ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Хакимов Джамолиддин Рахмонович

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПЯТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань — 2021

Работа выполнена на кафедре геометрии, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВО К(П)ФУ **Аминова Ася Васильевна**
Научный консультант:	доктор физико-математических наук, доцент ФГАОУ ВО К(П)ФУ **Попов Аркадий Александрович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Финансового университета при Правительстве РФ **Степанов Сергей Евгеньевич**
	доктор физико-математических наук, профессор Университета Палацкого, Чехия **Микеш Йозеф**
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «МПГУ», г. Москва

Защита состоится «16» декабря 2021 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета КФУ.01.05 при ФГАОУ ВО К(П)ФУ по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО К(П)ФУ по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35. Электронная версия диссертации размещена на сайте К(П)ФУ (http://kpfu.ru).

Автореферат разослан «___» _________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета КФУ.01.05
кандидат физ.-мат. наук, доцент Р. Г. Насибуллин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория групп проективных преобразований псевдоримановых пространств является одним из активно развивающихся разделов дифференциальной геометрии, имеющих приложения в теории дифференциальных уравнений и анализе, а также в теоретической и математической физике.

Проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий уравнений математической физики. Известно, что алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения Кортевега-де Фриза является подалгеброй проективной, точнее, аффинной алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать как "своеобразную реализацию" группы проективных преобразований на прямой[1].

Понятие группы было предложено Э. Галуа во время его работы над алгебраическими проблемами. К. Джордан нашел дальнейшее применение теории групп. Исследуя возможность использования расширенных методов Галуа для решения задач, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений, Ли обнаружил новый тип групп, которые он назвал непрерывными группами преобразований (в дальнейшем они получили название групп Ли).

Впервые задача определения римановых пространств V^n, допускающих непрерывные группы проективных преобразований, рассматривалась С. Ли и затем учеником Г. Дарбу М. Кёнигсом для случая двумерных поверхностей. Дальнейшее развитие теории проективных преобразований и проективных движений (инфинитезимальных проективных преобразований) в пространствах с линейной связностью связано с именами многих известных математиков – Э. Картан, Л.П. Эйзенхарт, М.С. Кнебельман, И.А. Схоутен, К. Яно, И.П. Егоров, Г. Врэнчану, Ш. Кобаяси и др.

Проблема проективных преобразований в V^n тесно примыкает к проблеме геодезических отображений псевдориманывых пространств, которая в разное время рассматривалась Е. Бельтрами, У. Дини, Т. Леви-Чивита, Г. Фубини, Л.П. Эйзенхартом, П.А. Широковым. А.З. Петровым, Н.С. Си-

[1] Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий* /А. В. Аминова. – М.: Янус-К, 2003. – 619 с.

нюковым, А.С. Солодовниковым, В.И. Голиковым, Г.И. Кручковичем, А.В. Аминовой [2] и др.

Как известно, в пространствах постоянной кривизны S^n проективная группа совпадает локально с проективной группой псевдоевклидова пространства, т. е. с группой дробно-линейных подстановок, и зависит от $n(n+2)$ параметров.

Размерность проективной группы в пространствах V^n непостоянной кривизны не превосходит число $n(n-2)+5$,[3] при этом в большинстве случаев эта группа состоит из преобразований подобия (гомотетий) или изометрий.

Работа Г. Фубини "О группах геодезических преобразований" (1903 г.) [4] положила начало систематическому определению и изучению пространств с положительно определенными метриками, допускающих проективную группу более широкую, чем группа гомотетий. Спустя пятьдесят лет А. С. Солодовников[5] продолжил исследования Г. Фубини; в трудах Фубини и Солодовникова содержится классификация собственно римановых пространств V^n, $n \geq 3$, по (локальным) группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий.

Снятие условия знакоопределенности псевдоримановой метрики существенно усложняет задачу и требует принципиально нового подхода к ее решению (см., например, [6] [7] [8]). В 1987 г. вышла работа А. В. Аминовой [9] (см. также [10]), где была развита техника косонормального репера, которая

---

[2] Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* /А. В. Аминова. – УМН. – 1993. – №2. – С. 107–164.

[3] Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности* / И. П. Егоров. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 184 с.

[4] Fubini G. *Sui gruppi trasformazioni geodetiche* / G. Fubini // Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. – 1903. – V. 53, № 2. – P. 261–313.

[5] Солодовников А. С. *Проективные преобразования римановых пространств*/ А. С. Солодовников // УМН. – 1956. – Т. 11. – С. 45–116.

[6] Аминова А. В. *О полях тяготения, допускающих группы проективных движений* /А. В. Аминова // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197, № 4. – С. 807–809.

[7] Жукова Л. И. *О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств* / Л. И. Жукова // Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та. – 1971. – Т. 124. – С. 26–30.

[8] Аминова А. В. *Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности* /А. В. Аминова // Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР – 1974. – Т. 6. – С. 317–346.

[9] Aminova A. V. *On geodesic mappings of Riemannian spaces* / A. V. Aminova // Tensor. – 1987. – Vol. 46. – P. 179-186.

[10] Аминова А. В. *Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка*

дала ключ к решению задачи в псевдоримановых пространствах общего вида. В работах А. В. Аминовой ([11] и др.) были найдены все лоренцевы многообразия размерности $n \geq 4$, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования, и для каждого из них – максимальная проективная и аффинная алгебра Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры.

Подобная задача для псевдоримановых пространств произвольной сигнатуры ранее не рассматривалась. Поэтому представленное в данной диссертации исследование проективно-групповых свойств пятимерных псевдоримановых пространств общей сигнатуры в случае невырожденной характеристики Сегре производной Ли метрического тензора (так называемых жестких h-пространств, см. § 1.2) является актуальной задачей, имеющей важное теоретическое и прикладное значение.

В теоретической физике за последние годы значительно возрос интерес к использованию геометрических свойств многомерных псевдоримановых пространств различных сигнатур, в частности, 5-мерных псевдоримановых пространств.

В 1919 г. Т. Калуцей была предложена идея геометризации электромагнитного поля в духе эйнштейновской теории тяготения с помощью увеличения на единицу числа пространственных координат; сейчас в литературе 5-мерная теория называется теорией Калуцы — Клейна. Заслуга Клейна состоит в обобщении линеаризованного варианта теории Калуцы на общий случай.

В теории Калуцы — Клейна мир описывается 5-мерным псевдоримановым пространственно-временным многообразием с квадратичной дифференциальной формой

$$dI^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, ..., 5). \tag{1}$$

Пятнадцать компонент 5-мерного метрического тензора определяют десять компонент 4-мерного метрического тензора и четыре компоненты вектор-

---

и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности/ А. В. Аминова // Изв. вузов. Математика. – 1988. – N. 1. – С. 3-13.

[11]Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* / А.В. Аминова // УМН. — 1995. — Т. 50, вып. 1. – С. 69–142.

ного электромагнитного потенциала. Оставшаяся пятнадцатая компонента метрического тензора описывает скалярное поле.

В качестве уравнений поля используются 5-мерные уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \tilde{\Lambda}g_{\alpha\beta} = \chi Q_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где $Q_{\alpha\beta}$ есть 5-мерный тензор энергии-импульса внешней материи. Из этих уравнений следуют аналоги 4-мерных уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса электромагнитного поля и уравнения Максвелла. В качестве уравнений движения частиц берутся 5-мерные уравнения геодезических

$$\frac{d^2x^\alpha}{dI^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dI}\frac{dx^\gamma}{dI}, \tag{3}$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ суть 5-мерные символы Кристоффеля. Теории с размерностью пространства больше пяти и с полевыми уравнениями, аналогичными уравнениям Эйнштейна, называются теориями типа Калуцы — Клейна.

В 1921 году Калуца и Клейн показали, что при определенных условиях (таких как цилиндричность: $\partial g_{ij}/\partial x^5 = 0$) добавление 5-го измерения может объяснить появление электромагнитного поля. Хотя сама модель является геометрической, условия типа цилиндричности не являются геометрическими. Эта проблема была частично решена Эйнштейном и Бергманом, которые в своей статье 1938 года предположили, что пятое измерение компактифицируется в небольшую окружность S^1, так что в полученном цилиндрическом 5D пространстве-времени $R^4 \times S^1$ зависимость от x^5 макроскопически незаметна.

В работе[12] было показано, что если во всех определениях векторов, тензоров и т.д. заменить R^4 на $R^4 \times S^1$, то условия типа цилиндричности станут полностью геометрическими.

В работе А.П. Трунева[13] была развита модель фундаментальных взаимодействий на основе теории Калуцы — Клейна в 5-мерном пространстве.

Теорема о соответствии теории Калуцы — Клейна 4-мерной эйнштейновской теории гравитации, взаимодействующей с электромагнетизмом,

[12]Starks S. A. *Kaluza – Klein 5D ideas made fully geometric* /S. A. Starks, O. Kosheleva, V. Kreinovich // arxiv:0506218v1. — URL: https://arxiv.org/abs/physics/0506218v1 (date of the application: 29.06.2005).

[13]Трунев А. П. *Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы — Клейна* / А. П. Трунев // Научный журнал КубГАУ. — 2011. — Т. 71, вып. 7. — 27 с.

доказана в статье [14]. Получено точное решение вакуумных уравнений Эйнштейна в 5-мерном пространстве, представляющее собой решение Боннора 4-мерной теории Эйнштейна — Максвелла. Найденное решение описывает массивный источник, обладающий магнитным и дипольным моментами.

В работе [15] предложено использовать механизм нарушения калибровочных симметрий с помощью петель Вильсона, активно используемый в теории суперструн. Рассмотрена космологическая модель

$$ds^2 = dt^2 - a_{ij}^2(t)dx^i dx^j - b^2(t)(dx^5)^2 \qquad (i, j = 1, ..., 3),$$

содержащая внешние $SU(2)$-калибровочные поля и взаимодействующие с ними спиноры. В правой части 5-мерных уравнений Эйнштейна содержится тензор энергии–импульса, соответствующий однопетлевым вакуумным флуктуациям спинорных и калибровочных полей. Полученная из 5-мерных уравнений Эйнштейна система уравнений для параметров $a(t)$ и $b(t)$ допускает стабильное решение при сравнительно малом числе спинорных полей.

В статье [16] рассматривается 5-мерная космологическая модель с безмассовой 5-пылью в качестве источника. Показано, что уравнения такой модели допускают решение, в котором три пространственных измерения расширяются во времени, а дополнительное измерение стягивается, причем скорость этих процессов определяется количеством 5-пыли во Вселенной.

В работе [17] рассмотрено уравнение геодезических в 5-мерной космологии Калуцы — Клейна. Декларируется, что 5-скорость и другие величины в рассматриваемом случае будут зависеть не только от времени, но и от массы частицы. При сопоставлении полученных космологических уравнений с 4-мерными уравнениями в случае материи в виде идеальной жидкости получен аналог метрики Фридмана–Робертсона–Уокера. Приводятся рассуждения о природе и динамике гравитационной постоянной.

---

[14]Becerril R. *Bonnor solution in five-dimensional gravity.* / R. Becerril, T. Matos // Phys. Rev. D. — 1990. – Vol. 41, №6. — P. 1895 – 1896.

[15]Ho Choon – Lin. *Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza — Klein cosmology.* / Ho Choon – Lin, Nqkin-Wong // Phys. Rev. D. — 1991. – Vol. 43, №10. — P. 3107–3111.

[16]Guendelman E. I. *Kaluza – Klein – Casimir cosmology with decoupled heavy modes.* /E. I. Guendelman // Phys. Lett. — 1988. – Vol. B201, № 1. — P. 39—41.

[17]Fukui Takao. *The motion of a test particle in the Kaluza – Klein-type of gravitational theory with variable mass.* / Fukui Takao //Astrophys. and Space Sci. — 1988. – Vol. 141, № 2. — P. 407–413.

В статьях [18] [19] предложена новая интерпретация 5-мерной теории, согласно которой дополнительные слагаемые в 5-мерных вакуумных уравнениях Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 0$ для метрик вида

$$ds^2 = e^{\nu(t,\psi)}dt^2 - e^{\Omega(t,\psi)}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - e^{\mu(t,\psi)}d\psi^2,$$

содержащих произвольные функции $\mu(t,\psi)$ и $\nu(t,\psi)$, отождествляются с правой частью соответствующего 4-мерного уравнения для идеальной жидкости:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G[(p-\rho)u_\mu u_\nu - pq_{\mu\nu}].$$

Показано, что для некоторой не зависящей от ψ метрики (5-мерная метрика де Леона), являющейся решением уравнений указанного вида, 4-мерный сектор которой соответствует фридмановской модели пространственноплоской Вселенной, заполненной излучением, подобное отождествление приводит к правильным зависимостям давления p и плотности ρ от времени. Для другой предложенной в этих работах метрики выбором свободного параметра удается добиться соответствия на гиперплоскостях $\psi = \mathrm{const}$ с пространственно-плоскими моделями Фридмана как в случае излучения, так и в случае пылевидной материи.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что тема настоящей диссертационной работы является актуальной.

Целью диссертационной работы является определение всех 5-мерных жестких h-пространств H_χ, т.е. псевдоримановых многообразий (M^5, g) произвольной сигнатуры с (невырожденной) характеристикой Сегре $\chi = \{r_1, ..., r_k\}$, $r_1, ..., r_k \in N$, $r_1 + ... + r_k = 5$, и вещественными собственными значениями производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении инфинитезимального преобразования X, допускающих (негомотетические) проективные и аффинные движения (т.е. инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования), и для каждого из них – определение структуры соответствующих максимальных проективной и аффинной алгебр Ли, включая классификацию h-пространств H_{221} типа $\{221\}$ по мак-

[18] Wesson P. S. *A physical interpretation of Kaluza – Klein cosmology.* /P. S. Wesson // Astrophys. J. — 1992. – Vol. 394, №1. — P. 19–24.

[19] Wesson P. S. *The properties of matter in Kaluza – Klein cosmology.* /P. S. Wesson // Mod. Phys. Lett. A. — 1992. – Vol. 7, №11. — P. 921–926.

симальным алгебрам Ли проективных и аффинных преобразований, более широким, чем алгебры Ли гомотетий.

Основные задачи диссертационной работы.

Решение поставленной задачи основано на разбиении пространств (M^5, g) по типам в соответствии с алгебраической структурой билинейной формы $h = L_X g$ и включает следующие этапы.

1. Интегрирование уравнений Эйзенхарта для каждого допустимого типа $\chi :\ \{221\},\ \{32\},\ \{41\},\ \{5\}$, h-пространств H_χ типа χ.

2. Вычисление кривизны h-пространств H_χ и получение необходимых и достаточных условий постоянства кривизны исследуемых пространств.

3. Нахождение общего решения уравнения Эйзенхарта для каждого h-пространства H_χ непостоянной кривизны.

4. Исследование структуры максимальных проективных и аффинных алгебр Ли, более широких, чем алгебры Ли гомотетий, для каждого из найденных h-пространств.

5. Интегрирование обобщенных уравнений Киллинга $L_X g = h$ для h-пространств H_{221} типа $\{221\}$, включающих три класса h-пространств: $H_{221,1}$, $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$.

6. Классификация h-пространств $H_{221,1}$, $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$ типа $\{221\}$ непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований с указанием размерностей, базисных элементов и структурных уравнений максимальных проективных, аффинных, гомотетических и изометрических (под)алгебр Ли.

Методы исследования. Методы дифференциальной геометрии и математического анализа, теории групп и алгебр Ли, теории систем дифференциальных уравнений. При интегрирования уравнений Эйзенхарта применялся метод косонормального репера А. В. Аминовой [20].

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Определены все классы 5-мерных жестких h-пространств H_χ, т. е. 5-мерных псевдоримановых пространств (M^5, g), допускающих нетривиаль-

[20]Аминова А. В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими*, УМН, **48** (2), 107–164 (1993).

ные решения $h \neq \mathrm{const} \cdot g$ уравнения Эйзенхарта с вещественной невырожденной характеристикой Сегре χ.

2. Вычислены формы связности и кривизны 5-мерных жестких h-пространств H_χ всех допустимых типов χ. Найдены необходимые и достаточные условия постоянства кривизны 5-мерных жестких h-пространств.

3. Получены необходимые и достаточные условия существования в 5-мерном псевдоримановом пространстве негомотетического проективного движения заданного (допустимого) типа χ.

4. Изучена структура негомотетической проективной алгебры Ли P_r в 5-мерном жестком h-пространстве непостоянной кривизны и доказано, что эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r-1$.

5. Дана классификация h-пространств $H_{221,1}$, $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$ типа $\{221\}$ непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований, — найдены все проективно-подвижные метрики и вычислены размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных и аффинных алгебр Ли.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в процессе диссертационного исследования, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при исследованиях групп преобразований псевдоримановых и обобщенных пространств, а также в теории симметрий дифференциальных уравнений, при построении и изучении физических теорий типа Калуцы – Клейна, в квантовой теории поля, общей теории относительности и в учебном процессе при чтении спецкурсов и факультативных курсов для студентов и аспирантов – математиков и физиков.

Апробация работы. Диссертационное исследование рассмотрено, обсуждено и одобрено на заседании кафедры геометрии Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) Федеральный Университет».

Материалы диссертационной работы докладывались на следующих международных и всероссийских научных конференциях:

– Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, посвященная юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича и Александра Петровича Широковых (Казань, КФУ, 2016);

– Международная конференция «Современная геометрия и её приложения» (Казань, 27 ноября — 3 декабря 2017 г.);

– International scientific and practical conference «The actual problems of teaching mathematics and natural sciences in the training of credit system» -Kurgan-Tyube State University after Nosira Khusrava (2018, Bohtar mine, Tajikistan 29-30 june);

– VIII-й Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» «(GRACOS–18)» (Казань, 28 октября - 3 ноября 2018 г.);

– XVII Всероссийская молодежная школа-конференция « Лобачевские чтения » (Казань, 23 – 28 ноября 2018 г.);

– Международная научная школа-семинар «Петровские чтения» (Казань, 2018);

– Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева «Классическая и современная геометрия» (Москва, 22–25 апреля 2019 г.);

– 3rd Symposium of the BRICS Association on Gravity, Astrophysics and Cosmology (Kazan, August 29 to September 3, 2019);

– Международная конференция «Современная геометрия и её приложения- 2019» (Казань, 4 – 7 сентября 2019);

– XVIII Всероссийская молодежная школа-конференция “Лобачевские чтения-2019” (Казань, 25 – 30 ноября 2019 г.).

– XIX Всероссийская молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2020" (Казань, 1 – 4 декабря 2020 г.).

Основные результаты диссертации отражены в 21 работе автора, их список приведен в конце диссертации; из них 20 опубликованы и одна принята к печати, 3 статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования РФ по специальности 01.01.04

и индексируемых в международных Базах данных Scopus и Web of Sciense, 5 статей в других ведущих рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования РФ по смежным специальностям, 12 тезисов в материалах конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 139 страницах и содержит введение, пять глав, 22 параграфа, заключение, библиографический список, включающий 108 наименований работ отечественных и зарубежных авторов, и список публикаций автора по теме диссертации (21 наименование).

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и основные результаты, описаны методы исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость диссертации, приведены апробация и краткое описание диссертации.

Первая глава содержит четыре параграфа (§§ 1.1-1.4) и носит реферативный характер.

Здесь приводятся предварительные сведения о псевдоримановых пространствах V^n (§1.1), проективных, аффинных и конформных преобразованиях (§1.2), описываются метод косонормального репера и развитый А. В. Аминовой общий подход к нахождению и исследованию проективных преобразований псевдоримановых многообразий (§1.3).

В §1.4 дается обзор направлений исследований 5-мерных псевдоримановых пространств и 5-мерных физических теорий типа Калуцы – Клейна, подтверждающий актуальность представленной работы.

В первом параграфе **второй** главы для каждой из четырех допустимых характеристик Сегре χ: $\{221\}$, $\{32\}$, $\{41\}$, $\{5\}$, определяются формы связности и коэффициенты вращения Риччи (§2.1). В §§ 2.2-2.5 интегрируются уравнения Эйзенхарта, находятся векторные поля канонического косонормального репера, вычисляются компоненты тензоров h_{ij}, g_{ij} и определяющая функция φ проективного движения в каноническом натуральном репере, удовлетворяющие уравнениям Эйзенхарта.

Получены следующие результаты.

Теорема 2.1 *Пусть M есть 5-мерное многообразие с метрикой g и связ-*

ностью Леви-Чивита ∇. *Пусть* 0*-форма* φ *и симметричная билинейная форма* h *характеристики* $\chi_{221} = \{221\}$ *определены в* M *или в некоторой области* $V \subseteq M$ *и пусть* f_1, f_2, f_3 *– попарно различные характеристические корни билинейной формы* $h - 2\varphi g$ *кратностей соответственно 2,2 и 1. Для того чтобы* h, g *и* φ *удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т. е. для того чтобы* M *было* h*-пространством типа* $\chi_{221} = \{221\}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$g = e_1(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1)g_1 + e_2(f_1 - f_2)^2(f_3 - f_2)g_2 +$$

$$e_3(f_1 - f_3)^2(f_2 - f_3)^2 g_3,$$

$$h = (2f_1 + 2f_2 + f_3)g + e_1(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1)\left(f_1 g_1 + \Lambda_1\right) +$$

$$e_2(f_1 - f_2)^2(f_3 - f_2)\left(f_2 g_2 + \Lambda_2\right) + e_3(f_1 - f_3)^2(f_2 - f_3)^2 f_3\ g_3, \qquad (4)$$

$$\varphi = f_1 + f_2 + (1/2) f_3$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ *существовала каноническая карта* (x, U), *в которой*

$$g_1|_U = A\left(2dx^1 dx^2 - A\left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}\right)\left(dx^2\right)^2\right),$$

$$g_2|_U = B\left(2dx^3 dx^4 - B\left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}\right)\left(dx^4\right)^2\right), \quad g_3|_U = \left(dx^5\right)^2, \qquad (5)$$

$$\Lambda_1|_U = A^2(dx^2)^2, \quad \Lambda_2|_U = B^2(dx^4)^2,$$

где $f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1 - \varepsilon_1)c_1$, $f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1 - \varepsilon_2)c_2$, $f_3 = \mu(x^5)$, $c_1, c_2 - const$, $A = \varepsilon_1\left(x^1 + \tau(x^2)\right) + 1 - \varepsilon_1$, $B = \varepsilon_2\left(x^3 + \omega(x^4)\right) + 1 - \varepsilon_2$, ε_1, ε_2 *принимают независимо значения 0 или 1,* $e_1, e_2, e_3 = \pm 1$, τ *– функция* x^2, ω *– функция* x^4.

H-метрики типа $\{32\}$ определяются равенствами (**теорема 2.3**):

$$g = e_1(f_2 - f_1)^2 g_1 + e_2(f_1 - f_2)^3 g_2,$$

$$h = (3f_1 + 2f_2)g + e_1(f_2 - f_1)^2 \left(f_1 g_1 + \Lambda_1\right) + e_2(f_1 - f_2)^3 \left(f_2 g_2 + \Lambda_2\right),$$

$$\varphi = \frac{3}{2} f_1 + f_2,$$

в канонической карте (x, U)

$$g_1|_U = 4A dx^1 dx^3 + \left(dx^2\right)^2 + 2\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{4A}{f_2 - f_1}\right) dx^2 dx^3 +$$

$$\left(\varepsilon_1 \left(x^1\right)^2 - \frac{8A\varepsilon_1 x^1}{f_2 - f_1} + \frac{4A^2}{(f_2 - f_1)^2}\right)\left(dx^3\right)^2,$$

$$g_2|_U = 2B dx^4 dx^5 - \frac{3B^2}{f_1 - f_2}\left(dx^5\right)^2,$$

$$\Lambda_1|_U = 4A dx^2 dx^3 + 4A\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{2A}{f_2 - f_1}\right)\left(dx^3\right)^2, \quad \Lambda_2|_U = B^2\left(dx^5\right)^2,$$

$$\varphi = \frac{3}{2} f_1 + f_2,$$

где $f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1$, $f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2$, c_1, c_2 – const, $A = \varepsilon_1\left(x^2 + \tau(x^3)\right) + 1 - \varepsilon_1$, $B = \varepsilon_2\left(x^4 + \mu(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_2$, ε_1 и ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2 = \pm 1$, τ – функция x^3, μ – функция x^5.

H-метрики типа $\{41\}$ имеют вид (**теорема 2.5**):

$$g = g_1 + g_2,$$

$$h = (4f_1 + f_2)g + f_1 g_1 + f_2 g_2 + h_0,$$

$$\varphi = 2f_1 + \frac{1}{2} f_2,$$

где в канонических координатах

$$e_1 g_1|_U = 2A(f_2 - f_1)dx^1 dx^4 + 2(f_2 - f_1)dx^2 dx^3 +$$

$$2\left(2\varepsilon_1(f_2 - f_1)x^2 - A\right) dx^2 dx^4 - dx^{3^2} + 2\varepsilon_1\left((f_2 - f_1)x^1 - 2x^2\right) dx^3 dx^4 +$$

$$4\varepsilon_1\left((f_2-f_1)x^1x^2-{x^2}^2-\frac{1}{2}Ax^1\right){dx^4}^2,$$

$$e_2g_2|_U=(f_1-f_2)^4{dx^5}^2,$$

$$e_1h_0|_U=2A(f_2-f_1)dx^2dx^4+(f_2-f_1){dx^3}^2+2\left(2\varepsilon_1(f_2-f_1)x^2-A\right)dx^3dx^4+$$

$$4\varepsilon_1\left((f_2-f_1)\left({x^2}^2+\frac{1}{2}Ax^1\right)-Ax^2\right){dx^4}^2,$$

здесь $f_1=\varepsilon_1x^4+(1-\varepsilon_1)c_1$, $f_2=\mu(x^5)$, c_1 – const, $A=3\varepsilon_1\left(x^3+\omega(x^4)\right)+1-\varepsilon_1$, ε_1 принимает значения 0 или 1, $e_1,e_2=\pm1$, ω – функция x^4.

H-метрики типа $\{5\}$ (**теорема 2.7**):

$$h=6fg+h_0,$$

$$\varphi=\frac{5}{2}f,$$

в канонической карте

$$eg|_U=2Adx^1dx^5+2dx^2dx^4+6\varepsilon x^3dx^2dx^5+{dx^3}^2+$$

$$4\varepsilon x^2dx^3dx^5+2\varepsilon x^1dx^4dx^5+2\varepsilon\left(3x^1x^3+2{x^2}^2\right){dx^5}^2,$$

$$eh_0|_U=2Adx^2dx^5+2dx^3dx^4+6\varepsilon x^3dx^3dx^5+4\varepsilon x^2dx^4dx^5+$$

$$2\varepsilon\left(Ax^1+6x^2x^3\right){dx^5}^2,$$

где $f=\varepsilon x^5+(1-\varepsilon)c$, c – const, $A=4\varepsilon\left(x^4+\tau(x^5)\right)+1-\varepsilon$, ε принимает значения 0 или 1, $e=\pm1$, τ – функция x^5.

Из теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2 *Векторное поле $X\in TM^5$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{221\}$ на 5-мерном псевдоримановом многообразии (M^5,g), когда выполняется равенство $L_Xg=h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами (4) и (5) (теорема 2.1).*

Аналогичные утверждения справедливы для h-пространств типов $\{32\},\{41\}$ и $\{5\}$ (**теоремы 2.4**, **2.6** и **2.8**).

В **третьей** главе (§§ 3.1-3.4) определяются все пятимерные жесткие h-пространства непостоянной кривизны. С помощью структурных уравнений Картана вычисляются формы кривизны этих пространств в адаптированном косонормальном репере и устанавливаются необходимые и достаточные условия постоянства их кривизны.

В §3.1 исследуются h-пространства H_{221} типа $\{221\}$. Доказана

Теорема 3.1 *Для того, чтобы h-пространство H_{221} типа $\{221\}$ было пространством постоянной кривизны K: $\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$, необходимо и достаточно выполнение условий $K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0$, что равносильно*

$$C_1 = \frac{e_3(f_2 - f_1)A_3^2}{(f_3 - f_1)^2(f_3 - f_2)}, \ C_2 = -\frac{e_3(f_2 - f_1)A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2}, \tag{6}$$

$$C_3 = \frac{e_3(2f_3 - f_1 - f_2)A_3^2}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)},$$

при этом $K_{ijkl} = 0$ для всех $(kl) \neq (ij)$,

$$\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j, \quad \rho_{ij} = -\frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \equiv \rho = K \tag{7}$$

$(i, j, k, l = 1, ..., 5; \ i < j, \ k < l)$.

Необходимые и достаточные условия постоянства кривизны h-пространств типов $\{32\}, \{41\}$ и $\{5\}$ определены в **теоремах 3.2**, **3.3** и **3.4**.

В **четвертой** главе (§§ 4.1-4.4) исследуются пятимерные псевдоримановы пространства, допускающие инфинитезимальные проективные преобразования. Находится общее решение уравнения Эйзенхарта для каждого из жестких h-пространств типов $\{221\}, \{32\}, \{41\}$ и $\{5\}$ непостоянной кривизны. Решается вопрос о параллельных билинейных формах в жестких h-пространствах. Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомотетических аффинных и проективных движений в каждом из перечисленных h-пространств непостоянной кривизны и описывается структура негомотетической проективной алгебры Ли в указанных h-пространствах.

В §4.1 исследуются проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$. Доказаны теоремы:

Теорема 4.1 *Любое решение* (k, g, ψ) *уравнения Эйзенхарта*

$$\nabla k(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\psi + g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi, \tag{8}$$

равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ *уравнению*

$$\nabla b(Y, Z, W) = g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi, \tag{9}$$

в h*-пространстве* (H_{221}, g) *типа* $\{221\}$ *непостоянной кривизны удовлетворяет условию*

$$\psi = c_1 \left(f_1 + f_2 + \frac{1}{2} f_3 \right) + const = c_1\varphi + const, \tag{10}$$

где функция φ *определена равенством* $\varphi = \left(f_1 + f_2 + \frac{1}{2} f_3 \right)$, c_1 *– произвольная постоянная.*

Теорема 4.2 *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор* b_{ij} *в* h*-пространстве* (H_{221}, g) *типа* $\{221\}$ *непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору:*

$$b_{ij} = c_2 g_{ij} \qquad (c_2 = const).$$

Теорема 4.3 *Всякое аффинное движение* X *в* h*-пространстве* (H_{221}, g) *типа* $\{221\}$ *непостоянной кривизны есть инфинитезимальная гомотетия:* $L_X g = cg,\ c = const.$

Теорема 4.4 *Векторное поле* X *является проективным движением в* h*-пространстве* (H_{221}, g) *непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда*

$$L_X g = c_1 h + c_2 g \equiv c_1(a + 2\varphi g) + c_2 g, \tag{11}$$

где φ *– определяющая функция проективного движения* X, g *и* a *определены в косонормальном репере* $(Y_i) = (\underset{i}{\xi}{}^j \partial_j)$ *каноническими формами*

$$(\bar{a}_{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & e_1 f_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 f_2 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 f_3 \end{pmatrix}, \quad (\bar{g}_{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Теорема 4.5 *Если h-пространство (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

В следующих трех параграфах четвертой главы подобные результаты получены для h-пространств типов $\{32\}, \{41\}$ и $\{5\}$ (**теоремы 4.6 — 4.20**).

В **пятой** главе (§§ 5.1-5.5) детально изучаются h-пространства H_{221} непостоянной кривизны.

В канонических (натуральных) координатах устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых H_{221} является пространством постоянной кривизны (§5.1). Справедлива

Теорема 5.1 *H-пространство H_{221} типа $\{221\}$ является пространством постоянной кривизны, если и только если выполнены следующие условия*

для h-пространства $H_{221,1}$ $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1)$:

$$f_3' = \tau' = \omega' = 0; \tag{13}$$

для h-пространства $H_{221,2}$ $(\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0)$:

$$f_3' = \tau' = 0; \tag{14}$$

для h-пространства $H_{221,3}$ $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0)$:

$$f_3' = 0.$$

При этом $K = 0$, т. е. всякое h-пространство H_{221} типа $\{221\}$ постоянной кривизны является плоским.

В §5.2 формулируются общие свойства проективных векторных полей в пространствах H_{221}. Доказана теорема.

Теорема 5.2 *Если инфинитезимальное преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ является проективным движением в h-пространстве H_{221} типа {221} непостоянной кривизны, то в канонической карте компоненты $\xi^1 = \xi^1(x^1, x^2)$, $\xi^2 = \xi^2(x^2)$, $\xi^3 = \xi^3(x^3, x^4)$, $\xi^4 = \xi^4(x^4)$, $\xi^5 = \xi^5(x^5)$ векторного поля ξ^i, задающего проективное движение, зависят только от указанных переменных.*

В §5.3 интегрируются обобщенные уравнения Киллинга в пространствах H_{221} непостоянной кривизны, исследуются гомотетии и изометрии указанных h-пространств (§5.4).

В §5.5 дается детальная классификация h-пространств H_{221} непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований. Перечисляются все проективно-подвижные метрики и указываются размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных, аффинных (в действительности гомотетических), гомотетических и изометрических алгебр Ли (**теорема 5.3**).

В **заключении** приводится краткий обзор основных результатов, полученных диссертантом.

Список публикаций автора по теме диссертации

Работы, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях (в соответствии с Перечнем ВАК по специальности 01.01.04):

[1] Khakimov, D.R. On projective motions of five-dimensional spaces of special form / A.V. Aminova, D.R. Khakimov// Russian Mathematics. – 2017. – Vol. 61, N 5. – P. 83–87.

[2] Khakimov, D.R. Projective group properties of h-spaces of type $\{221\}$ / A.V. Aminova, D.R. Khakimov // Russian Mathematics. – 2019. – Vol. 63, N 10. – P. 76–82.

[3] Khakimov D.R. On the properties of the projective Lie algebras of rigidh-spaces H_{32} of the type $\{32\}$ /A.V. Aminova, D.R. Khakimov // Uchenye Zapiski KazanskogoUniversiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2020. – Vol. 162, N 2. – P. 111–119. – (In Russian).

Работа, принятия к печати в ведущием рецензируемом научном журнале (в соответствии с Перечнем ВАК по специальности 01.01.04):

[4] Хакимов Д. Р. Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$ /А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов // Известия вузов. Математика. – Принято к печати 30.03.2021.

Работы, опубликованные в других ведущих рецензируемых журналах (в соответствии с Перечнем ВАК по смежным специальностям):

[5] Хакимов Д. Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$ /А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2018. – N 4. – С. 21—31.

[6] Хакимов Д. Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$ /А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2019. – N 1. – С. 45—55.

[7] Хакимов Д. Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$ /А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2019. – N 1. – С. 56-66.

[8] Хакимов Д. Р. H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства/ А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2019. – N 4. – С. 4—12.

[9] Хакимов Д. Р. Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$ /А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2020. – N 1. – С. 4-11.

Работы, опубликованные в материалах конференций:

[10] Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств специального типа/А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, посвящённая юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича и Александра Петровича Широковых. – Казань, 2016. – С. 91.

[11] Хакимов Д. Р. Об интегрировании уравнения Эйзенхарта и h-пространствах типа $\{221\}$ /А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов// Современная геометрия и её приложения: междунар. науч. конф. – Казань, 2017. – С. 17.

[12] Khakimov D. R. Connection forms of h-spaces of the types $\{32\}$, $\{41\}$ and $\{5\}$ in skew-normal frames /A. V. Aminova , D. R. Khakimov // The actual problems of teaching mathematics and natural sciences in the training of credit system: materials of the international scientific and practical conference. -Kurgan-Tyube State University after Nosira Khusrava, 2018. – P. 8-12.

[13] Khakimov D. R. On integration of the Eisenhart equation and h-spaces of the type $\{32\}$ /A. V. Aminova, D. R. Khakimov // Нелинейные модели

в механике, статистике, теории поля и космологии: VIII-й Международный научный семинар (GRACOS–18). – Казань, 2018. – С. 110.

[14] Хакимов Д. Р. Об интегрировании уравнения Эйзенхарта в случае характеристики {41} неизвестной билинейной формы /Д. Р. Хакимов // Лобачевские чтения – 2018: XVII Всероссийской молодежной школы-конференции. – Казань, 2018. – С. 300-302.

[15] Khakimov D. R. On five-dimensionsl spaces with projective symmetries /A.V. Aminova, D.R. Khakimov // Program and abstracts of the 4(25) International Winter School-Seminar on Gravity, Astrophysics and Cosmology «Petrov School». – Казань, 2018. – С. 28.

[16] Khakimov D. R. On the first quadratic integrals of geodesic equation and projective motions of 5-dimensional pseudo-Riemannian manifolds /A. V. Aminova , D. R. Khakimov // Классическая и современная геометрия: международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева / под ред. А.В. Царева. – М. 2019. – С. 154.

[17] Khakimov D. R. On symmetries of five-dimensional spaces/ D. R. Khakimov // III Симпозиум Ассоциации стран БРИКС по гравитации, астрофизике и космологии. – Казань, 2019. – С. 42.

[18] Хакимов Д. Р. О проективных движениях жестких h-пространств/ А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов // Современная геометрия и ее приложения - 2019: сборник трудов международной научной конференции. – Казань, 2019. – С. 6.

[19] Хакимов Д. Р. О свойствах пятимерных жестких h-пространств /Д. Р. Хакимов // Лобачевские чтения-2019: XVIII Всероссийская молодежная школа-конференция. – Казань, 2019. – С. 203.

[20] Хакимов Д. Р. Негомотетичекие проективные движения в жестких H-пространствах типа {221} / Д. Р. Хакимов // Лобачевские чтения - 2020: XIX Всероссийская молодежная школа-конференция. – Казань, 2020. – С. 110-112.

[21] Хакимов Д. Р. О проективных алгебрах Ли жестких H-пространств H_5 типа $\{5\}$ /А. В. Аминова , Д. Р. Хакимов // Актуальные задачи математики и её преподавания: материал республиканской научно – практической конференции / Бохтар гос. ун-ет им. Носира Хусрава. – Бохтар, 2020. – С. 10.