативность) при выполнении условия на искусственную вязкость

$$\mu_{\min} = ah \leq \mu \leq \frac{ah}{2} \frac{1}{\gamma} = \mu_{\max} \text{ и условия на число Куранта } 0 < \gamma \leq \frac{1}{2}.$$

Более сложная ситуация с разностной схемой «правый уголок» (разностная схема по потоку вперед). Эта схема имеет вид

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = 0, \quad a > 0$$

Из учебной литературы известно, что эта схема абсолютно неустойчива, но используя метод АИВ, схему можно сделать условно устойчивой и, кроме того, ещё и монотонной. Сформулируем основные леммы и теоремы.

Рассмотрим модифицированную разностную схему «правый уголок» с искусственной вязкостью. Она имеет следующий вид

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = \frac{1}{h} \left(\mu_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} - \mu_{k-\frac{1}{2}} \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h} \right), \quad (2)$$

где μ - искусственная вязкость.

Лемма 1. Разностная схема (2) будет монотонна при выполнении условия на искусственную вязкость

$$\mu_{\min} = \frac{h^2}{\tau} \gamma \leq \mu \leq \frac{h^2}{2\tau} (1 + \gamma) = \mu_{\max}$$

Лемма 2. Разностная схема (2) будет устойчива при выполнении следующего условия

$$\frac{h^2 (1 + \gamma (1 - \cos \varphi)) (1 - \cos \varphi) - \sqrt{1 - \gamma^2 (1 - \cos^2 \varphi)}}{4(1 - \cos \varphi)^2} \leq \mu \leq \frac{h^2 (1 + \gamma (1 - \cos \varphi)) (1 - \cos \varphi) + \sqrt{1 - \gamma^2 (1 - \cos^2 \varphi)}}{4(1 - \cos \varphi)^2},$$

где φ - любое действительное число.

Обобщая эти две леммы, сформулируем условия, при которых разностная схема (2) будет устойчива и монотонна, в виде теоремы.

Теорема. Разностная схема (2) будет монотонна, а следовательно и устойчива при выполнении условия на искусственную вязкость

$$\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max},$$

$$\text{где } \mu_{\min} = \frac{h^2}{\tau} \gamma, \quad \mu_{\max} = \frac{h^2}{2\tau} A_2 = \frac{h^2 (1 + \gamma (1 - \cos \varphi)) (1 - \cos \varphi) + \sqrt{1 - \gamma^2 (1 - \cos^2 \varphi)}}{4(1 - \cos \varphi)^2}.$$

В п. 1.2. построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \Omega = (0, L) \times (0, T)$$

с начальным и граничным условиями, имеющими вид

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, L];$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T],$$

с использованием адаптивной искусственной вязкости. Проводится численное исследование сходимости предложенной разностной схемы

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\tau}{h} \left[W_{k+1/2}^n - W_{k-1/2}^n \right], \quad k = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, \dots, N_t - 1; \quad (3)$$

$$W_{k\pm 1/2}^n = f(u_{k\pm 1/2}^n) - \frac{\tau}{2} g(u_{k\pm 1/2}^n) \nabla_h^\pm u_k^n, \quad u_{k\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} (u_{k\pm 1}^n + u_k^n), \quad (4)$$

$$\nabla_h^+ u_k^n = \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h}, \quad \nabla_h^- u_k^n = \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h}.$$

с начальным и граничным условиями:

$$u_k^0 = \psi(x_k), \quad k = 0, \dots, N_x; \quad (5)$$

$$u_0^n = \varphi(t_n), \quad n = 0, \dots, N_t; \quad u_{N_x}^n = u_{N_x-1}^n, \quad n = 0, \dots, N_t.$$

С применением этой схемы представлены расчеты ряда известных тестовых задач.

Для построенной разностной схемы (3)-(5), получена априорная оценка в виде утверждения.

Утверждение 1. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условия $0 < \gamma \leq 1$ решение разностной схемы (3)-(5) для любого $n \geq 0$ удовлетворяет априорной оценке

$$\|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}. \quad (6)$$

Исходя из этого утверждения, необходимо ввести искусственную вязкость в виде

$$M_h[\mu_k^n, u_k^n] = \frac{1}{h} \left[\mu_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - \mu_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n \right] \quad (7)$$

Тогда схема примет вид

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\tau}{h} \left[W_{k+1/2}^n - W_{k-1/2}^n \right] + \frac{\tau}{2} M_h[\mu_k^n, u_k^n] \quad (8)$$

или

$$u_k^{n+1} = A_k u_{k-1}^n + C_k u_k^n + B_k u_{k+1}^n, \quad (9)$$

где

$$A_k = \frac{\gamma}{2} \left(\gamma p_{k-1/2}^2 + p_k + q_{k-1/2} \right), \quad B_k = \frac{\gamma}{2} \left(\gamma p_{k+1/2}^2 - p_k + q_{k+1/2} \right),$$

$$C_k = \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} \left(p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2 \right) - \frac{\gamma}{2} \left(q_{k-1/2} + q_{k+1/2} \right) \right), \quad q_{k\pm 1/2} \equiv \frac{\mu_{k\pm 1/2}^n}{ah}.$$

Для модифицированной схемы (9) также получена априорная оценка.

Утверждение 2. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условия

$$0 < \gamma \leq \gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{4\gamma} \leq q \leq \frac{1-\gamma^2}{\gamma} \quad (10)$$

решение разностной схемы (9), (3)-(5), (7) с постоянной искусственной вязкостью для любого $n \geq 0$ удовлетворяет априорной оценке

$$\|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}.$$

Также приводится доказательство устойчивости и доказывається порядок аппроксимации.

Утверждение 3. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условий (10) разностная схема (9), (6)-(8) с постоянной адаптивной искусственной вязкостью будет устойчивой по начальным и граничным данным.

Утверждение 4. При условии ограниченности производных $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условий $0 < \gamma \leq \frac{1}{2},$

$$\frac{1}{4\gamma} \leq q \leq \frac{1-\gamma-\gamma^2}{\gamma}, \quad \frac{1}{4\gamma} \leq \alpha h^{p-1} \leq \frac{1-\gamma-\gamma^2}{\gamma}, \quad 0 < h \leq h_0 < 0.5, \quad 0 < \gamma \leq \gamma_0 < C_0^{-1}$$

разностная схема (9), (3)-(5), (7) с постоянной искусственной вязкостью $\mu = \alpha ah^p, \quad p \geq 1,$ будет сходиться в сеточной норме $C(\bar{\omega}_x) \times C(\bar{\omega}_t)$ к точному решению дифференциальной задачи с порядком $O(\tau^2 + h^q),$ где $q = \min(p, 2).$

В п. 1.3. предлагается разностная схема для решения многомерного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. Приводится последовательность построения разностной схемы, аппроксимация потоков, способ монотонизации предложенной разностной схемы и этапы

расчёта. В завершение приводятся результаты численных расчетов для различных тестовых задач.

Приведем из диссертации результаты расчетов по трем разностным схемам при различной аппроксимации пространственной переменной рис. 1:

- 1) «левый уголок» - красный цвет;
- 2) центрально-разностная – светло зеленый цвет;
- 3) «правый уголок» - синий цвет;
- 4) точное решение – цвет хаки.

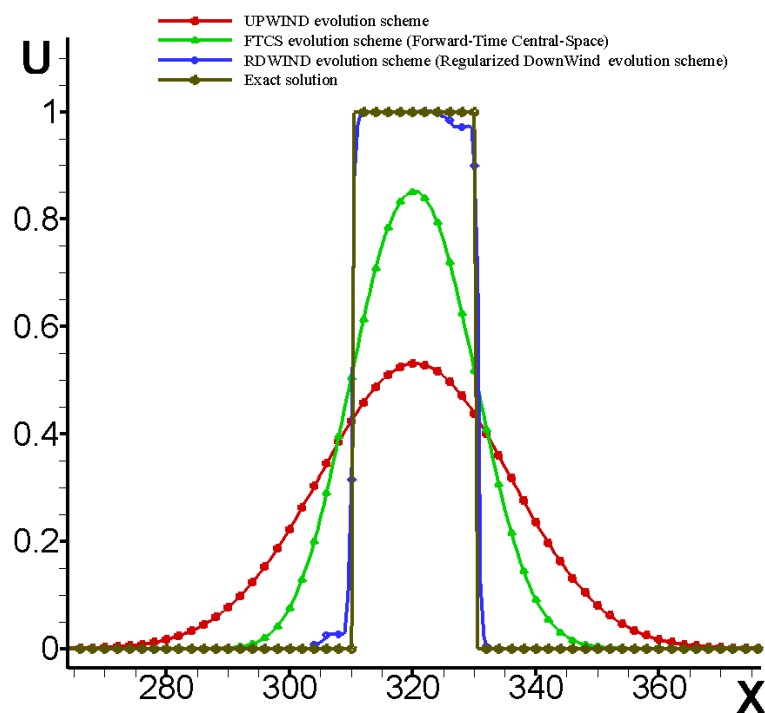


Рис. 1

Во **второй главе** излагается метод адаптивной искусственной вязкости для решения одномерных уравнений газовой динамики. В этой главе подробно излагается способ построения разностной схемы с учетом поправок Лакса-Вендроффа, которые дают второй порядок аппроксимации по времени. Подробно излагается алгоритм введения и определения искусственной вязкости, определены ограничения на число Куранта. Далее приводятся неравенства для определения областей введения искусственной вязкости и этапы решения одномерных задач газовой динамики, так как метод АИВ относится к «предикторно-корректорным» методам. Также в этой главе

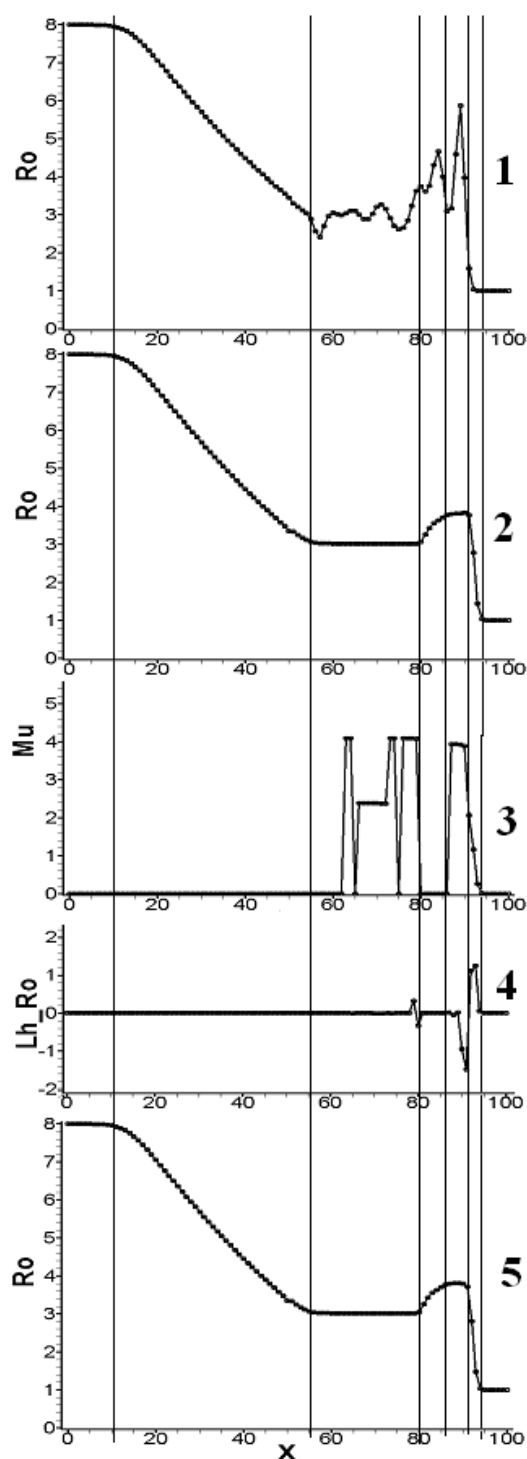
приводятся решения тестовых задач и их сравнение с современными численными методами, в частности с методом WENO5.

Приведем пример расчета задачи о распаде разрыва при большом начальном скачке плотности и давления без введения искусственной вязкости и с введением адаптивной искусственной вязкости рис. 2.

$$\rho_L = 8 \quad \rho_R = 1 \quad \gamma = \frac{5}{3} \quad x_0 = 50 \quad h = 1 \quad L = 100$$

$$u_L = 0 \quad u_R = 0 \quad Ku = 0.3 \quad Time = 4.5$$

$$E_L = 60 \quad E_R = 1$$



1-решение по явной разностной схеме с поправками Лакса-Вендроффа без искусственной вязкости

2 - предикторное решение с малыми осцилляциями

3 - искусственная вязкость

4- диссипативные слагаемые, содержащие только искусственную вязкость

5 - корректорное решение

Рис. 2

Материалы этой главы также можно прочитать в монографии И.В. Попов, И.В. Фрязинов «Метод адаптивной искусственной вязкости численного

решения уравнений газовой динамики». В этой же монографии приводятся численные расчеты на ортогональной сетке в трехмерном случае.

В третьей главе представлен метод адаптивной искусственной вязкости для решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. В ней подробно излагаются требования, накладываемые на треугольную неструктурированную сетку, которую автор строит по собственному методу, опубликованному в статье И.В. Попов, С.В. Поляков, “Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей”, *Матем. моделирование*, **14:6** (2002), стр. 25–35. В этой главе приводится аппроксимация по времени, операторов дивергенции и градиента и на их основе проводится аппроксимация уравнений газовой динамики. Выводятся неравенства для искусственной вязкости и дается способ определения областей, занятых ударными волнами (волной сжатия), контактными разрывами, волнами разрежения и осцилляциями, имеющими сеточную природу. В завершение приводятся численные эксперименты для ряда тестовых задач и их сравнение с методом WENO5, которые проводились на ортогональной сетке, с тем же числом расчетных ячеек.

Приведем сравнения для двух тестов по методу WENO5 и АИВ.

Расчётная область представляла собой единичный квадрат, разбитый на четыре равных квадрата. Значения функций плотности, скоростей, давления и времени расчета в каждом квадрате приведены в таблице ниже.

$\rho_1 \quad \vec{v}_1 \quad p_1 \quad E_1$	$\rho_2 \quad \vec{v}_2 \quad p_2 \quad E_2$
$\rho_3 \quad \vec{v}_3 \quad p_3 \quad E_3$	$\rho_4 \quad \vec{v}_4 \quad p_4 \quad E_4$

Таблица №1

Тест №	Номер области	ρ	u	v	p	T
6	1	2.0	0.75	0.5	1.0	0.3
	2	1.0	0.75	-0.5	1.0	
	3	1.0	-0.75	0.5	1.0	
	4	3.0	-0.75	-0.5	1.0	
15	1	0.5197	-0.6259	-0.3	0.4	0.2
	2	1.0	0.1	-0.3	1.0	
	3	0.8	0.1	-0.3	0.4	
	4	0.5313	0.1	0.4276	0.4	

Первый тест №6. Контактные разрывы вращаются по часовой стрелке вокруг центра квадрата. На рис. 3 и 4 приведены расчеты теста № 6 на ортогональных сетках с числом расчётных узлов 160000 соответственно по методу WENO5 и по методу АИВ. На рис. 5 приведен расчёт на треугольной сетки с числом расчётных узлов 176316. На треугольных сетках неустойчивость контактного разрыва проявляется сильнее. Чтобы выяснить, от чего возникает эта неустойчивость, связано ли её возникновение с неструктурированностью сетки, был проведён расчёт на подробной ортогональной сетке с числом узлов 16000000. Этот расчёт приведён на рис. 6. Он свидетельствует о неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Такая же гофрировочная неустойчивость наблюдается в подобных ситуациях на ударных волнах. Наличие неустойчивости вдоль разрывов описано в книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица Гидродинамика. Издание четвёртое. Москва.: Наука. 1988. 733с.

Метод WENO5 сетка 400x400

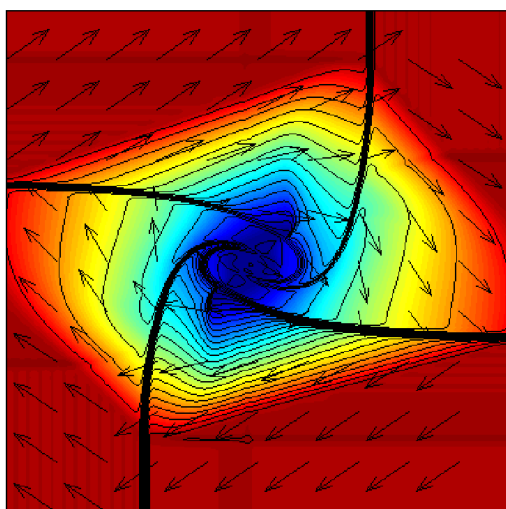


Рис. 3

Метод АИВ сетка 400x400

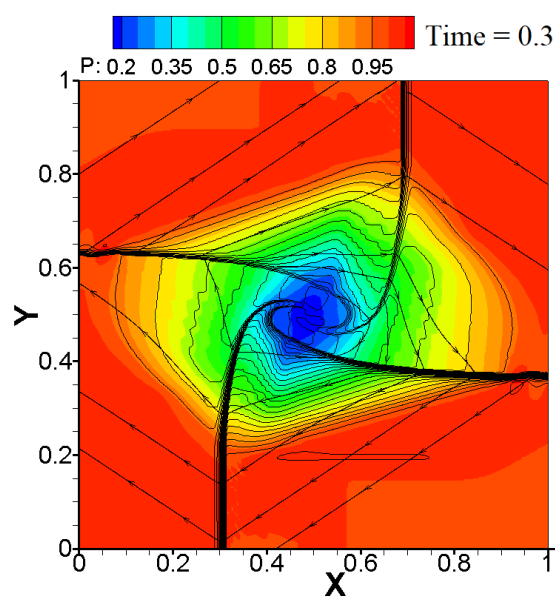
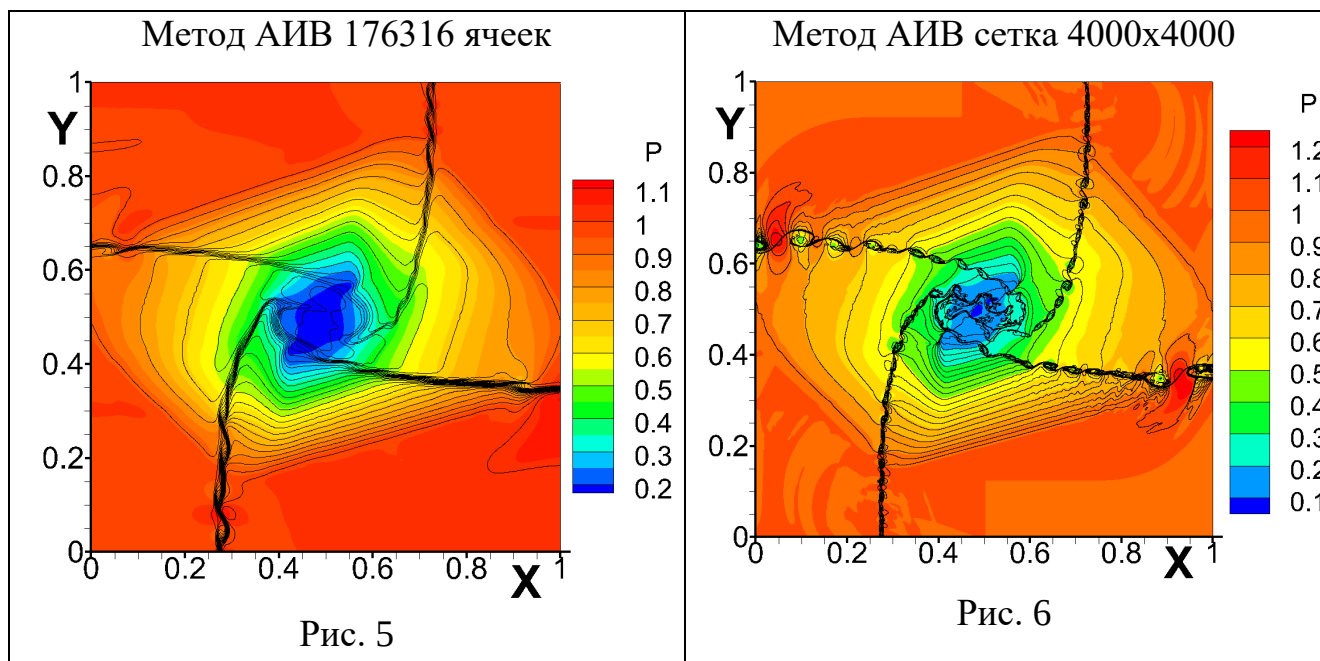
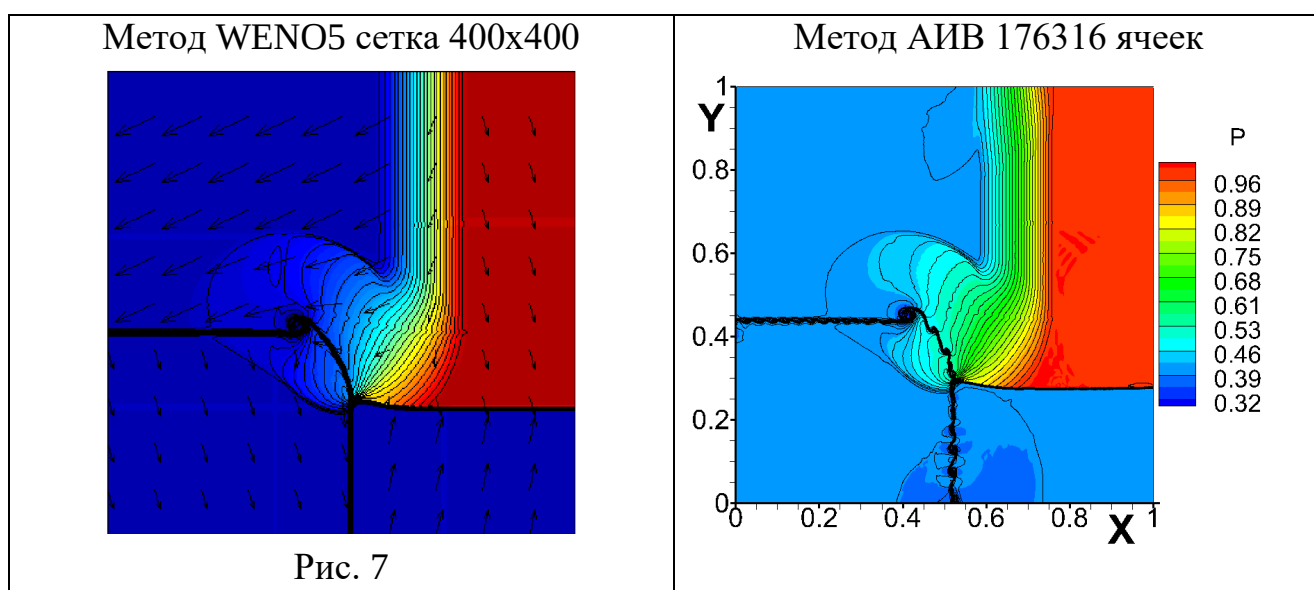
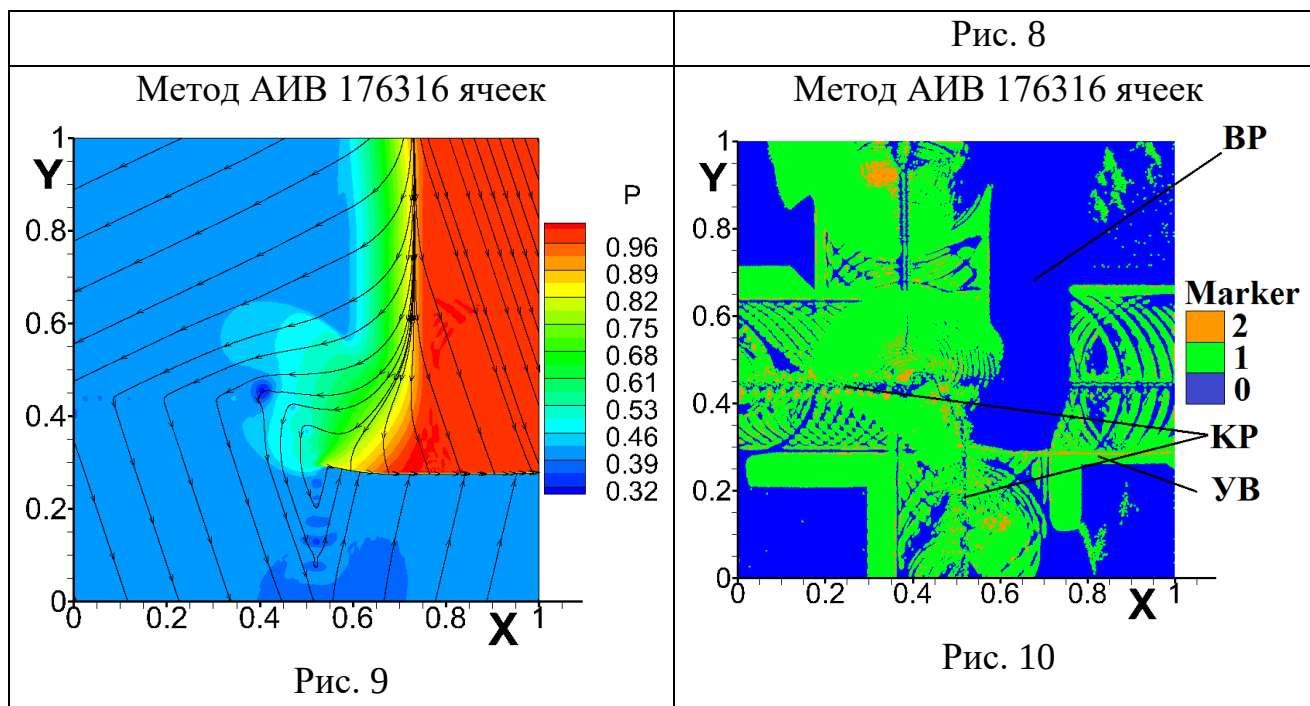


Рис. 4



Второй тест №15. Начальные данные для этого теста приведены в таблице №1. В этом тесте наблюдаются два контактных разрыва, одна ударная волна и волна разряжения. На рис. 7 по методе WENO5 и рис. 8 и 9 по методу АИВ, здесь так же, как и на предыдущих рисунках, давление - цвет, а линии - линии уровней плотности и линии со стрелками - направления движения вещества. Для этого теста приведен также рисунок 10, на котором показано, как вводится искусственная вязкость: метка «0» искусственная вязкость не вводится, как во всей области так и на контактных разрывах (КР) и волне разряжения (ВР), «1» - минимальная вязкость на ударной волне (УВ) и «2» - максимальная вязкость на осцилляциях сеточной природы (ОСЦ) (см. рис 10).





В **четвертой** главе представлен численный метод решения двумерных задач вязкого сжимаемого газа на основе уравнений Навье-Стокса с введением адаптивной искусственной вязкости. Предложенный метод реализован для областей общего вида на треугольных сетках. За основу численного метода взят метод адаптивной искусственной вязкости, который обеспечивает монотонность решения, даже в случае наличия ударных волн. Искусственная вязкость, вводимая в разностную схему, сконструирована таким образом, чтобы она отсутствовала в пограничном слое, где действует динамическая вязкость. Искусственная вязкость находится из условий выполнения принципа максимума. Приводится серия расчётов внешнего обтекания цилиндра для различных чисел Рейнольдса и Маха, течение газа в плоском канале и др. Приведем в качестве примера работы комплекса программ для системы уравнений Навье-Стокса решение задачи «обтекание вязким потоком газа кругового цилиндра при различных значениях числа Рейнольдса». Тем самым исследуется вопрос, как предложенная методика работает при различных режимах течения. Для всех приведенных расчётов была взята неструктурированная треугольная сетка с числом узлов 151840 и числом расчётных элементов (треугольников) 301530. Сетка была адаптирована

к поверхности цилиндра, радиус цилиндра равен единице. В начальный момент времени плотность $\rho=1$, горизонтальная компонента скорости во всей области $v_x=1$, а вертикальная равнялась нулю. Давление рассчитывалось по формуле $p = \frac{1}{\gamma M^2}$, $\gamma = \frac{7}{5}$, число Маха $M = 0.2$, число Прандтля $Pr = 0.7$.

Все приведённые здесь величины являются безразмерными. Число Куранта бралось таким, чтобы обеспечить условие устойчивости. Расчёты проводились при следующих значениях числа Рейнольдса:

1) $Re = 20$ - первая стадия неустойчивости $1 < Re < 40$.

а) $Re = 50$ и б) $Re = 100$ - вторая стадия неустойчивости $Re > 40$, когда течение газа становится периодическим и образуется вихревая дорожка Кармана.

2) $Re > 10^3$ – диапазон, в котором развивается турбулентное течение;

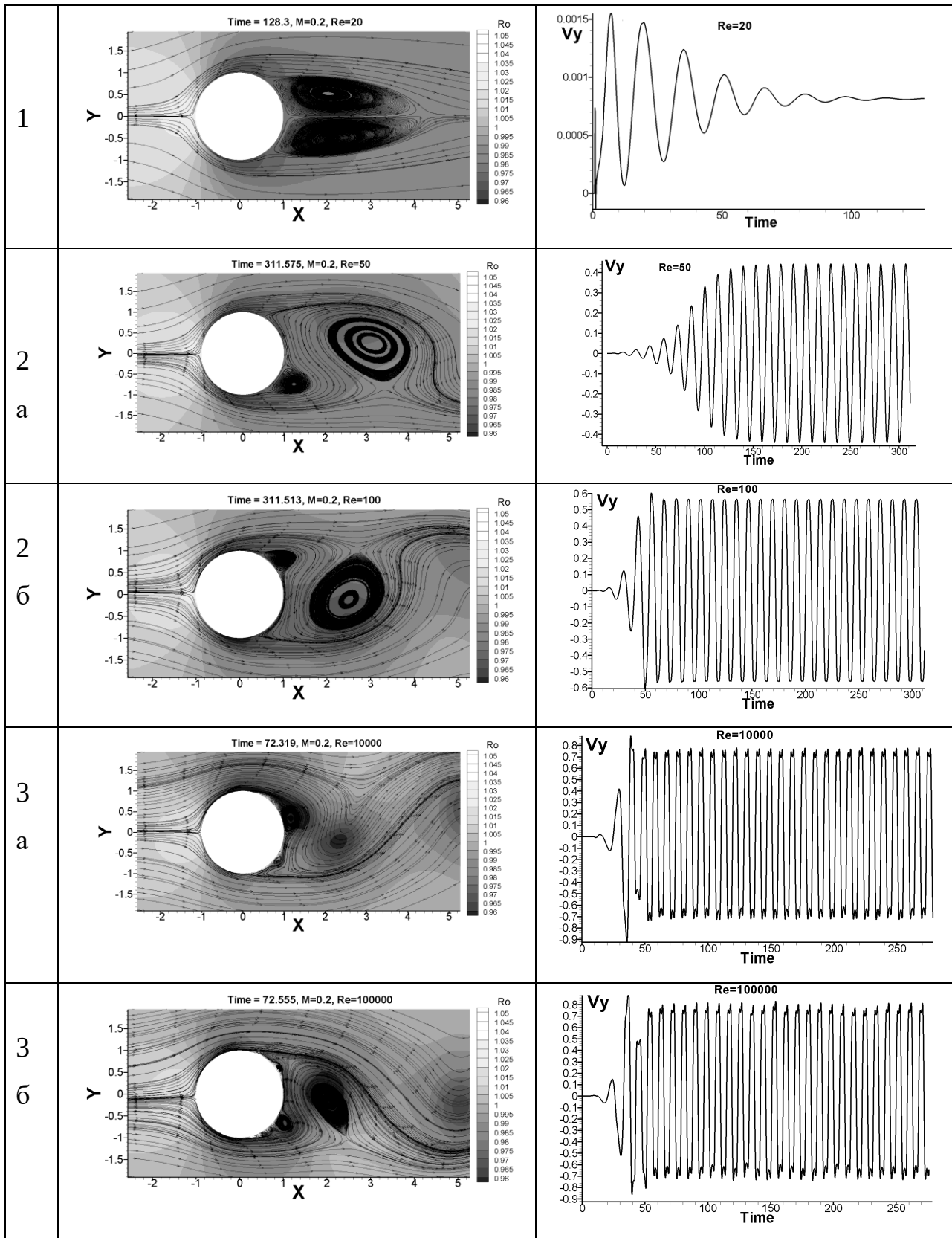
а) $Re = 10^4$ - течение газа становится нерегулярным;

б) $Re = 10^5$ - турбулентная область достигает поверхности цилиндра;

в) $Re = 10^6$ - стохастические значения плотности и скорости вокруг всего цилиндра.

Результаты расчётов приведены на рис. 11 для соответствующих значений числа Рейнольдса. На рисунках «а» серым цветом изображается плотность, а линиями со стрелками - линии течения потока газа. На рисунках «б» приводится амплитуда изменения вертикальной компоненты скорости (перпендикулярной начальному потоку газа) в зависимости от времени. Точка, в которой рассчитывалась вертикальная компонента скорости, находилась вблизи оси симметрии цилиндра с координатами (6.4, 0). Из численного эксперимента видно, что предложенная методика качественно передает различные стадии течения потока вязкого газа при различных числах Рейнольдса.

№	а	б
---	---	---



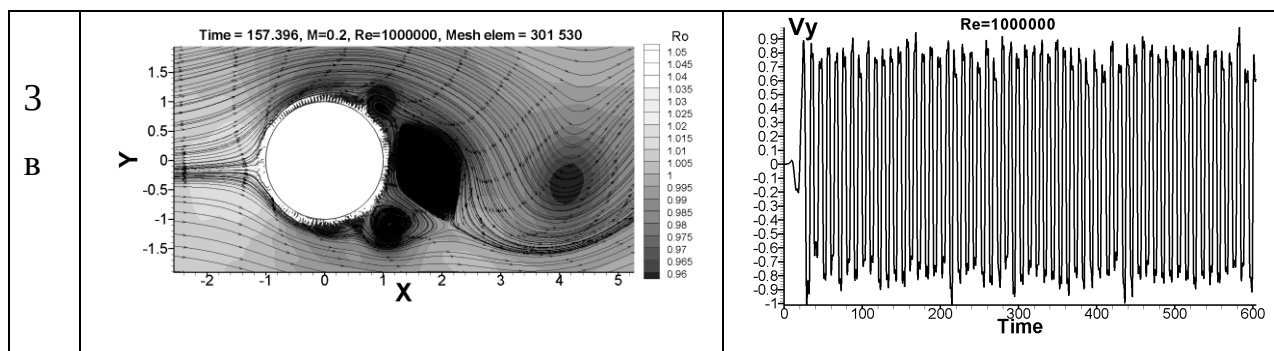


Рис. 11

Также в этой главе проводилось сравнение с результатами, полученными по явной разностной схеме, основанной на квазигазодинамической (КГД) системе уравнений, опубликованной в работах Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. – Тверь, Тверской Гос. Ун-т, 2000 г., 400 с. Широков И.А., Елизарова Т.Г. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в слое вязкого сжимаемого газа // Прикладная математика и информатика. № 42, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2013 г., с. 30-53.

Пятая глава посвящена рассмотрению трех практических задач.

Первая задача связана с двухфазной фильтрацией. Представленные расчеты по данной методике лучше передают адаптивные свойства решения вблизи скважин с резкой депрессией решения по сравнению со схемами первого порядка точности.

Вторая рассмотренная задача - это численное моделирование неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Рассматриваемая задача решалась на неструктурированных треугольных сетках, где начальная контактная граница двух сред моделировалась ломаной линией. Неустойчивость Рихтмайера - Мешкова (НРМ) возникает при падении ударной волны на контактную границу между газами, в профиль которой внесено возмущение. Имеется ряд работ, в которых приведены результаты экспериментального исследования развития НРМ. В экспериментах использовалась ударная труба, заполненная двумя различными газами: легким (Аг или Не) и тяжелым (Хе). В

начальный момент времени из легкого газа в тяжелый начинала двигаться ударная волна (число Маха $УВ$ в разных вариантах менялось в пределах $2.5 < M < 3.5$). Использование метода АИВ позволило не использовать уравнение концентрации газов, так как контактный разрыв размазывался за все время расчета максимум на три ячейки. Результаты расчетов, полученные по методу АИВ, хорошо согласуются с экспериментами и другими численными методиками.

Третья задача посвящена исследованию отражения ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны. В этой задаче метод АИВ сравнивался с методом Годунова в его классической форме (первого порядка точности) и методом Бабенко–Русанова, а также с экспериментальными данными. Расчеты, полученные по методу АИВ, хорошо согласуются с экспериментальными данными не только качественно, но и количественно (это касается таких параметров, как величина углового сектора, в котором наблюдается излучение, и угол наклона излученных волн к поверхности струи).

Комплекс программ, написанных на основе метода АИВ для всех задач, приведенных в этой главе, показал свою работоспособность, простоту использования, автономность и высокую точность получаемых численных результатов.

В заключении сформулированы положения диссертации, которые выносятся на защиту:

В списке литературы перечислены материалы, использованные при написании диссертации.

В списке работ по теме диссертации приводятся работы соискателя по теме диссертации.

В списке публикаций автора по теме диссертации в журналах и изданиях, включенных в Перечень ВАК, RSCI или в одну из баз данных и систем цитирования Web Of Science, Scopus

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. На примере линейного и нелинейного уравнений переноса теоретически исследована аппроксимация и доказана устойчивость разностных схем для метода АИВ.
2. Разработан метод АИВ для численного решения задач газовой динамики, найден диапазон изменения коэффициента искусственной вязкости. Разработан алгоритм введения адаптивной искусственной вязкости в задачах с различными типами разрывов.
3. Разработан метод АИВ для численного решения уравнений Навье-Стокса на структурированных и неструктурированных сетках, получена величина коэффициента искусственной вязкости.
4. Проведена верификация метода АИВ на известных тестовых задачах и выполнено сравнение метода АИВ с другими известными численными методами. Он прост в реализации, экономичен с вычислительной точки зрения, не требует решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва.
5. Результаты, полученные по методу АИВ, подтвердили хорошее совпадение с результатами других современных методов.
6. Созданы комплексы программ для решения задач вычислительной гидродинамики на основе уравнений Эйлера и уравнений Навье-Стокса с использованием метода АИВ.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- 1) Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости. Письма в ЭЧАЯ. 2011, Т.8, №5(168) С. 817-822 (Компьютерные технологии в физике)

- Popov I.V., Fryazinov I.V. Method of adaptive artificial viscosity. (2011) Physics of Particles and Nuclei Letters, 2011, 8 (5), pp. 487-490.
- 2) Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностные методы решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2008, 20(8), с. 48-60. I. V. Popov, I.V. Fryazinov. Finite-Difference Method for Solving Gas Dynamics Equations Using Adaptive Artificial Viscosity. Mathematical Models and Computer Simulations, 2009, V1, № 4, pp. 493-502
- 3) Попов И.В., Фрязинов И.В. Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах. Математическое моделирование, 2010, 22(1), с. 32-45.
- 4) Попов И.В., Фрязинов И.В. Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах. Математическое моделирование, 2010, 22(1), с. 32-45.
Popov I.V., Fryazinov I.V. Adaptive artificial viscosity for multidimensional gas dynamics for Euler variables in Cartesian coordinates. Mathematical Models and Computer Simulations, 2010, 2 (4), pp. 429-442.
- 5) Popov I. V., Fryazinov I. V. Finite Difference Method for Two-dimensional Equations of Gas Dynamics Using Artificial Viscosity. Numerical Analysis and Its Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009, pp.469-475
- 6) Попов И.В., Фрязинов И.В. Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(5), 57-66
Popov I.V., Fryazinov I.V. Calculations of two-dimensional test problems by the method of adaptive viscosity. Mathematical Models and Computer Simulations, 2010, 2 (6), pp. 724-732.
- 7) Попов И.В., Фрязинов И.В. О новом выборе адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(12), 23-32.
Popov I.V., Fryazinov I.V. On the new choice of adaptive artificial viscosity. (2011) Mathematical Models and Computer Simulations, 3 (4), pp. 411-418.

- 8) Попов И.В., Фрязинов И.В. О методе адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2010, 22(7), 121-128.
Popov I.V., Fryazinov I.V. A method of adaptive artificial viscosity. (2011) Mathematical Models and Computer Simulations, 3 (1), pp. 18-24.
- 9) Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностный метод решения трехмерных уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2011, 23(3), 89-100.
Popov I.V., Fryazinov I.V. Finite-difference method for computation of 3-D gas dynamics equations with artificial viscosity. Mathematical Models and Computer Simulations, 2011, 3 (5), pp. 587-595.
- 10) Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках. Математическое моделирование. 2012, 24(6), 109-127.
Popov I.V., Fryazinov I.V. Method of adaptive artificial viscosity for gas dynamics equations on triangular and tetrahedral grids. Mathematical Models and Computer Simulations, 2013, 5 (1), pp. 50-62.
- 11) Бочарова О.Б, Лебедев М.Г., Попов И.В., Ситник В.В., Фрязинов И.В. Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны. // Математическое моделирование. 2013, 25(8), 33-127.
Bocharova O.B., Levedev M.G., Popov I.V., Sitnik V.V., Fryazinov I.V. Shock wave reflection from the axis of symmetry in a nonuniform flow with the formation of a circulatory flow zone. Mathematical Models and Computer Simulations, 2014, 6 (2), pp. 142-154.
- 12) Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках. // Вестник российского университета дружбы народов. Серия: Математика, Информатика, Физика. 2014, №2, 230-233.

- 13) Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. // М., «КРАСАНД», 2014. – 288 с., 18 п.л.
- 14) Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для решения системы уравнений Навье–Стокса, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, 55:8, с. 1356–1362;
Popov I.V., Fryazinov I.V. Method of adaptive artificial viscosity for solving the Navier–Stokes equations, Comput. Math. Math. Phys., 55:8 (2015), 1324–1329
- 15) Попов И.В., Тимофеева Ю.Е. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 039, 25 стр.
- 16) Попов И.В., Тимофеева Ю.Е. Многомерные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 042, 28 стр.
- 17) Попов И.В. Численный метод с адаптивной искусственной вязкостью решения уравнений Навье–Стокса, Матем. моделирование, 28:12 (2016), 122–132; I. V. Popov, Numerical methods with adaptive artificial viscosity for solving of the Navier–Stokes equations, Math. Models Comput. Simul., 9:4 (2017), 489–497
- 18) Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 068, 21 стр.
- 19) Попов И.В., Повещенко Ю.А., Поляков С. В., Рагимли П.И. Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017, 069, 12 стр.

- 20) Попов И.В. Конечно-разностный метод стабилизации решения уравнения переноса для неустойчивой схемы. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 990. Popov I.V Finite-difference method for the stabilization of the solution of the transport equation for an unstable difference scheme. Differential Equations. 2016. Т. 52. № 7. С. 951-961.
- 21) Попов И.В., Поляков С.В. Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей. Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 6. С. 25.
- 22) Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задач о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Математическое моделирование. 1995. Т. 7. С. 1525.
- 23) Popov I., Sukov S. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems. В сборнике: EPJ Web of Conferences 9. Сер. "Mathematical Modeling and Computational Physics 2017, MMCP 2017" 2018. С. 03020.
- 24) Попов И.В. Разностная схема для решения многомерного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. Mathematica Montisnigri. Vol XXXIV (2015) с. 60-85
- 25) Попов И.В., “Метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения гиперболических уравнений и систем”, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2020, 034, 18 стр.
- 26) Popov I.V. On Monotonic Finite Difference Schemes. (2020) Mathematical Models and Computer Simulations, 12 (2), pp. 195-209.
- 27) Poveshchenko Y.A., Podryga V.O., Popov I.V., Popov S.B., Rahimly P.I., Kazakevich G.I. Numerical simulation in problems with dissociation of gas hydrates in a porous medium in one-dimensional formulation. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2019, 161 (2), pp. 205-229.
- 28) Popov I.V., Poveshchenko Y.A., Polyakov S.V. Construction of Higher-Order Approximation Difference Scheme for Nonlinear Convection-Diffusion

- Equation Using Adaptive Artificial Viscosity in Case of Two-Phase Filtering Problems. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2019, 11386 LNCS, pp. 395-402.
- 29) Popov I.V. Finite-difference method for solution of advection equation by unstable schemes. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2017, 10187 LNCS, pp. 559-567.
 - 30) Milyukova O.Y., Popov I.V. Some parallel iterative methods for solving elliptical equations on tetrahedral grids. (2010) Mathematical Models and Computer Simulations, 2 (4), pp. 453-469.
 - 31) Попов И.В., Фрязинов И.В. Конечно-разностные методы решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости. Математическое моделирование, 2008, 20(8), с. 48-60.
 Popov I.V., Fryazinov I.V. Finite-difference method for solving gas dynamics equations using adaptive artificial viscosity. (2009) Mathematical Models and Computer Simulations, 1 (4), pp. 493-502.
 - 32) Popov I.V., Fryazinov I.V. Finite difference method for two-dimensional equations of gas dynamics using artificial viscosity. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2009, 5434 LNCS, pp. 469-475.
 - 33) Popov I.V., Fryazinov I.V., Stanichenko M.Yu., Taimanov A.V. Construction of a difference scheme for Navier-Stokes equations on unstructured grids. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2008, 23 (5), pp. 487-503.
 - 34) Popov, I.V., Fryazinov, I.V., Stanichenko, M.Y., Taimanov, A.V.
 Difference schemes on triangular and tetrahedral grids for Navier-Stokes equations of incompressible fluid. Mathematical Models and Computer Simulations. 2010, 2 (3), pp. 281-292.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

в журналах и изданиях, включенных в Перечень ВАК, RSCI

или в одну из баз данных и систем цитирования Web Of Science, Scopus

1. Popov I.V. On Monotonic Finite Difference Schemes. (2020) Mathematical Models and Computer Simulations, 12 (2), pp. 195-209.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85083155981&doi=10.1134%2fS207004822002012X&partnerID=40&md5=af0a47c58e31482a93592c4d412a5238>

DOI: 10.1134/S207004822002012X

2. Poveshchenko Y.A., Podryga V.O., Popov I.V., Popov S.B., Rahimly P.I., Kazakevich G.I. Numerical simulation in problems with dissociation of gas hydrates in a porous medium in one-dimensional formulation. (2019) Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 161 (2), pp. 205-229.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85075205183&doi=10.26907%2f2541-7746.2019.2.205-229&partnerID=40&md5=b720ab2c99894dbd365cf8406e11ce1e>

DOI: 10.26907/2541-7746.2019.2.205-229

3. Popov I.V., Poveshchenko Y.A., Polyakov S.V. Construction of Higher-Order Approximation Difference Scheme for Nonlinear Convection-Diffusion Equation Using Adaptive Artificial Viscosity in Case of Two-Phase Filtering Problems. (2019) Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 11386 LNCS, pp. 395-402.

https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85066120691&doi=10.1007%2f978-3-030-11539-5_45&partnerID=40&md5=2201b716519b48812495d5dfbcf5ba0b

DOI: 10.1007/978-3-030-11539-5_45

4. Popov I., Sukov S. Modified Method of Adaptive Artificial Viscosity for Solution of Gas Dynamics Problems on Parallel Computer Systems. (2018) EPJ Web of Conferences, 173, статья № 03020, .

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85042357005&doi=10.1051%2fepjconf%2f201817303020&partnerID=40&md5=48150c3bc345d022053a98ccaf8279c2>

DOI: 10.1051/epjconf/201817303020

5. Popov I.V. Numerical Methods with Adaptive Artificial Viscosity for Solving Navier–Stokes Equations. (2017) Mathematical Models and Computer Simulations, 9 (4), pp. 489-497.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85024362694&doi=10.1134%2fS2070048217040111&partnerID=40&md5=233f36b3f8ffbfd4f3cfb1e61939477e>

DOI: 10.1134/S2070048217040111

6. Popov I.V. Finite-difference method for solution of advection equation by unstable schemes. (2017) Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 10187 LNCS, pp. 559-567.

https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85018384666&doi=10.1007%2f978-3-319-57099-0_63&partnerID=40&md5=0271f90a5f7bf23a8ac91424aa0388cf

DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0_63

7. Popov I.V. Finite-difference method for the stabilization of the solution of the transport equation for an unstable difference scheme. (2016) Differential Equations, 52 (7), pp. 951-961.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84981294555&doi=10.1134%2fS0012266116070132&partnerID=40&md5=a4124e829f67b2b3f8f0bacff94ac9d4>

DOI: 10.1134/S0012266116070132

8. Popov I.V., Fryazinov I.V. Method of adaptive artificial viscosity for solving the Navier–Stokes equations. (2015) Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55 (8), pp. 1324-1329.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84940192180&doi=10.1134%2fS096554251508014X&partnerID=40&md5=f26555b82212b5db3002047faeffff53>

DOI: 10.1134/S096554251508014X

9. Bocharova O.B., Levedev M.G., Popov I.V., Sitnik V.V., Fryazinov I.V. Shock wave reflection from the axis of symmetry in a nonuniform flow with the formation of a circulatory flow zone. (2014) Mathematical Models and Computer Simulations, 6 (2), pp. 142-154.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84925944564&doi=10.1134%2fS2070048214020033&partnerID=40&md5=37d145075d07e04d5c8cfc00e56f821c>

DOI: 10.1134/S2070048214020033

10. Popov I.V., Fryazinov I.V. Method of adaptive artificial viscosity for gas dynamics equations on triangular and tetrahedral grids. (2013) Mathematical Models and Computer Simulations, 5 (1), pp. 50-62.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84928992357&doi=10.1134%2fS2070048213010080&partnerID=40&md5=b5dd340dac0fcdad01035e944faef4f5>

DOI: 10.1134/S2070048213010080

11. Popov I.V., Fryazinov I.V. Finite-difference method for computation of 3-D gas dynamics equations with artificial viscosity. (2011) Mathematical Models and Computer Simulations, 3 (5), pp. 587-595.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84928990332&doi=10.1134%2fS2070048211050103&partnerID=40&md5=9dd5464ef352da9ad1330948fd7dd687>

DOI: 10.1134/S2070048211050103

12. Popov I.V., Fryazinov I.V. Method of adaptive artificial viscosity. (2011) Physics of Particles and Nuclei Letters, 8 (5), pp. 487-490.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-80052854095&doi=10.1134%2fS1547477111050153&partnerID=40&md5=e4bb8a7a011fb0486c62ec014c137d7a>

DOI: 10.1134/S1547477111050153

13. Popov I.V., Fryazinov I.V. On the new choice of adaptive artificial viscosity. (2011) Mathematical Models and Computer Simulations, 3 (4), pp. 411-418.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84928989681&doi=10.1134%2fS2070048211040089&partnerID=40&md5=2ea40004d12edfd0bbf5a5ae7ef8cf45>

DOI: 10.1134/S2070048211040089

14. Popov I.V., Fryazinov I.V. A method of adaptive artificial viscosity. (2011) Mathematical Models and Computer Simulations, 3 (1), pp. 18-24.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84929080334&doi=10.1134%2fS2070048211010108&partnerID=40&md5=1876252eb0e4c8201d6af6a251e6bf4a>

DOI: 10.1134/S2070048211010108

15. Popov I.V., Fryazinov I.V. Calculations of two-dimensional test problems by the method of adaptive viscosity. (2010) Mathematical Models and Computer Simulations, 2 (6), pp. 724-732.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84925941480&doi=10.1134%2fS2070048210060074&partnerID=40&md5=bc7ae39faf70ed0fea0959e85aa28f54>

DOI: 10.1134/S2070048210060074

16. Milyukova O.Y., Popov I.V. Some parallel iterative methods for solving elliptical equations on tetrahedral grids. (2010) Mathematical Models and Computer Simulations, 2 (4), pp. 453-469.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0->

84929092075&doi=10.1134%2fS2070048210040058&partnerID=40&md5=e8ad789280ac3e36895cf80067661f59

DOI: 10.1134/S2070048210040058

17. Popov I.V., Fryazinov I.V. Adaptive artificial viscosity for multidimensional gas dynamics for Euler variables in Cartesian coordinates. (2010) *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2 (4), pp. 429-442.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0->

84925944520&doi=10.1134%2fS2070048210040034&partnerID=40&md5=0a3f1bb6c6035b13d82e7a3cb7a92dc2

DOI: 10.1134/S2070048210040034

18. Popov I.V., Fryazinov I.V. Finite-difference method for solving gas dynamics equations using adaptive artificial viscosity. (2009) *Mathematical Models and Computer Simulations*, 1 (4), pp. 493-502.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0->

84929081269&doi=10.1134%2fS2070048209040073&partnerID=40&md5=a02a443d105f245aaef81766de17e481

DOI: 10.1134/S2070048209040073

19. Popov I.V., Fryazinov I.V. Finite difference method for two-dimensional equations of gas dynamics using artificial viscosity. (2009) *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 5434 LNCS, pp. 469-475.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0->

67650495107&doi=10.1007%2f978-3-642-00464-3_54&partnerID=40&md5=33a0fdceca89c41a5323a2ae925da3fa

DOI: 10.1007/978-3-642-00464-3_54

20. Popov I.V., Fryazinov I.V., Stanichenko M.Yu., Taimanov A.V. Construction of a difference scheme for Navier-Stokes equations on unstructured grids. (2008) *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 23 (5), pp. 487-503.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0->

56849123423&doi=10.1515%2fRJNAMM.2008.028&partnerID=40&md5=f56e3c9d1d1f1675010fab4dfb4265de

DOI: 10.1515/RJNAMM.2008.028

21. Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задач о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Математическое моделирование. 1995. Т. 7. С. 15-25. RSCI

22. Popov I.V., Fryazinov I.V., Stanichenko M.Y., Taimanov A.V.

Difference schemes on triangular and tetrahedral grids for Navier-Stokes equations of incompressible fluid

(2010) Mathematical Models and Computer Simulations, 2 (3), pp. 281-292.

<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0->

84929090309&doi=10.1134%2fS2070048210030026&partnerID=40&md5=1ba457eea32dbdb4dcffcc7668197c8b

DOI: 10.1134/S2070048210030026