МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

Комков Степан Алексеевич

Темпы роста произвольных конечных структур

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре математической теории интеллектуальных систем Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Научный руководитель: **Часовских Анатолий Александрович**
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Пантелеев Владимир Иннокентьевич,**
доктор физико-математических наук, доцент, Иркутский государственный университет, Институт математики и информационных технологий, кафедра алгебраических и информационных систем, заведующий кафедрой

Колпаков Роман Максимович,
доктор физико-математических наук, МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, кафедра дискретной математики, профессор

Алексиадис Никос Филиппович,
кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ», кафедра прикладной математики и искусственного интеллекта, доцент

Защита диссертации состоится 27 апреля 2022 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.05.01 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: vasenin@msu.ru

Диссертация находится на хранении в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27). С диссертацией в электронном виде и с информацией о регистрации участия в защите в удалённом интерактивном режиме можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»:
`https://istina.msu.ru/dissertations/444844810/`.

Автореферат разослан 24 марта 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.05.01, к.ф.-м.н. М. Кривчиков Кривчиков Максим Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию темпов роста произвольных конечных структур. В ходе выполнения работы найдены значения темпов роста всех двухэлементных структур, получен ряд утверждений о нетривиальных конечных структурах с минимальным возможным темпом роста, найден порядок темпов роста конечных структур со слабо ограниченным множеством операций и определены новые конечные структуры с экспоненциальным темпом роста.

Под *структурой* в диссертационной работе подразумевается множество элементов с заданным на нём множеством операций, где каждая операция ставит один элемент множества в соответствие фиксированному для этой операции числу элементов множества.

Рассмотрим декартову степень A^n, $n \in \mathbb{N}$, конечного множества A с заданным на нём множеством операций M. Элементы A^n будем называть *наборами*. Применяя операции из M к уже имеющимся наборам покоординатно, мы можем получать новые наборы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_1^m \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(a_1^1,\ldots,a_1^m) \\ \vdots \\ f(a_n^1,\ldots,a_n^m) \end{pmatrix}, \ f \in M.$$

Мы также можем получать новые наборы с помощью уже полученных наборов.

Множество наборов, из которого можно итеративно получить всё A^n, называют *генерирующим множеством для A^n по операциям из M*.

Темпом роста пары (A,M) называют функцию $d_{(A,M)}(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого n функция $d_{(A,M)}(n)$ равна числу наборов в минимальном генерирующем множестве для A^n по операциям из M. Таким образом, асимптотика темпа роста характеризует исчислимость заданного множества операций. Функцию $d_{(A,M)}(n)$ также обозначают через $d_F(n)$, где $F = (A,M)$.

Пример 1. *Пусть* $A = \{0,1\}$, $M = \{\neg\}$. *Тогда* $d_{(A,M)}(n) = 2^{n-1}$.

Пример 2. *Пусть* $A = \{0,1,2\}$, $M = \{+_{\mathrm{mod}\ 3}\}$. *Тогда* $d_{(A,M)}(n) = n$.

Актуальность изучения темпов роста произвольных конечных структур для практических задач была показана Хьюби Ченом[1] на основе подкванторной задачи удовлетворения ограничений (QCSP) и задачи удовлетворения ограничений (CSP).

[1] *Chen H.* Quantified constraint satisfaction and the polynomially generated powers property // International Colloquium on Automata, Languages, and Programming. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. — С. 197–208.

Задача CSP заключается в проверке истинности формулы

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \left(R_1(x_{i_1^1}, \ldots, x_{i_{t_1}^1}) \wedge \ldots \wedge R_p(x_{i_1^p}, \ldots, x_{i_{t_p}^p}) \right).$$

Здесь R_i, $1 \leqslant i \leqslant p$ — это предикаты, заданные на некотором конечном множестве A. Известно, что CSP является NP-полной задачей.

Несмотря на NP-сложность, существует большое количество методов и эвристик для решения задач CSP[2]. Это обусловлено тем, что на практике возникает множество задач удовлетворения ограничений.

Так, практическим примером задачи CSP является задача автоматического вывода типа данных компилятором. Вывод типов характерен для функциональных языков программирования, хотя со временем он был частично реализован и в объектно-ориентированных языках.

Другим практическим примером задачи удовлетворения ограничений является задача распределения регистров — размещение наиболее часто используемых переменных компилируемой программы в быстродействующих регистрах процессора. При этом две переменные не могут занимать один и тот же регистр одновременно.

Задача П2-QCSP является обобщением CSP следующего вида:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \left(\exists x_{m+1} \ldots \exists x_n \left(R_1(x_{i_1^1}, \ldots, x_{i_{t_1}^1}) \wedge \ldots \wedge R_p(x_{i_1^p}, \ldots, x_{i_{t_p}^p}) \right) \right). \quad (1)$$

Известно, что П2-QCSP является уже PSPACE-полной задачей[3].

На практике необходимость решать задачу П2-QCSP возникает, например, на производстве, когда необходимо гарантировать реализуемость продукта для всех возможных определённых заказчиком опций. Дополнительным примером возникновения задачи П2-QCSP на практике является задача планирования в условиях неопределённости, когда необходимо проверить осуществимость действия независимо от возможных событий.

Для решения задач подкванторного удовлетворения ограничений существует множество подходов. Часто они заключаются в обобщении подходов к решению задачи CSP[4].

Однако при определённых ограничениях можно напрямую свести задачу П2-QCSP к задаче CSP. Допустим, что среди предикатов формулы (1) могут встречаться не любые предикаты, а только предикаты из некоторого подмножества всех предикатов. С помощью соответствия Галуа[5] этому подмножеству предикатов можно сопоставить замкнутое множество операций

[2] *Tsang E.* Foundations of constraint satisfaction: the classic text. — Essex, UK: BoD–Books on Demand, 2014. — 444 с.

[3] *Chen H. M.* The computational complexity of quantified constraint satisfaction. — Cornell University, 2004. — 88 с.

[4] *Ferguson A., O'Sullivan B.* Quantified Constraint Satisfaction Problems: From Relaxations to Explanations // IJCAI. — 2007. — С. 74–79.

[5] *Бондарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для алгебр Поста I–II // Кибернетика. — 1969. — № 3.; № 5. — С. 1–10.; С. 1—9.

M на множестве A. В работе Хьюби Чена показано, что если темп роста пары (A,M) ограничен сверху полиномом и существует полиномиальный алгоритм построения генерирующего множества для A^n по операциям из M, то в этом случае задача П2-QCSP сводится к задаче CSP за полиномиальное время.

Приведённый результат доказывает важность изучения темпов роста произвольных конечных структур.

Первым изучение темпов роста начал Джеймс Уиголд. Он опубликовал цикл работ[6], в котором подробно исследованы возможные темпы роста конечных групп. Оказалось, что темп роста нетривиальной конечной совершенной группы по порядку совпадает с логарифмической функцией, а темп роста конечной несовершенной группы линеен.

Позже Джеймс Уиголд изучил возможные темпы роста конечных полугрупп[7]. Он доказал, что при наличии единичного элемента в нетривиальной конечной полугруппе задача о нахождении её темпа роста сводится к задаче нахождения темпа роста некоторой соответствующей группы. При отсутствии единичного элемента в полугруппе темп роста экспоненциален.

Изучены темпы роста других классических конечных алгебраических структур: колец, модулей, алгебр и алгебр Ли[8]. Оказалось, что темпы роста приведённых структур в нетривиальных случаях являются либо логарифмическими, либо линейными. Темпы роста линейны для несовершенных алгебр Ли, всех модулей, а также для колец и алгебр, в которых существует элемент непредставимый как произведение двух элементов. В остальных случаях темп роста логарифмический.

Несмотря на большое количество работ, посвящённых исследованию темпов роста конечных структур, до 2013-го года не были известны конечные структуры, для которых темп роста не был бы константным, логарифмическим, линейным или экспоненциальным. Начиная с 2013-го года Кис Кирн, Эмуэль Киш и Агнэш Сэндрэй публикуют цикл работ, где, в частности, показывают, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдётся конечное множество с заданным на нём множеством операций с темпом роста порядка n^m[9].

---

[6] *Wiegold J.* Growth sequences of finite groups I–III// Journal of the Australian Mathematical Society. — 1974.; 1975.; 1978. — Т. 17.; Т. 20.; Т. 25. — №. 2.; №. 2.; №. 2. — С. 133–141.; С. 225–229.; С. 142–144.

[7] *Wiegold J., Lausch H.* Growth sequences of finite semigroups // Journal of the Australian Mathematical Society. — 1987. — Т. 43. — №. 1. — С. 16–20.

[8] *Quick M., Ruškuc N.* Growth of generating sets for direct powers of classical algebraic structures // Journal of the Australian Mathematical Society. — 2010. — Т. 89. — №. 1. — С. 105–126.

[9] *Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á.* Growth rates of algebras, I: Pointed cube terms // Journal of the Australian Mathematical Society. — 2016. — Т. 101. — №. 1. — С. 56–94.

В остальных работах цикла[10] авторы обобщают критерии логарифмического, линейного и экспоненциального темпа роста на более широкие классы конечных алгебраических структур.

Позже Дмитрий Николаевич Жук показал, что темп роста произвольной конечной структуры либо ограничен сверху полиномиальной функцией, либо растёт быстрее чем некоторая экспоненциальная функция[11].

Известно, что темп роста структуры (A,M), где $|A| = k > 1$, не может быть меньше чем $\log_k n$.

Всё ещё открыт вопрос о существовании конечной структуры, для которой темп роста превосходит любую логарифмическую функцию, но не превосходит линейной функции.

Для темпа роста $d_F(n)$ можно определить двойственную функцию $h_F(m) = \max\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; d_F(n) \leqslant m\right\}$, для которой выполняется

$$d_F(n) \leqslant m \Leftrightarrow h_F(m) \geqslant n.$$

Приведённая функция не только полезна при изучении темпов роста, но и представляет самостоятельный интерес. Существует цикл работ, посвящённых этой функции, начинающийся в 1995-ом году[12].

Стоит отметить, что также изучают темпы роста бесконечных структур. Известны результаты для конечно порождённых групп[13], для других

---

[10] *Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á.* Growth rates of algebras, II: Wiegold dichotomy // International Journal of Algebra and Computation. — 2015. — Т. 25. — №. 04. — С. 555–566.

Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á. Growth rates of algebras, III: finite solvable algebras // Algebra universalis. — 2016. — Т. 76. — №. 2. — С. 199–222.

[11] *Zhuk D.* The size of generating sets of powers // Journal of Combinatorial Theory, Series A. — 2019. — Т. 167. — С. 91–103.

[12] *Erfanian A., Wiegold J.* A note on growth sequences of finite simple groups // Bulletin of the Australian Mathematical Society. — 1995. — Т. 51. — №. 3. — С. 495–499.

[13] *Wiegold J.* Growth sequences of finite groups // Journal of the Australian Mathematical Society. –– 1974. — Т. 17. — №. 2. — С. 133–141.

Wiegold J., Wilson J. S. Growth sequences of finitely generated groups // Archiv der Mathematik. — 1978. — Т. 30. — №. 1. — С. 337–343.

Lennox J. C., Wiegold J. Generators and killers for direct and free products // Archiv der Mathematik. — 1980. — Т. 34. — №. 1. — С. 296–300.

Stewart A. G. R., Wiegold J. Growth sequences of finitely generated groups II // Bulletin of the Australian Mathematical Society. — 1989. — Т. 40. — №. 2. — С. 323–329.

Erfanian A. A problem on growth sequences of groups // Journal of the Australian Mathematical Society. — 1995. — Т. 59. — №. 2. — С. 283–286.

конечно порождённых алгебраических структур[14], для бесконечных полугрупп[15]. Принципиальное отличие темпов роста бесконечных структур заключается в том, что темп роста бесконечной структуры может равняться бесконечности или быть ограничен константной даже в нетривиальном случае.

Пример 3. $d_{(\mathbb{N},\{+\})}(1) = 1$, $d_{(\mathbb{N},\{+\})}(n) = \infty$, $n \geqslant 2$.

Пример 4. [16] *Пусть F — бесконечная конечно порождённая простая группа. Тогда $d_F(n) \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$, для некоторого C.*

Для изучения темпов роста в настоящей диссертационной работе применён аппарат, выходящий за рамки алгебраических методов: конечное множество с заданным на нём множеством операций рассматривается как k-значная логика и некоторое множество операций k-значной логики. Например, конечную группу F порядка k можно без утери общности рассматривать как пару $(E_k,\{\circ\})$, где $\circ$ — бинарная операция.

Доказано, что при замене множества операций M на его замыкание по операциям суперпозиции[17] $[M]$ темп роста полученной пары $(E_k,[M])$ равен темпу роста пары (E_k,M).

Приведённый факт позволяет использовать результат Эмиля Леона Поста, построившего решётку всех замкнутых по операциям суперпозиции классов функций булевой логики[18]. Этот результат, известный как решётка Поста, позволяет определить темпы роста всех возможных двухэлементных структур.

Известно, что для предикатов с заданной конечной областью определения существует такой алгебраический оператор замыкания, что порождённая им решётка замкнутых множеств предикатов антиизоморфна

---

[14] *Quick M., Ruškuc N.* Growth of generating sets for direct powers of classical algebraic structures // Journal of the Australian Mathematical Society. — 2010. — Т. 89. — №. 1. — С. 105–126.

Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á. Growth rates of algebras, I: Pointed cube terms // Journal of the Australian Mathematical Society. — 2016. — Т. 101. — №. 1. — С. 56–94.

Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á. Growth rates of algebras, II: Wiegold dichotomy // International Journal of Algebra and Computation. — 2015. — Т. 25. — №. 04. — С. 555–566.

Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á. Growth rates of algebras, III: finite solvable algebras // Algebra universalis. — 2016. — Т. 76. — №. 2. — С. 199–222.

[15] *Hyde J. T. et al.* On the growth of generating sets for direct powers of semigroups // Semigroup Forum. — Springer-Verlag, 2012. — Т. 84. — №. 1. — С. 116–130.

[16] *Quick M., Ruškuc N.* Growth of generating sets for direct powers of classical algebraic structures // Journal of the Australian Mathematical Society. — 2010. — Т. 89. — №. 1. — С. 105–126.

[17] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets — Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2006. — 668 с.

[18] *Post E.* Two-valued iterative systems of mathematical logic — Princeton University Press, 1941. — 122 с. — Volume 5 of Annals of Mathematics studies.

решётке клонов с такой же областью определения. Клонами называют замкнутые классы функций, содержащие все селекторы. Этот антиизоморфизм называется соответствием Галуа. Он применяется, например, для изучения структуры решётки замкнутых классов функций[19].

В диссертационной работе соответствие Галуа неоднократно используется для доказательства и формулировки результатов. С его помощью получен критерий минимального логарифмического темпа роста в терминах предикатов, а также описаны темпы роста конечных структур, множество операций которых сохраняет лишь конечное число важных существенных предикатов.

Критерий минимального логарифмического темпа роста в терминах предикатов позволяет получить критерий минимального логарифмического темпа роста в терминах функций. Также критерий минимального логарифмического темпа роста в терминах предикатов позволяет доказать, что решётка замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста не отличается по мощности от полной решётки классов функций многозначной логики ни в "длину", ни в "ширину"[20]. Здесь минимальным логарифмическим темпом роста называется такой темп роста $d_{(A,M)}(n)$, что $d_{(A,M)}(n) - \log_{|A|} n = O(1)$, то есть темп роста, отличающийся от минимального возможного не более чем на предопределённую константу.

Полученные утверждения для решётки замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста позволяют понять устройство решётки замкнутых классов функций многозначной логики. Как следствие доказанных в настоящей работе теорем получено, что в предполных классах сохранения подмножества континуально много в "длину" и в "ширину" таких замкнутых классов функций, что они не принадлежат никакому другому предполному классу.

Для произвольной конечной структуры доказано, что если все её операции сохраняют лишь конечное число важных существенных предикатов, то темп роста данной структуры ограничен сверху некоторой логарифмической функцией. То есть, если мы "слабо" ограничим множество возможных операций конечной структуры, это не выведет её из класса структур с логарифмическим темпом роста.

Наконец, во всех вышеприведённых классических результатах экспоненциальный темп роста определяется как темп роста из класса $2^{\Theta(n)}$ при $n \to \infty$. В настоящей работе исследуются классы экспоненциальных темпов роста, на которые разбиваются темпы роста из класса $2^{\Theta(n)}$, $n \to \infty$,

[19] *Жук Д. Н.* Предикатный метод построения решетки Поста // Дискретная математика. — 2011. — Т. 23. — №. 2. — С. 115–128.

Zhuk D. The Lattice of All Clones of Self-Dual Functions in Three-Valued Logic // J. Multiple Valued Log. Soft Comput. — 2015. — Т. 24. — №. 1–4. — С. 251–316.

[20] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127. — №. 1. — С. 44–46.

при выносе асимптотического ограничения из показателя. Оказывается, что разнообразие возможных порядков экспоненциальных темпов роста превосходит известное разнообразие не более чем полиномиальных темпов роста даже с точностью до основания экспоненты.

Целью работы является исследование темпов роста произвольных конечных структур. Так как для булевой алгебры известна полная решётка замкнутых классов функций, то для двухэлементных структур задача состоит в нахождении точных значений всех возможных темпов роста. Для произвольных конечных структур задача заключается в исследовании крайних случаев: наиболее быстро- и медленно-растущих темпов роста.

Известно, что задача П2-QCSP может быть сведена к задаче CSP в зависимости от функционального множества, задающего язык ограничений. Тем самым представляют интерес утверждения о темпах роста, сформулированные в терминах предикатов, сохраняемых заданными операциями. Это позволяет напрямую исследовать язык ограничений, не переходя к функциональному множеству, задающему его.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить точные значения темпов роста всех возможных двухэлементных структур;
2. Оценить мощность решётки конечных структур фиксированного размера с минимальным логарифмическим темпом роста;
3. Получить критерий минимального логарифмического темпа роста;
4. Исследовать темпы роста конечных структур лишь с конечным числом существенных ограничений на их множество операций;
5. Исследовать возможные порядки экспоненциального темпа роста конечных структур.

Научная новизна:

1. Впервые получены точные значения темпов роста классов функций из решётки Поста;
2. Впервые обособлены и изучены конечные структуры с минимальным логарифмическим темпом роста: получены различные формулировки критерия минимального логарифмического темпа роста, а также получена мощность решётки замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста в глубину и в ширину;
3. Впервые получены темпы роста произвольных конечных структур лишь с конечным числом существенных ограничений на их множество операций;
4. Впервые получены темпы роста с асимптотическим ограничением не в показателе экспоненты.

Результаты исследований являются подлинными и оригинальными и, кроме специально оговорённых случаев, получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость Практическая применимость была описана ранее: в некоторых случаях задачу П2-QCSP можно свести к более простой задаче CSP в зависимости от порядка темпа роста и возможности построения генерирующего множества для некоторой внутренней структуры задачи.

Введённые в работе утверждения и понятия могут быть использованы в дальнейшем при изучении теоретических вопросов алгоритмической сложности и экстремальной комбинаторики.

Методология и методы исследования. В работе применялись методы дискретной математики, алгебры, комбинаторики и теории вероятностей. В частности, доказательства полученных в работе утверждений опираются на следующие известные результаты: соответствие Галуа, определяющее антиизоморфизм между решёткой клонов и решёткой замкнутых классов предикатов; решётка Поста, определяющая решётку всех замкнутых по операциям суперпозиции классов функций булевой логики; теорема Анселя, определяющая разбиение булева куба на цепи, обладающие определёнными свойствами; теорема Катоны, определяющая минимальный размер тени множества строк с одного уровня булева куба; теорема Шпернера, определяющая максимальное число попарно несравнимых булевых строк одного размера; теоремы Милнера, Франкла-Гронау и Гронау, определяющие максимальное число попарно несравнимых булевых строк одного размера с некоторыми ограничениями на их объединения; теорема Розенберга, определяющая все предполные классы k-значной логики; неравенство Чернова, оценивающее вероятность отклонения биномиального распределения от своего математического ожидания на определённую величину с ростом числа испытаний.

Основные положения, выносимые на защиту: На защиту выносятся обоснование актуальности решаемых задач, методология, принятая для исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, а также следующие положения, которые подтверждаются результатами исследований, представленными в Заключении диссертации:

1. Значения темпов роста всех клонов решётки Поста и их связь с классическими задачами экстремальной комбинаторики;
2. Критерии минимального логарифмического темпа роста в терминах предикатов и в терминах функций;
3. Оценки мощности решётки клонов с минимальным логарифмическим темпом роста в глубину и в ширину;
4. Порядок темпов роста клонов, сохраняющих лишь конечное число важных существенных предикатов;

5. Новые ранее неописанные классы экспоненциальных темпов роста, чье разнообразие, как оказалось, превосходит разнообразие не более чем полиномиальных темпов роста.

Достоверность полученных результатов обеспечивается приведёнными строгими математическими доказательствами.

Результаты работы проходили апробацию на научных конференциях и семинарах и опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях и на следующих семинарах:

- Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2019" (с 8 по 12 апреля 2019 года) и "Ломоносов-2021" (с 12 по 23 апреля 2021 года), секция "Математика и механика", Москва, МГУ;
- XII Международная научная конференция "Интеллектуальные системы и компьютерные науки", приуроченная к 85-летию со дня рождения профессора Московского университета В.Б. Кудрявцева, с 29 ноября по 3 декабря 2021 года, Москва, МГУ;
- Ежегодные научные конференции "Ломоносовские чтения-2018" (с 16 по 27 апреля 2018 года), "Ломоносовские чтения-2019" (с 15 по 25 апреля 2019 года), "Ломоносовские чтения-2020" (с 21 по 28 октября 2020 года) и "Ломоносовские чтения-2021" (с 21 по 28 апреля 2021 года), секция "Математика", Москва, МГУ;
- Научный семинар "Теория автоматов" под руководством профессора Кудрявцева Валерия Борисовича, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, 2018, 2019 и 2021 года;
- Научный семинар "Нейронные сети" под руководством доцента Часовских Анатолия Александрович, научного сотрудника Половникова Владимира Сергеевича, старшего научного сотрудника Говорко Алексея Александровича, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, 2018, 2019, 2020 и 2021 года.

Личный вклад. Автором решены поставленные в работе задачи: найдены значения темпов роста произвольных двухэлементных структур, доказан критерий минимального логарифмического темпа роста, найдена мощность решётки конечных структур с минимальным логарифмическим темпом роста, найден порядок темпов роста конечных структур лишь с конечным числом существенных ограничений, найдены новые порядки экспоненциальных темпов роста. Полученные в рамках работы утверждения и следствия из них сформулированы и доказаны автором самостоятельно. Основные результаты оформлены и опубликованы в рецензируемых

научных изданиях, рекомендованных для защиты. По результатам исследований подготовлены и сделаны доклады на научных конференциях и семинарах.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 научных изданиях: 6 — в периодических научных журналах, рекомендованных для защиты по специальности 01.01.09, из которых 4 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI; 2 — в тезисах докладов. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** вводятся основные определения и обозначения, а также доказываются базовые утверждения, используемые на протяжении всей работы.

В разделе 1.1 определяются понятия набора и выводимости набора из других наборов. Определяется понятие генерирующего множества — такого множества наборов, что из него выводятся все возможные наборы. Через генерирующее множество определяется понятие минимального генерирующего множества. Определяется понятие собственных строк генерирующего множества и, наконец, темп роста определяется через введённые термины. Также в разделе вводятся необходимые определения для формулировки соответствия Галуа.

В разделе 1.2 вводятся базовые утверждения о темпе роста, определяющие основные характеристики этой функции.

В лемме 1 доказывается, что если расширить множество операций структуры, то значения её темпа роста от этого не увеличатся. Данное утверждение, несмотря на свою простоту, является полезным для нахождения темпов роста — оно позволяет оценивать темп роста интересующей структуры через уже найденные темпы роста.

Лемма 1. *Пусть* $A \subseteq B \subseteq P_k$, $k \geqslant 2$. *Тогда* $d_{(E_k,A)}(n) \geqslant d_{(E_k,B)}(n)$.

Из двух следующих далее замечаний следует, что для нахождения всех возможных темпов роста достаточно найти темпы роста только тех структур, у которых множество операций является клоном.

Замечание 1. $d_{(E_k,M)}(n) = d_{(E_k,M\cup G)}(n)$, $k \geqslant 2$, *где* G — *множество всех селекторов.*

Замечание 2. $d_{(E_k,M)}(n) = d_{(E_k,[M])}(n)$, $k \geqslant 2$.

Следующее далее замечание определяет минимальный возможный темп роста для конечной структуры.

Замечание 3. $d_{(E_k,M)}(n) \geqslant \lceil \log_k n \rceil$, $k \geqslant 2$.

Лемма 2 является критерием генерирующего множества. В диссертационной работе используется определение темпа роста через мощность минимального генерирующего множества. Тем самым приведённая лемма является одним из основных инструментов для изучения темпов роста.

Лемма 2. *Пусть M — замкнутое по операциям суперпозиции множество функций k-значной логики, содержащее все селекторы. Множество X — генерирующее множество по операциям из M тогда и только тогда, когда из собственных строк генерирующего множества X, используя каждую собственную строку не более одного раза, нельзя составить такую матрицу, что все её столбцы принадлежат какому-то нетождественному предикату $\rho \in \mathrm{Inv}(M)$.*

Во **второй главе** найдены значения темпов роста всех возможных пар вида $\overline{(E_2,M)}$, где $M \subseteq P_2$. Согласно предыдущим замечаниям для этого достаточно найти темпы роста только тех пар, где M — клон. В этой главе используется полная структура решётки клонов булевой логики, известная как решётка Поста.

В разделе 2.1 приведены необходимые определения и обозначения, а также классические результаты экстремальной комбинаторики, которые потребовались для определения темпов роста некоторых клонов: теорема Анселя о разбиении булева куба на цепи, теорема Катоны о размере тени множества булевых строк, теорема Шпернера о максимальном числе попарно несравнимых подмножеств конечного множества, а также теоремы Милнера, Франкла-Гронау и Гронау о максимальном числе попарно несравнимых подмножеств конечного множества с некоторыми ограничениями на их объединения.

В разделе 2.2 найдены значения темпов роста классов функций из центральной части решётки всех клонов алгебры логики. В данный раздел не входят только нетривиальные классы функций, содержащие линейные и самодвойственные функции.

В трёх следующих далее теоремах определяются значения темпов роста класса P_2 и классов функций, сохраняющих подмножества.

Теорема 1. $d_{(E_2,C_1)}(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. *Здесь* $C_1 = P_2 = \mathrm{Pol}\big(\{\, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \,\}\big)$.

Теорема 2. $d_{(E_2,C_2)}(n) = d_{(E_2,C_3)}(n) = \lceil \log_2 (n+1) \rceil$. *Здесь* $C_2 = T_1 = \mathrm{Pol}\big(\{\, (1) \,\}\big)$ *и* $C_3 = T_0 = \mathrm{Pol}\big(\{\, (0) \,\}\big)$.

Теорема 3. $d_{(E_2,C_4)}(n) = \lceil \log_2 (n+2) \rceil$. *Здесь* $C_4 = T_1 \cap T_0 = \mathrm{Pol}\big(\{\, (1), (0) \,\}\big)$.

В теореме 4 определяются значения темпов роста клонов, не содержащих функций с более чем одной существенной переменной.

Теорема 4. *1.* $d_{(E_2,O_1)}(n) = 2^n$.
2. $d_{(E_2,O_5)}(n) = d_{(E_2,O_8)}(n) = 2^n - 1$.
3. $d_{(E_2,O_6)}(n) = 2^n - 2$.
4. $d_{(E_2,O_4)}(n) = 2^{n-1}$.
5. $d_{(E_2,O_9)}(n) = 2^{n-1} - 1$.
Здесь $O_1 = [\{x\}]$, $O_5 = [\{x,1\}]$, $O_8 = [\{x,0\}]$, $0_6 = [\{x,1,0\}]$, $O_4 = [\{x,x+1\}]$, $O_9 = [\{x,x+1,0,1\}]$.

Следующая далее теорема определяет значения темпов роста классов монотонных функций и монотонных функций, сохраняющих подмножества.

Теорема 5. $d_{(E_2,A_1)}(n) = d_{(E_2,A_2)}(n) = d_{(E_2,A_3)}(n) = d_{(E_2,A_4)}(n) = \varphi(n) = \log_2 n + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \log_2 n + o(\log_2 \log_2 n)$ *при* $n \to \infty$. *Здесь* $A_1 = M = \mathrm{Pol}\{\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right)\}$, $A_2 = M \cap T_1 = \mathrm{Pol}\{\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right),(1)\}$, $A_3 = M \cap T_0 = \mathrm{Pol}\{\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right),(0)\}$, $A_4 = M \cap T_1 \cap T_0 = \mathrm{Pol}\{\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right),(1),(0)\}$.

Значения темпов роста классов функций, являющихся замыканием конъюнкции или дизъюнкции с константными функциями, определяются в двух следующих далее теоремах.

Теорема 6. $d_{(E_2,S_1)}(n) = d_{(E_2,S_3)}(n) = d_{(E_2,P_1)}(n) = d_{(E_2,P_3)}(n) = n + 1$. *Здесь* $S_1 = [\{x \vee y\}]$, $S_3 = [\{x \vee y,1\}]$, $P_1 = (S_1)^*$, $P_3 = (S_3)^*$.

Теорема 7. $d_{(E_2,S_5)}(n) = d_{(E_2,S_6)}(n) = d_{(E_2,P_5)}(n) = d_{(E_2,P_6)}(n) = n$. *Здесь* $S_5 = [\{x \vee y,0\}]$, $S_6 = [\{x \vee y,1,0\}]$, $P_5 = (S_5)^*$, $P_6 = (S_6)^*$.

В разделе 2.3 найдены значения темпов роста нетривиальных классов линейных функций. Они определяются теоремами 8–12.

Теорема 8. $d_{(E_2,L_3)}(n) = n$. *Здесь* $L_3 = [\{x + y\}]$.

Теорема 9. $d_{(E_2,L_4)}(n) = n + 1$. *Здесь* $L_4 = [\{x + y + z\}]$.

Теорема 10. $d_{(E_2,L_2)}(n) = n$. *Здесь* $L_2 = [\{x + y + z,1\}]$.

Теорема 11. $d_{(E_2,L_1)}(n) = n - 1$. *Здесь* $L_1 = L = [\{x + y,1\}]$.

Теорема 12. $d_{(E_2,L_5)}(n) = n$. *Здесь* $L_5 = [\{x + y + z,x + 1\}]$.

В разделе 2.4 найдены значения темпов роста классов функций из счётных цепочек решётки всех клонов алгебры логики.

В двух следующих далее теоремах определяются значения темпов роста тех классов функций из счётных цепочек, которые не являются подмножествами класса монотонных функций.

Теорема 13. $d_{(E_2,F_4^t)}(n) = d_{(E_2,F_8^t)}(n) = \lceil \log_2 n \rceil + 1$, *где* $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$. *Здесь* $F_4^t = \mathrm{Pol}\big(\{\rho_{\vee,t}\}\big)$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $F_4^\infty = [\{\to\}]$, $F_8^t = (F_4^t)^*$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$.

Теорема 14. $d_{(E_2,F_1^t)}(n) = d_{(E_2,F_5^t)}(n) = \lceil \log_2 (n+1) \rceil + 1$, *где* $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$. *Здесь* $F_1^t = F_4^t \cap T_1 \cap T_0 = \mathrm{Pol}\big(\{\rho_{\vee,t},(0)\}\big)$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $F_1^\infty = [\{x \vee (y+z)\}]$, $F_5^t = (F_1^t)^*$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$.

Далее рассматриваются те классы функций из счётных цепочек, которые являются подмножествами класса монотонных функций. В трёх следующих далее теоремах определяются значения темпов роста тех классов функций, для которых удалось найти точные значения их темпов роста.

Теорема 15. $d_{(E_2,F_2^\infty)}(n) = d_{(E_2,F_3^\infty)}(n) = d_{(E_2,F_6^\infty)}(n) = d_{(E_2,F_7^\infty)}(n) = \varphi(n)+1$. *Здесь* $F_2^\infty = [\{x \vee (y \wedge z)\}]$, $F_3^\infty = [\{x \vee (y \wedge z),1\}]$, $F_6^\infty = (F_2^\infty)^*$, $F_7^\infty = (F_3^\infty)^*$.

Теорема 16. $d_{(E_2,F_2^t)}(n) = d_{(E_2,F_3^t)}(n) = d_{(E_2,F_6^t)}(n) = d_{(E_2,F_7^t)}(n) = \varphi(n) + 1$, *где* $t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$. *Здесь* $F_2^t = F_4^t \cap T_1 \cap T_0 \cap M = \mathrm{Pol}\big(\{\rho_{\vee,t},(0),\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right)\}\big)$, $F_3^t = F_4^t \cap M = \mathrm{Pol}\big(\{\rho_{\vee,t},\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right)\}\big)$, $F_6^t = (F_2^t)^*$, $F_7^t = (F_3^t)^*$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$.

Теорема 17. $d_{(E_2,F_2^2)}(n) = d_{(E_2,F_3^2)}(n) = d_{(E_2,F_6^2)}(n) =$

$$= d_{(E_2,F_7^2)}(n) = \begin{cases} \varphi(n),\ \varphi(n)\ -\ \textit{нечетное}, \\ \varphi(n),\ \varphi(n)\ -\ \textit{четное и}\ n \leqslant C_{\varphi(n)}^{\frac{\varphi(n)}{2}-1}, \\ \varphi(n)+1,\ \varphi(n)\ -\ \textit{четное и}\ n > C_{\varphi(n)}^{\frac{\varphi(n)}{2}-1}. \end{cases}$$

Здесь $F_2^2 = F_4^2 \cap T_1 \cap T_0 \cap M = \mathrm{Pol}\big(\{\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right),(0),\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right)\}\big) = [\{m(x,y,z), x \vee (y \wedge z)\}]$, $F_3^2 = F_4^2 \cap M = \mathrm{Pol}\big(\{\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right)\}\big)$, $F_6^2 = (F_2^2)^*$, $F_7^2 = (F_3^2)^*$.

В теореме 18 оцениваются темпы роста четырёх классов функций, чьи значения темпов роста найдены с точностью до единицы. Оказалось, что задача точного нахождения темпов роста этих классов сводится к известной нерешённой задаче экстремальной комбинаторики.

Теорема 18.

$$d_{(E_2,F_2^3)}(n) = d_{(E_2,F_3^3)}(n) = d_{(E_2,F_6^3)}(n) =$$

$$= d_{(E_2,F_7^3)}(n) = \begin{cases} \varphi(n)+1,\ \varphi(n) \in R_{\mathfrak{G}}^0, \\ \varphi(n)+1,\ \varphi(n) \in R_{\mathfrak{G}}^1\ \textit{и}\ n \neq C_{\varphi(n)-1}^{\lfloor \frac{\varphi(n)-1}{2} \rfloor} + 1, \\ \varphi(n),\ \varphi(n)\ -\ \textit{чётное больше 2 или равно 7} \\ \qquad \textit{и}\ n = C_{\varphi(n)-1}^{\lfloor \frac{\varphi(n)-1}{2} \rfloor} + 1, \\ \varphi(n)+\varepsilon,\ \varepsilon \in \{0,1\}\ \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Здесь $F_2^3 = F_4^3 \cap T_1 \cap T_0 \cap M = \mathrm{Pol}\left\{ \left(\rho_{\vee,3}\right), (0), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} = [\{v(x_1,x_2,x_3,x_4)\}]$, $F_3^3 = F_4^3 \cap M = \mathrm{Pol}\left\{ \left(\rho_{\vee,3}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$, $F_6^3 = (F_2^3)^*$, $F_7^3 = (F_3^3)^*$.

В разделе 2.5 найдены значения темпов роста оставшихся нетривиальных классов самодвойственных функций решётки Поста. В двух следующих далее теоремах определяются значения темпов роста классов самодвойственных функций и самодвойственных функций, сохраняющих подмножества.

Теорема 19. $d_{(E_2,D_3)}(n) = \lceil \log_2 n \rceil + 1$. *Здесь* $D_3 = S = \mathrm{Pol}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

Теорема 20. $d_{(E_2,D_1)}(n) = \lceil \log_2 (n+1) \rceil + 1$. *Здесь* $D_1 = S \cap T_1 \cap T_0 = \mathrm{Pol}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), (1), (0) \right\}$.

Следующая далее теорема определяет значения темпа роста класса монотонных самодвойственных функций.

Теорема 21.

$$d_{(E_2,D_2)}(n) = \begin{cases} \varphi(n) + 1, \ \varphi(n) \ - \textit{ нечетное}, \\ \varphi(n) + 1, \ \varphi(n) \ - \textit{ четное и } n \leqslant C_{\varphi(n)}^{\frac{\varphi(n)}{2}-1}, \\ \varphi(n) + 2, \ \varphi(n) \ - \textit{ четное и } n > C_{\varphi(n)}^{\frac{\varphi(n)}{2}-1}. \end{cases}$$

. *Здесь* $D_2 = S \cap T_1 \cap T_0 \cap M = \mathrm{Pol}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), (1), (0) \right\}$.

В разделе 2.6 полученное разбиение решётки Поста на основе темпов роста сравнивается с некоторыми другими известными разбиениями.

В **третьей главе** выполнены исследования конечных структур с минимальным логарифмическим темпом роста, отличающимся от минимального возможного темпа роста не более чем на константу.

В разделе 3.1 вводятся необходимые известные понятия и утверждения для формулировки и доказательства утверждений главы: теорема Розенберга о предполных классах k-значной логики и критерий существенного предиката. В разделе также определяются важные предикаты — предикаты, сохраняемые не всеми функциями и содержащие все столбцы, состоящие из одинаковых значений.

В разделе 3.2 доказывается ряд вспомогательных лемм, касающихся обобщения двойственной к $d_F(n)$ функции $h_F(m) = \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid d_F(n) \leqslant m\right\}$. Эти леммы описывают асимптотическое поведение функции $h_F(m)$ в случае, когда темп роста отличается от минимального возможного темпа роста не более чем на константу, и в случае, когда все операции структуры сохраняют важный предикат.

На основе данных лемм в разделе 3.3 доказываются следующие два критерия минимального логарифмического темпа роста в терминах предикатов и в терминах функций.

Теорема 22. *$d_{(E_k,M)}(n) - \log_k n = O(1)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда не найдётся важного предиката $\rho \in \mathrm{Inv}(M)$. Причём, если не нашлось важного предиката $\rho \in \mathrm{Inv}(M)$, то $\left|d_{(E_k,M)}(n) - \log_k n\right| \leqslant k+1$ для любого n.*

Теорема 23. *$d_{(E_k,M)}(n) - \log_k n = O(1)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда множество M не содержится целиком в классе функций сохраняющих предикат типа* **O**, **L**, **E**, **B** *или предикат типа* **C** *арности не менее двух.*

В разделе 3.2 вводится также счётное семейство предикатов R, для которого доказывается, что ни один из предикатов семейства R не выводится из остальных, а также то, что из семейства R не выводится важных предикатов.

С помощью данного семейства предикатов R и соответствия Галуа в разделе 3.4 в теореме 24 доказано, что для фиксированного размера множества клоны с минимальным логарифмическим темпом роста составляют существенную часть всех клонов.

Теорема 24. *В P_k, $k \geqslant 3$, существует континуальная цепочка вложенных замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста и существует континуальное семейство попарно несравнимых замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста.*

Из доказательства представленного утверждения, в частности, выводится следующий далее факт, описывающий устройство решётки клонов многозначной логики.

Следствие 3. *В P_k, $k \geqslant 3$, в любом классе сохранения подмножества существует континуальная цепочка таких вложенных замкнутых классов функций и существует континуальное семейство таких попарно несравнимых замкнутых классов функций, что ни один из них не вкладывается целиком ни в какой другой предполный класс.*

В **четвёртой главе** найден порядок темпов роста классов функций, сохраняющих лишь конечное число важных существенных предикатов.

В разделе 4.1 вводятся вспомогательные леммы, дополнительно определяющие поведение обобщений функции $h_F(m)$ в случае, когда темп роста логарифмический.

В разделе 4.2 доказывается следующий далее признак логарифмического темпа роста, определяющий темпы роста всех классов функций, сохраняющих лишь конечное число важных существенных предикатов.

Теорема 25. *Пусть функции из множества M сохраняют лишь конечное число важных существенных предикатов. Тогда $d_{(E_k,M)}(n) = O(\log n)$, $n \to \infty$.*

В предшествующих работах других авторов все экспоненциальные темпы роста определяются в единый класс $2^{\Theta(n)}$, $n \to \infty$. В **пятой главе** выполнено исследование классов экспоненциальных темпов роста, на которые разбиваются темпы роста из данного единого класса при выносе асимптотического ограничения из показателя.

Раздел 5.1 содержит вводную часть данной главы. В разделе 5.2 формулируются и доказываются вспомогательные леммы, а также основное утверждение главы в виде следующей далее теоремы.

Теорема 26. *Для любых* $l \in \mathbb{Z}_+$, $c \in \mathbb{N}$ *существует такая пара* (A,M), *что* $d_{(A,M)}(n) = \Theta(n^l \cdot c^n)$. *Если дополнительно* $c \geqslant l+1$, *то существует такая пара* (A,M), *что* $d_{(A,M)}(n) = \Theta(\log n \cdot n^l \cdot c^n)$.

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем.

1. Получены точные значения темпов роста всех замкнутых классов функций решётки Поста, за исключением четырёх. Для оставшихся четырёх замкнутых классов функций темпы роста получены с точностью до единицы. Задача нахождения точного темпа роста этих классов сведена к известной нерешённой задаче экстремальной комбинаторики.
2. Получен критерий минимального логарифмического темпа роста конечной структуры в терминах предикатов и в терминах функций.
3. Доказано, что в многозначной логике существует континуальное семейство попарно несравнимых замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста и континуальная цепочка вложенных замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста. Из доказательства этого факта, в частности, следует, что в любом классе сохранения собственного подмножества существуют континуальная цепочка вложений и континуальное семейство таких попарно несравнимых замкнутых классов функций, что ни один из них не вкладывается целиком ни в какой другой предполный класс.
4. Доказано, что если множество операций, заданное на конечном множестве, сохраняет лишь конечное число важных существенных предикатов, то темп роста данной структуры ограничен сверху логарифмической функцией.
5. Доказано, что для любых заранее заданных целого неотрицательного l и натурального c существует такая пара (A,M), что $d_{(A,M)}(n) = \Theta(n^l \cdot c^n)$. Если дополнительно $c \geqslant l+1$, то существует такая пара (A,M), что $d_{(A,M)}(n) = \Theta(\log n \cdot n^l \cdot c^n)$.

Результаты диссертационной работы могут представлять интерес для специалистов, работающих в областях алгоритмической сложности и экстремальной комбинаторики.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Часовских Анатолию Александровичу за научное руководство и помощь при работе над диссертацией. Автор благодарит кандидата физико-математических наук Жука Дмитрия Николаевича за постановку исходной задачи. Также автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры Математической теории интеллектуальный систем за доброжелательное отношение. Автор благодарит участников научного семинара "Нейронные сети" под руководством доцента Часовских Анатолия Александровича, научного сотрудника Половникова Владимира Сергеевича, старшего научного сотрудника Говорко Алексея Александровича. Также автор благодарит своего деда Гостева Николая Михайловича за поддержку, мотивацию и раннее приобщение к научной среде.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Комков, С. А.* Континуальность классов функций многозначной логики с минимальным логарифмическим темпом роста / С. А. Комков // Дискретная математика. — 2021. — Т. 33, № 3. — С. 54—63. — Discrete Math. Appl., (WoS, Scopus, RSCI, Имп.-ф. РИНЦ 2019 с уч. англ. верс. — 0,800).
2. *Комков, С. А.* Мощности генерирующих множеств по операциям из классов решетки Поста / С. А. Комков // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, № 1. — С. 19—38. — Discrete Math. Appl., 29:3 (2019), 159—173 (WoS, Scopus, RSCI, Имп.-ф. РИНЦ 2019 с уч. англ. верс. — 0,800).
3. *Комков, С. А.* Некоторые характеристики решетки замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста / С. А. Комков // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2021» / под ред. И. А. Алешковский [и др.]. — Москва, МГУ, 2021. — Тезисы докладов.
4. *Комков, С. А.* Новая формулировка критерия минимального логарифмического темпа роста / С. А. Комков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2020. — № 5. — С. 60—62. — Moscow University Mathematics Bulletin, Moscow University Mechanics Bulletin, 75:5 (2020), 220-–221 (WoS, Scopus, RSCI, Имп.-ф. РИНЦ 2020 с уч. англ. верс. — 0,367).

5. *Комков, С. А.* Новые по порядку экспоненциальные темпы роста / С. А. Комков // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2021. — Т. 25, № 3. — С. 39—48. — (Имп.-ф. РИНЦ 2020 — 0,192).

6. *Комков, С. А.* О классах многозначных функций с минимальным логарифмическим темпом роста / С. А. Комков // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019» / под ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва, МГУ, 2019. — Тезисы докладов.

7. *Комков, С. А.* О классах функций многозначной логики с минимальным логарифмическим темпом роста / С. А. Комков // Дискретная математика. — 2018. — Т. 31, № 3. — С. 47—57. — Discrete Math. Appl., 30:4 (2020), 265-–272 (WoS, Scopus, RSCI, Имп.-ф. РИНЦ 2019 с уч. англ. верс. — 0,800).

8. *Комков, С. А.* О темпах роста структур с конечным числом существенных ограничений / С. А. Комков // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2021. — Т. 25, № 4. — С. 129—132. — (Имп.-ф. РИНЦ 2020 — 0,192).

Комков Степан Алексеевич

Темпы роста произвольных конечных структур

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № _____
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография _____