

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования «Московский
физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»



На правах рукописи

УДК 519.174.7, 519.179.1, 519.212.2

Семенов Александр Сергеевич

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, *Шабанов Дмитрий Александрович*

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук».

Защита состоится «28» июня 2019 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.05.003 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):

<https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php>

Работа представлена «28» марта 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Настоящая работа посвящена исследованию в области теории случайных гиперграфов. Вначале приведем несколько основных определений. *Гиперграфом* H называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — это некоторое конечное множество, элементы которого называются *вершинами гиперграфа*, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств V , которые принято называть *ребрами гиперграфа* H . Если каждое ребро гиперграфа H состоит ровно из k вершин, то гиперграф является *k -однородным*. Если $k = 2$, то k -однородный гиперграф будет представлять собой обыкновенный граф. Основным объектом изучения в диссертации является классическая *биномиальная модель* случайного гиперграфа $H(n, k, p)$, $n > k \geq 2$, $n, k \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$. Отметим, что величина p может являться функцией от числа вершин $p = p(n)$. В этой модели случайный гиперграф является случайным элементом, принимающим значения на множестве всех k -однородных гиперграфов на n вершинах V_n (например, $V_n = \{1, \dots, n\}$) и имеющий на нем следующее распределение: для любого $H' = (V_n, E')$, $E' \subset \binom{V_n}{k}$, выполнено

$$P(H(n, k, p) = H') = p^{|E'|}(1 - p)^{\binom{n}{k} - |E'|}.$$

При $k = 2$ модель $H(n, k, p)$ есть ни что иное, как классическая биномиальная модель случайного графа $G(n, p)$.

Первые задачи в теории случайных графов были рассмотрены в работах П. Эрдеша и А. Реньи^{1,2,3} еще в 50-60-е годы XX века. С тех пор вышло множество работ посвященных различным свойствам и характеристикам случайного графа $G(n, p)$, а также были написаны выдающиеся монографии.^{4,5,6,7}

Одними из важнейших вопросов теории случайных гиперграфов с точки зрения теории вероятностей является задача о нахождении распределений таких характеристик гиперграфа, как числа независимости и хроматические числа. Как это часто происходит, поиск точных распределений даже в самых естественных моделях крайне затруднен и остается исследовать предельные распределения. Именно решению задач об асимптотическом распределении чисел независимости и хроматических чисел случайных гиперграфов посвящена настоящая диссертационная работа.

¹P. Erdős, A. Rényi. On random graphs I // Publ. Math Debrecen, 6, 1959, 290-297.

²P. Erdős, A. Rényi. On the evolution of random graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl, 5, 1960, 17-61.

³P. Erdős, A. Rényi. On the evolution of random graphs // Bull. Inst. Int. Statist. Tokyo, 38, 1961, 343-347.

⁴B. Bollobás. Random Graphs // Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

⁵S. Janson. T. Łuczak. A. Ruciński. Random Graphs // Wiley-Interscience, New-York, 2000.

⁶В. Ф. Колчин. Случайные графы // Физматлит, Москва, 2002.

⁷A. Frieze, M. Karonski. Introduction to random graphs // Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

Напомним, что множество вершин $W \subset V$ в гиперграфе (графе) $H = (V, E)$ называется *независимым*, если оно не содержит полных ребер внутри себя, т.е. для любого ребра $A \in E$ выполнено $A \not\subseteq W$. Максимальный размер независимого множества в H называется его *числом независимости*. Число независимости графа H принято обозначать через $\alpha(H)$. Число независимости случайного графа $G(n, p)$ активно изучалось начиная с 70-х годов. В работах Д. Матулы⁸, Дж. Гримметта и К. МакДиармида⁹ был исследован случай постоянного $p \in (0, 1)$. В совместной работе П. Эрдеша и Б. Боллобаша¹⁰ случай постоянного p был полностью решен, авторами была показана сильная концентрация значений $\alpha(G(n, p))$. Обобщение полученных результатов для числа независимости случайного графа на случай достаточно быстро убывающих функций $p = p(n) = o(1)$ (при $n \rightarrow \infty$) было получено А. Фризом¹¹. Случай же постоянного $np = c$ долго оставался открытым. Легко заметить, что в этом случае число *изолированных* вершин (вершин, которые не входят ни в одно ребро) в случайном графе имеет линейный порядок по числу всех вершин графа. В связи с этим была выдвинута естественная гипотеза¹² о существовании в разреженном случае предела сходимости по вероятности отношения числа независимости к числу вершин. Только в 2013 году М. Бояти, Д. Гамарник и П. Тетали¹³ с помощью метода интерполяции доказали ее. Их результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема (Бояти, Гамарник, Тетали). *Для любого $c > 0$ существует такая величина $\gamma(c) \in (0, 1)$, что*

$$\frac{\alpha(G(n, c/n))}{n} \xrightarrow{P} \gamma(c), \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что для небольших значений c предел отношения числа независимости к числу вершин может быть найден с помощью алгоритма, который предложили Р. Карп и М. Сипсер¹⁴ для поиска максимального паросочетания в случайном графе $G(n, p)$. Следствие из их доказательства мы приводим ниже.

Теорема (Карп, Сипсер). *Если $c \leq e$, то*

$$\frac{\alpha(G(n, c/n))}{n} \xrightarrow{P} r + \frac{cr^2}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

⁸D.W. Matula, On the complete subgraphs of a random graph // Combinatory Mathematics and its applications, Chapel Hill, 1970, 356-369.

⁹G. Grimmett, C. McDiarmid, On colouring random graphs // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 77, 1975, 313-325.

¹⁰B. Bollobás, P. Erdős, Cliques in random graphs // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 80, 1976, 419-427.

¹¹A. Frieze, On the independence number of random graphs // Discrete Mathematics, 81, 1990, 171-175.

¹²N. Wormald, Models of random regular graphs // Surveys in Combinatorics, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, Cambridge, 267, 1999, 239-298.

¹³M. Bayati, D. Gamarnik, P. Tetali, Combinatorial approach to the interpolation method and scaling limits in sparse random graphs // The Annals of Probability, 41, 6, 2013, 4080-4115.

¹⁴R. Karp, M. Sipser, Maximum matchings in sparse random graphs // 22nd Annual Symposium on Foundation of Computer Science, 1981, 364-375.

где $r = r(c)$ является единственным решением на $(0, 1)$ уравнения $r = e^{-cr}$. Заметим, что в общем случае значение величины $\gamma(c)$ остается неизвестным.

Основным трендом последних лет является обобщение тех результатов, которые ранее были получены для графов, на случай гиперграфов. Многие из них естественным образом удалось перенести в теорию гиперграфов, но далеко не все. Например, теоремы для числа независимости случайных k -однородных гиперграфов $H(n, k, p)$ в случае не слишком быстро убывающего p были доказаны в работах М. Кривелевича и Б. Судакова¹⁵, Дж. Шмидт, Э. Шамира и Э. Упфала¹⁶, Э. Шамира¹⁷. В представленной работе с помощью метода интерполяции получено обобщение результата М. Бояти, Д. Гамарника и П. Тетали для случайных гиперграфов при $p = cn/\binom{n}{k}$, где $c > 0$ фиксированное положительное число. В этой ситуации число ребер случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в среднем равно cn , т.е. оно в среднем линейно по числу вершин. Подобные гиперграфы принято называть разреженными.

В случае гиперграфов имеется возможность обобщения классического понятия независимых множеств и числа независимости. Пусть j — некоторое натуральное число. Множество вершин $W \subset V$ в гиперграфе $H = (V, E)$ называется j -независимым, если каждое ребро гиперграфа имеет не более j вершин внутри W , т.е. для любого ребра $A \in E$ выполнено $|A \cap W| \leq j$. Числом j -независимости гиперграфа H называется максимальный размер j -независимого множества в H и обозначается через $\alpha_j(H)$.

В уже упомянутой работе¹⁵ М. Кривелевич и Б. Судаков обосновали закон больших чисел для числа j -независимости только в случае не слишком быстро убывающего $p = p(n)$, а точнее при $p\binom{n}{k} \gg n$, т.е. во всех случаях вплоть до разреженного. Для случая $n^{k-1}p = \text{const}$ имелись лишь оценки вида c_1n и c_2n для несовпадающих постоянных $c_1, c_2 > 0$. При помощи обобщения алгоритма Карпа-Сипсера и анализа ветвящихся процессов в работе показано, что в случае $n^{k-1}p = c$ при небольших значениях постоянной c может быть найден предел сходимости по вероятности отношения числа j -независимости к числу вершин.

Как уже было отмечено, еще одним важным направлением исследования являются раскраски случайных гиперграфов. Раскраской вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов называется отображение множества вершин V в множество цветов $\{1, \dots, r\}$. Раскраска гиперграфа H называется *правильной*, если в ней каждый цветовой класс является независимым множеством в H . Наименьшее число

¹⁵M. Krivelevich, B. Sudakov, The chromatic numbers of random hypergraphs // Random Structures and Algorithms, 12, 1998, 381-403.

¹⁶J. Schmidt-Pruzan, E. Shamir, E. Upfal, Random hypergraph coloring algorithms and the weak chromatic number // Journal Graph Theory, 1985, 8, 347-362.

¹⁷E. Shamir, Chromatic number of random hypergraphs and associated graphs // Adv. Comput. Res., 1989, 5, 127-142.

цветов, при котором существует правильная раскраска графа H , называется *хроматическим числом* гиперграфа H и обозначается $\chi(H)$.

Задача о поиске асимптотического распределения хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ была поставлена Эрдешем еще в 60-е годы XX века. Почти 30 лет понадобилось на ее решение. Только в 1988 году в случае постоянного p в работе Б. Боллобаша¹⁸ был доказан закон больших чисел для хроматического числа случайного графа. В случае же не слишком быстро убывающих $p = p(n) = o(1)$ при $n \rightarrow +\infty$ аналогичный результат принадлежит Лучаку¹⁹. Множество работ^{20,21,22,23} посвящено случаю $np = c$, где c фиксировано. В этом случае хроматическое число ограничено с вероятностью, стремящейся к 1. В связи с этим задачу оказалось возможным переформулировать в проблему поиска порогового значения $c = c(r)$, до которого хроматическое число не будет превосходить заданное значение r с вероятностью, стремящейся к 1. В другой работе Лучака²⁴ показано, что в случае $np = c$ предельное распределение хроматического числа $G(n, p)$ сконцентрировано в некоторых двух точках. В каких именно значениях сконцентрировано хроматическое число было показано уже в работе Ахлиоптаса и Наора.²⁵

Впервые вопрос о хроматическом числе случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в разреженном случае, т.е. при $p = cn/\binom{n}{k}$, был поднят в работе Н. Алона и Дж. Спенсера²⁶. Они нашли первые оценки пороговой вероятности наличия правильной раскраски в два цвета в виде оценок на пороговое значение параметра c . Верхнюю оценку, полученную в их работе, мы приводим ниже

Теорема (Алон, Спенсер). Пусть $p = cn/\binom{n}{k}$. Тогда при

$$c > 2^{k-1} \ln 2 - \frac{\ln 2}{2} + o_k(1)$$

с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, хроматическое число случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ строго больше двух.

Нижняя оценка Алона и Спенсера последовательно улучшалась в работах Ах-

¹⁸B. Bollobás, The chromatic number of random graphs // Combinatorica, 8, 1988, 49-55.

¹⁹T. Łuczak, The chromatic number of random graphs // Combinatorica, 11, 1991, 45-54.

²⁰T. Łuczak. A note on the sharp concentration of the chromatic number of random graphs // Combinatorica, 11:3, 1991, 295-297.

²¹D. Achlioptas, A. Naor. The two possible values of the chromatic number of a random graph // Ann. of Math., 162:3, 2005, 1335-1351.

²²A. Coja-Oghlan. Upper-bounding the k-colorability threshold by counting covers // Electronic Journal of Combinatorics, 20:3, 2013, Research paper 32.

²³A. Coja-Oghlan, D. Vilenchik. The Chromatic Number of Random Graphs for Most Average Degrees // International Mathematics Research Notices, 2016:19, 2015, 5801-5859.

²⁴T. Łuczak, A note on the sharp concentration of the chromatic number of random graphs // Combinatorica, 11, 3, 1991, 295-297.

²⁵D. Achlioptas, A. Naor, The two possible values of the chromatic number of a random graph // Ann. of Math., 162, 3, 2005, 1335-1351.

²⁶N. Alon, J. Spencer, A note on coloring random k-sets // Unpublished manuscript.

лиоптаса, Кима, Кривелевича и Тетали²⁷, Ахлиоптаса и Мура²⁸ и Коджа-Оглана и Здеборовой²⁹. Результат последней работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема (Коджа-Оглан, Здеборова). Пусть $p = cn/\binom{n}{k}$. Тогда при

$$c < 2^{k-1} \ln 2 - \ln 2 + o_k(1)$$

с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, хроматическое число случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ не превосходит двух.

Нетрудно заметить, что между этими двумя оценками остается постоянный зазор величиной $1/2$. Полностью этот зазор удалось убрать в работе Коджа-Оглана и Панагиоту³⁰. Они показали, что существует некоторая убывающая последовательность $\varepsilon_k = 2^{-(1-o_k(1))k}$, что пороговая величина $\hat{c}$ наличия правильной раскраски в 2 цвета удовлетворяет неравенству

$$2^{k-1} \ln 2 - \ln 2 + 1/4 - \varepsilon_k < \hat{c} < 2^{k-1} \ln 2 - \ln 2 + 1/4 + \varepsilon_k.$$

Также отметим работы Дайера, Фриза и Гринхилл³¹, Шабанова³² и Эйра, Коджа-Оглана и Гринхилл³³, в которых исследуется пороговая величина постоянной c для наличия правильной раскраски в r цветов.

По аналогии с числом j -независимости рассматривают j -хроматическое число гиперграфа (цветовые классы должны быть j -независимыми множествами). Основные результаты о j -хроматическом числе случайного гиперграфа $H(n, k, p)$, при p , стремящемся к нулю при $n \rightarrow \infty$, можно найти в работах Кривелевича и Судакова¹⁵, Шамира¹⁷ и Шмидт³⁴. Автором рассматривается случай $p = cn/\binom{n}{k}$, для которого при помощи методов первого и второго моментов получены верхняя и нижняя оценка для порогового значения постоянной c , до которого j -хроматическое число гиперграфа равняется двум с вероятностью, стремящейся к 1.

Цель работы. Целью диссертационной работы является получение предельных теорем для чисел независимости и хроматических чисел случайных гипер-

²⁷D. Achlioptas, J.H. Kim, M. Krivelevich, P. Tetali, Two-colorings random hypergraphs // Random Structures and Algorithms, 2002, 20, 2, 249-259.

²⁸D. Achlioptas, C. Moore, Random k-SAT: two moments suffice to cross a sharp threshold // SIAM Journal on Computing, 2005, 36, 3, 740-762.

²⁹A. Coja-Oghlan, L. Zdeborova, The condensation transition in random hypergraph 2-coloring // Proc. 23rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2012, 241-250.

³⁰A. Coja-Oghlan, K. Panagiotou. Catching the k-NAESAT threshold. // Proc. 44th STOC, 2012, 899-908.

³¹M. Dyer, A. Frieze, C. Greenhill, On the chromatic number of a random hypergraph // J. Combin. Theory Ser. B, 2015, 113, 1, 68-122.

³²Д.А. Шабанов, О концентрации хроматического числа случайного гиперграфа // Доклады Академии Наук, 2017, 475, 1, 24-28.

³³P. Ayre, A. Coja-Oghlan, C. Greenhill, Hypergraph coloring up to condensation // Random Structures and Algorithms, 2018, <https://doi.org/10.1002/rsa.20824>.

³⁴J. Schmidt, Probabilistic analysis of strong hypergraph coloring algorithms and the strong chromatic number // Discrete Mathematics, 1987, 66, 3, 259-277.

графов. Основной задачей относительно чисел независимости является доказательство законов больших чисел для классических чисел независимости, а также чисел независимости общего вида. Задачи относительно хроматических чисел состоят в поиске оценок пороговой вероятности для свойства наличия правильной раскраски в два цвета.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут найти применения в исследованиях по вероятностной комбинаторике, теории случайных графов и гиперграфов.

Методология и методы исследования. Для доказательства основных результатов работы используются метод интерполяции, метод каплинга аппроксимации различных моделей случайных гиперграфов, метод второго момента. Также применяется вероятностный анализ алгоритма Карпа-Сипсера для поиска максимального независимого множества в гиперграфе.

Положения, выносимые на защиту.

1. Для числа независимости случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в разреженном случае $p = cn/\binom{n}{k}$ доказан закон больших чисел.
2. Для числа j -независимости случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в сильно разреженном случае $p = cn/\binom{n}{k}$, $c \in (0, \frac{1}{k(k-1)}]$ доказан закон больших чисел, а также сама предельная константа, выраженная в виде решения некоторого трансцендентного уравнения.
3. Получены очень близкие верхняя и нижняя оценки пороговой вероятности для свойства случайного гиперграфа $H(n, k, p)$, состоящего в том, что j -хроматическое число не превосходит двух.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты диссертации обоснованы строгими математическими доказательствами. Результаты работ докладывались:

1. на 58-й научной конференции Московского физико-технического института (г. Долгопрудный, 2015 г.);
2. на XXIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (г. Москва, 2016 г.);
3. на IX международной Петрозаводской конференции “Вероятностные методы в дискретной математике” (г. Петрозаводск, 2016 г.);

4. на международной конференции “Workshop on Combinatorics and Number Theory” в Литве (г. Вильнюс, 2017 г.);
5. на международной конференции “Random Structures and Algorithms” в Польше (г. Гнезно, 2017 г.);
6. на спецсеминаре “Экстремальная комбинаторика и случайные структуры” кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (рук. Д.А. Шабанов, 2017 г.);
7. на “Большом семинаре кафедры теории вероятностей” механико-математического факультета МГУ (рук. академик А.Н. Ширяев, 2018 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [C1] - [C5] списка работ автора. Работы [C2] и [C4] являются тезисами на международных конференциях. Работы [C1], [C3], [C5] опубликованы в изданиях, входящих в Scopus и Web of Science.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 72 страницы, из них 4 страницы занимает список литературы (57 наименований).

Основное содержание диссертации

Диссертация начинается с **введения** и **общей характеристики работы**, в которых приводятся краткая история исследований, цели диссертации и ее актуальность, а также описаны методы исследования.

Первая глава диссертации посвящена доказательству закона больших чисел для числа независимости случайного гиперграфа в разреженном случае. Все необходимые определения этой главы вводятся в разделе 1.1. Следующий раздел 1.2 посвящен истории задачи и описанию известных исследований в области чисел независимости случайных графов и гиперграфов. Похожие задачи из смежных областей, а именно задачи о числах независимости в других классах графов, таких как дистанционные и регулярные, приводятся в разделе 1.3.

Доказательству основного результата первой главы посвящен раздел 1.4. Сам результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1.4.³⁵ *Для любых фиксированных $k \geq 3$ и $c > 0$ существует такая величина $\gamma(k, c) \in (0, 1)$, что при $p = cn / \binom{n}{k}$ выполнено*

$$\frac{\alpha(H(n, k, p))}{n} \xrightarrow{P} \gamma(k, c), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом получено обобщение результата Бойяти, Гамарника и Тетали на случай случайных однородных гиперграфов. В первой части раздела 1.4 доказывается вспомогательное утверждение.

Утверждение 1.1. *Для любой функции $p = p(n) \in (0, 1)$ выполнено*

$$\frac{\alpha(H(n, k, p)) - \mathbb{E}\alpha(H(n, k, p))}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из утверждения 1.1 следует, что для установления справедливости теоремы 1.4 достаточно показать сходимость

$$\frac{\mathbb{E}\alpha(H(n, k, p))}{n} \longrightarrow \gamma(k, c), \quad n \rightarrow \infty.$$

Данную сходимость обосновывает наличие супераддитивности последовательности $\mathbb{E}\alpha(H(n, k, p))$ как функции от n .

Установлению свойства супераддитивности последовательности $\mathbb{E}\alpha(H(n, k, p))$ посвящена вторая часть раздела 1.4 диссертации. Данная часть раздела разбита на три параграфа. В параграфе 1.4.1 описывается метод интерполяции, использованный в работе Бойяти, Гамарника и Тетали, и вводится вспомогательная модель случайного гиперграфа. В этом же параграфе доказывается лемма о супераддитивности аналогичной последовательности математических ожиданий для вспомогательной модели гиперграфа.

³⁵Нумерация теорем и утверждений в автореферате соответствует их нумерации в диссертации.

Переход от введенной в параграфе 1.4.1 вспомогательной модели обратно к биномиальной модели $H(n, k, p)$ осуществляется в параграфе 1.4.2. Заключительные моменты доказательства описаны в параграфе 1.4.3.

Результаты первой главы диссертации опубликованы в работах [C1] и [C2].

Во **второй главе** диссертации рассматривается доказательство закона больших чисел для числа j -независимости случайного гиперграфа. Вторая глава также начинается с основных определений, они приводятся в разделе 2.1. В разделе 2.2 описываются известные результаты о числах независимости общего вида, а также формулируется следующий новый результат.

Теорема 2.3. *Для любых фиксированных $k \geq 3$, $1 \leq j < k$ и $c \in (0, \frac{1}{k(k-1)}]$ при $p = cn/\binom{n}{k}$ выполнено*

$$\frac{\alpha_j(H(n, k, p))}{n} \xrightarrow{P} r + cj \sum_{s=j}^{k-1} \binom{k}{s+1} r^{s+1} (1-r)^{k-1-s}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где r — это единственное решение из интервала $(0, 1)$ уравнения $r = e^{-ckf(r)}$, а $f(r) = \sum_{u=j}^{k-1} \binom{k-1}{u} r^u (1-r)^{k-1-u}$.

Данная теорема является обобщением результата, полученного в работе Карпа и Сипсера на случай сильно разреженных гиперграфов.

Также отметим, что с одной стороны мы обобщаем результат первой главы на случай произвольного j в сильно разреженном случае $c \leq \frac{1}{k(k-1)}$, а также уточняем его в том смысле, что предельная константа в законе больших чисел может быть выражена в некоторых случаях явно. Данное замечание может быть сформулировано в виде следствия к теореме 2.3.

Следствие 2.1. *Для любых фиксированных $k \geq 3$ и $c \in (0, \frac{1}{k(k-1)}]$, при $p = cn/\binom{n}{k}$ выполнено*

$$\frac{\alpha(H(n, k, p))}{n} \xrightarrow{P} r + c(k-1)r^k, \quad n \rightarrow \infty,$$

где r — это единственное решение из интервала $(0, 1)$ уравнения $r = e^{-ckr^{k-1}}$.

Отметим, что для сравнения с результатом Карпа и Сипсера для графов необходимо учитывать, что значение константы c в их теореме соответствует удвоенному значению константы c следствия 2.1.

Оставшиеся разделы главы посвящены доказательству теоремы 2.3. В разделе 2.3 приводится доказательство леммы, аналогичной утверждению 1.1.

Лемма 2.1. *Пусть $p = cn/\binom{n}{k}$ для некоторой постоянной $c > 0$. Тогда при*

фиксированных $k \geq 3$, $1 \leq j < k - 1$ и растущем n выполнена сходимость

$$\frac{\alpha_j(H(n, k, p)) - \mathbb{E}\alpha_j(H(n, k, p))}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство леммы основывается на методе каплинга и применении оценок вероятностей больших уклонений для мартингалов. В силу данной леммы вновь остается лишь доказать существование предела отношения $\mathbb{E}\alpha_j(H(n, k, p))/n$. Существование данного предела показывается при помощи анализа алгоритма поиска максимального независимого множества в гипердереве. Напомним, что *гипердерево* — это связный гиперграф без циклов. *Циклом же длины s* в гиперграфе $H = (V, E)$ называется такая чередующаяся последовательность $(v_1, A_1, v_2, \dots, v_s, A_s, v_{s+1})$ различных вершин $v_1, \dots, v_s$ и различных ребер $A_1, \dots, A_s$, что $v_i \in A_{i-1} \cap A_i$, $i = 1, \dots, s$ и $v_{s+1} = v_1$. Именно в случае $p = cn/\binom{n}{k}$ и $c \in (0, \frac{1}{k(k-1)})]$ случайный гиперграф очень похож на объединение гипердеревьев, что и делает удобным рассмотрение алгоритмического подхода в данном случае. Сам алгоритм описан в разделе 2.4 диссертации.

В разделе 2.5 вводится специальная классификация вершин гипердеревя и доказываются вспомогательные утверждения о свойствах этих классов в случае детерминированных гиперграфов. Раздел 2.6 посвящен изучению размеров аналогичных классов вершин уже в случае случайных гипердеревьев и случайных гиперграфов. В этом же разделе приводится аппроксимация случайного гиперграфа случайными гипердеревьями с точки зрения ранее введенных классов вершин. В разделе 2.7 диссертации приводятся завершающие шаги доказательства теоремы 2.3 и показывается, как выражается математическое ожидание числа j -независимости при помощи информации о количестве вершин каждого из классов вершин.

Результаты второй главы диссертации опубликованы в работе [C3].

В **третьей главе** диссертации рассматриваются вопросы о возможности раскраски случайного гиперграфа в два цвета. В разделе 3.1 вводятся основные определения раскрасок и хроматических чисел. История задачи о раскраске случайных графов и гиперграфов приводится в разделе 3.2. Также в этом разделе приводятся новые оценки пороговой вероятности наличия j -правильной раскраски случайного гиперграфа в два цвета. Результат сформулирован в виде двух теорем о верхней и нижней оценке порогового значения.

Теорема 3.3. Пусть $2 \leq \varphi(k) = o(k^{1/2})$ — произвольная положительная функция. Тогда существуют такие $k_0 = k_0(\varphi) \in \mathbb{N}$ и абсолютная константа $C_1 > 0$, что при любых $k > k_0$, $1 < k - j \leq \varphi(k)$ и

$$c > \frac{2^{k-1} \ln 2}{\sum_{i=j+1}^k \binom{k}{i}} - \frac{\ln 2}{2} + C_1 \cdot k^{k-j-1} 2^{-k},$$

с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, j -хроматическое число случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ строго больше двух для $p = cn/\binom{n}{k}$.

Теорема 3.4. Пусть $2 \leq \varphi(k) = o(k^{1/2})$ — произвольная положительная функция. Тогда существуют такие $k_0 = k_0(\varphi) \in \mathbb{N}$ и абсолютная константа $C_2 > 0$, что при любых $k > k_0$, $1 < k - j \leq \varphi(k)$ и

$$c < \frac{2^{k-1} \ln 2}{\sum_{i=j+1}^k \binom{k}{i}} - \frac{\ln 2}{2} - C_2 \cdot k(k/8)^{j-k},$$

с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, j -хроматическое число случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ не превосходит двух для $p = cn/\binom{n}{k}$.

Данные теоремы обобщают верхнюю оценку Алона и Спенсера и нижнюю оценку Коджа-Оглана и Здеборовой. Заметим, что в данном случае также удалось добиться того, что разница между двумя оценками убывает к нулю с ростом k .

При помощи метода первого момента в разделе 3.3 приводится доказательство теоремы 3.3.

Для описания формулировок результатов разделов 3.4 и 3.5 понадобится ввести следующие обозначения.

$$f(a) = 2(a/n) \ln(4a/n) + 2(1/2 - a/n) \ln(2 - 4a/n),$$

$$g(a) = c \ln \left(1 + \frac{\tilde{P}(a) - p_j^2}{(1 - p_j)^2} \right),$$

где $a \in \{0, \dots, n/2\}$, c — положительная константа, $p_j = 2^{1-k} \sum_{i=j+1}^k \binom{k}{i}$ и

$$\begin{aligned} \tilde{P}(a) = 2 \sum_{i=j+1}^k \binom{k}{i} \sum_{s=0}^{k-i} \sum_{t=0}^{i-j-1+s} \left[\binom{k-i}{s} \binom{i}{t} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\left(\frac{a}{n} \right)^{s+t} \left(\frac{n/2 - a}{n} \right)^{k-s-t} + \left(\frac{a}{n} \right)^{k-s-t} \left(\frac{n/2 - a}{n} \right)^{s+t} \right) \right]. \end{aligned}$$

В разделе 3.4 проводится доказательство теоремы 3.4 при помощи метода второго момента и следующей важной леммы.

Лемма 3.2. Если выполнены условия теоремы 3.4, то существует такая функция $b = b(k, j) > 0$, что для любого $a \in \{0, \dots, n/2\}$ будет выполнено неравенство

$$f(a) - g(a) \geq b(a/n - 1/4)^2.$$

Доказательство леммы 3.2 приводится в разделе 3.5. Результаты третьей главы диссертации опубликованы в работах [C4] и [C5].

В **заключении** к диссертации перечисляются полученные в диссертации основные результаты, а также обсуждаются открытые вопросы, связанные с темой диссертации.

Основные результаты диссертации.

1. Для числа независимости случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в разреженном случае $p = cn/\binom{n}{k}$ получен закон больших чисел.
2. Для числа j -независимости случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в сильно разреженном случае $p = cn/\binom{n}{k}$, $c \in (0, \frac{1}{k(k-1)}]$ получен закон больших чисел, а также сама предельная константа, выраженная в виде решения некоторого трансцендентного уравнения.
3. Для случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ найдены очень точные верхние и нижние оценки пороговой вероятности для свойства наличия j -правильной раскраски в два цвета.

Благодарности. Автор выражает огромную признательность своему научному руководителю Д. А. Шабанову за неоценимую помощь в подборе задач, а также многочисленные и плодотворные обсуждения.

Список работ автора по теме диссертации

- [C1] А.С. Семенов, Д.А. Шабанов, “О числах независимости случайных разреженных гиперграфов”, *Дискретная математика*, **28**, 2016, 126–144.
- [C2] А.С. Семенов, “Число независимости случайного разреженного k -однородного гиперграфа”, *IX международная конференция «Вероятностные методы в комбинаторике», Петрозаводск (30 мая — 3 июня, 2016 г.), расширенные тезисы*, Ин-т прикладных мат. исследований Карел. науч. центра Рос. акад. наук; [науч. ред. В. В. Мазалов ; отв. ред. Е. Н. Спектор], Петрозаводск : [Издательство ПетрГУ], 2016, 90–91.
- [C3] А.С. Семенов, Д.А. Шабанов, “Независимые множества общего вида в случайных сильно разреженных гиперграфах”, *Проблемы передачи информации*, **54**, 2018, 63–77.
- [C4] A. S. Semenov, “On the j -chromatic number of random hypergraphs.”, *Proceedings of the “Vilnius conference on combinatorics and number theory”*, 2017, 22.
- [C5] А.С. Семенов, “Двухцветные раскраски случайного гиперграфа”, *Теория вероятностей и ее применения*, **64**, 2019, 75–97.