Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

На правах рукописи

УДК 519.175.4

Буркин Антон Валерьевич

ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОДГРАФОВ В СЛУЧАЙНЫХ ГРАФАХ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2019

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики Физтех-школы прикладной математики и информатики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук профессор Райгородский Андрей Михайлович

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Защита состоится «05» декабря 2019 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.05.004 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):
`https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php`

Работа представлена «02» сентября 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Введение

Диссертация посвящена изучению распределения малых подграфов и смежных свойств в семействе случайных подграфов дистанционных графов.

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

В данной работе исследуются случайные подграфы широкого класса дистанционных графов, определенного ниже. Их изучение мотивировано задачами дискретной (комбинаторной) геометрии, наиболее известными из которых являются задача о хроматическом числе пространства и гипотеза Борсука[1234]. В частности, графы, рассмотренные в первой главе, позволяют получать хорошие оценки хроматического числа в малых размерностях, а с помощью плотных графов из второй и третьей глав было получено доказательство того, что хроматическое число евклидового пространства растет экспоненциально как функция от размерности.

Рассматриваемые дистанционные графы $G(n,r,s) = (V(n,r), E(n,r,s))$ (где $V(n,r)$ — множество вершин, а $E(n,r,s)$ — множество ребер) определяются следующим образом:

$$V(n,r) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in \{0,1\},\ x_1 + \ldots + x_n = r\},$$

$$E(n,r,s) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}\colon \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = s\},$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ — евклидово скалярное произведение. Название этих графов объясняется тем, что две вершины графа смежны тогда и только тогда, когда они находятся на определенном расстоянии друг от друга, в данном случае на расстоянии $\sqrt{2(r-s)}$.

Графы $G(n,r,s)$ можно определить и другим образом. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое множество мощности n. Тогда вершинами нашего графа будут все r-элементные подмножества $\mathcal{F}$, а два подмножества будут соединены ребром тогда и только тогда, когда они пересекаются ровно по s элементам, т.е.

$$V(n,r) = \binom{\mathcal{F}}{r},\ E(n,r,s) = \{\{A,B\}\colon A, B \in V(n,r), |A \cap B| = s\}.$$

Поэтому такие графы представляют интерес также в рамках теории семейств пересекающихся множеств.

Определим *случайные подграфы*, которые изучаются в настоящей работе. Пусть у нас есть фиксированный неориентированный граф без петель G, тогда

[1] P. Frankl и R. Wilson. “Intersection theorems with geometric consequences”. В: *Combinatorica* 1 (1981), с. 357—368.

[2] J. Kahn и G. Kalai. “A counterexample to Borsuk’s conjecture”. В: *Bulletin (new series) of the AMS* 29.1 (1993), с. 60—62.

[3] P. Brass, W. O. J. Moser и J. Pach. *Research problems in discrete geometry*. Springer, 2005.

[4] A. M. Raigorodskii. “Around Borsuk’s conjecture”. В: *J. of Math. Sci.* 154.4 (2008), с. 604—623.

его случайным подграфом G_p будет граф, в котором каждое ребро исходного графа проводится с вероятностью p независимо от остальных ребер (или, что то же самое, каждое ребро удаляется с вероятностью $1-p$). Наиболее изученная модель случайного подграфа — *случайный граф Эрдеша–Реньи*, в котором исходный граф G представляет собой полный граф на n вершинах. После того, как модель была впервые представлена в статьях П. Эрдеша и А. Реньи[5], она интенсивно изучалась рядом авторов.

Многие работы посвящены изучению асимптотических свойств случайного графа. Формально под свойством графов для некоторого n понимается любое подмножество множества всех неориентированных графов на n вершинах. Примерами таких свойств являются свойство содержать некоторый фиксированный граф в качестве подграфа, свойство графа быть связным, свойство графа иметь хроматическое число, равное пяти. Оказывается, для многих графовых свойств существует некоторая *пороговая* вероятность $p^* = p^*(n)$ (как функция от числа вершин n), такая, что для вероятности ребра $p = o(p^*)$ случайный граф определенным свойством с вероятностью, стремящейся к 1, не обладает, а при $p = w(p^*)$, напротив, обладает (или наоборот). Здесь $f(n) = o(g(n))$ $(f(n) = w(g(n)))$ означает, что для любого $C > 0$ существует $n_0 > 0$, такое, что для любого $n > n_0$ выполнено $|f(n)| < C|g(n)|$ $(C|g(n)| < |f(n)|)$. Для этих отношений мы также будем использовать обозначения $f(n) \ll g(n)$ и $f(n) \gg g(n)$ соответственно. Например, для свойства графа “быть связным” пороговой будет функция $p^* = \ln n/n$. Более того, известно, что пороговые вероятности существуют для любых *монотонных* свойств, то есть таких свойств $\mathcal{A}$, что если произвольный подграф $H \subseteq G$ удовлетворяет свойству $\mathcal{A}$, то и граф G этому свойству удовлетворяет.

Предмет нашего исследования — случайные подграфы дистанционных графов $G(n,r,s)$, которые мы будем для краткости называть *случайными дистанционными графами* $G_p(n,r,s)$. Нас, в первую очередь, будет интересовать свойство случайного дистанционного графа содержать некоторый фиксированный граф в качестве подграфа. Примером такого свойства будет, например, свойство графа содержать треугольник. Такие свойства хорошо изучены для классической модели Эрдеша–Реньи, но почти не были исследованы в случае графов $G_p(n,r,s)$, за исключением случая $r = n/2, s = n/4$, частично рассмотренного М. Е. Жуковским[6].

В первой главе рассмотрен случай графов $G_p(n,r,s)$ с постоянными r, s, не зависящими от n. В этой ситуации, как легко видеть, число вершин графа и его степень (граф регулярный) растут как степенные функции от размерности n. В данном случае асимптотическое распределение малых подграфов оказывается

[5] P. Erdős и A. Rényi. “On random graphs. I”. В: *Publ. Math. Debrecen* 6 (1959), с. 290—297.

[6] М. Е. Жуковский. “О вероятности вхождения копии фиксированного графа в случайный дистанционный граф”. В: *Матем. заметки* 92.6 (2012), с. 844—855.

тесно связанным с разложением этих графов на компоненты двусвязности. В качестве следствия полученных результатов удается описать множество пороговых вероятностей для планарности случайного дистанционного графа.

Задача о планарности случайного графа Эрдеша–Реньи изучалась, как и задача о малых подграфах, еще в статьях П. Эрдеша и А. Реньи. В классической модели функция $p^* = 1/n$ является пороговой вероятностью для свойства планарности случайного графа. А. Фризом и М. Кривелевичем[7] было доказано, что для случайных подграфов последовательности графов с минимальной степенью $t \to \infty$ пороговая вероятность есть функция $p^* = 1/t$.

Будем рассматривать далее случайные подграфы регулярных подграфов G на N вершинах со степенью $N_1 \to \infty$. Мы доказываем лемму, утверждающую, что в случае, когда $N_1^4 \gg N$, пороговая вероятность для планарности не может быть меньше (в смысле "о малого"), чем $p = 1/N_1$. Вместе с теоремой Кривелевича–Фриза, это утверждение однозначно определяет для таких графов пороговую вероятность для планарности $p^* = 1/N_1$. Более того, эта пороговая вероятность является точной, т.е. граф G_p планарен при $p \sim cp^*$, если $c < 1$, и непланарен при $p \sim cp^*$, если $c > 1$. Здесь и далее $f(n) \sim g(n)$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n > N$ выполнено $(1-\varepsilon)g(n) \leqslant f(n) \leqslant (1+\varepsilon)g(n)$.

В случае же, когда $N_1^4 \ll N$, мы доказываем, что пороговая вероятность может лежать в промежутке

$$\left[\frac{1}{N_1}\left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9}, \frac{1}{N_1}\right].$$

Оказывается, что нижняя оценка достигается, причем достигается на случайных дистанционных графах $G_p(n, r, s)$ с $s > 3r/4$.

Вторая глава посвящена случайному подграфу симметричного дистанционного графа $G(n, n/2, n/4)$. Обобщены и усилены результаты, полученные М. Е. Жуковским. Ранее была доказана теорема о пороговой вероятности для свойства содержать строго сбалансированный граф. В настоящей работе мы распространяем это утверждение на произвольные графы и исследуем "критический" случай, когда вероятность асимптотически равна пороговой. В силу специфики техники, которая используется в доказательствах, мы получаем также теорему о пороговых вероятностях для так называемых *свойств расширений*. Будучи своего рода обобщениями свойств содержать малые подграфы, для классической модели Эрдеша–Реньи они были рассмотрены Дж. Спенсером[8]. В третьей главе эти результаты распространяются на случай семейства

[7]A. Frieze и M. Krivelevich. "On the non-planarity of a random subgraph". В: *Combin. Probab. Comput.* 22.5 (2013), с. 722—732.

[8]J. Spencer. "Threshold functions for extension statements". В: *J. Combin. Theory Ser. A* 53.2 (1990), с. 286—305.

графов $G_p(n, \alpha n, \alpha^2 n)$. Из доказанных утверждений следует, что дистанционные графы $G(n, \alpha n, \alpha^2 n)$ являются в определенном смысле псевдослучайными.

Цель работы

Цель диссертации заключается в изучении класса случайных дистанционных графов с точки зрения их фиксированных подграфов. В частности, решаются такие задачи, как нахождение пороговых вероятностей для свойств содержать малый подграф и свойств расширений, а также изучение распределения малых подграфов в окрестности пороговой вероятности.

Методология и методы исследования

В работе используются методы теории вероятностей, комбинаторики и теории графов.

Научная новизна

Все основные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты полезны для задач дискретной геометрии и представляют ценность для теории случайных подграфов регулярных графов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Получены утверждения, описывающие распределение малых подграфов в случайных подграфах дистанционных графов $G(n, r, s)$ с постоянными r, s.
2. Найдена пороговая вероятность для планарности случайного подграфа $G(n, r, s)$ с постоянными r, s.
3. Найдена пороговая вероятность для свойства содержать произвольный фиксированный подграф в случайном подграфе $G(n, n/2, n/4)$ и исследовано распределение количества подграфов в точке пороговой вероятности, а также найдены пороговые вероятности для свойств расширений; последние для случайных дистанционных графов исследуются впервые.
4. Те же результаты распространены на семейство графов $G(n, \alpha n, \alpha^2 n)$.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты строго доказаны.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

— Семинар «Вероятностные и алгебраические методы в комбинаторике» на кафедре математической статистики механико-математического факультета МГУ под руководством профессора А. М. Райгородского (2014 г.)

— Семинар «Современные проблемы теории чисел» под руководством профессоров С. В. Конягина и И. Д. Шкредова (2014 г.)

— Семинар кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ под руководством профессора Н. Г. Мощевитина (2014 г.)

— Конференция «Summit:240» (Будапешт, Венгрия, 2014 г.)

— Конференция «Ломоносов-2015» (Москва, 2015 г.)

— Коллоквиум кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (2018 г.)

Публикации

По теме диссертации опубликованы работы [1–4] в рецензируемых журналах из перечня ВАК. Все результаты диссертации были получены автором самостоятельно, включая результаты, опубликованные в работах с соавторами.

Благодарности

Автор признателен профессору Андрею Михайловичу Райгородскому за постановку задач, поддержку и неоценимую помощь в работе. Автор также благодарен д.ф.-м.-н. Максиму Евгеньевичу Жуковскому за полезные замечания.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 52 наименования. Общий объем диссертации составляет 71 страницу.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении даются определения дистанционных и случайных графов и описывается история их исследований; также очерчен план диссертации.

Для формулировки результатов первой и последующих глав нам потребуется несколько понятий.

Случайным графом Эрдеша–Реньи $G(n,p)$ называется случайный элемент со значениями во множестве Ω_n и распределением $\mathsf{P}_{n,p}$ на $\mathcal{F}_n$, где Ω_n — множество всех неориентированных графов $G = (V_n, E)$ без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, $\mathsf{P}_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}$. Обобщением такого графа является *случайный подграф* некоторого фиксированного графа: для заданного графа $G = (V, E)$ и вероятности p определим случайный подграф G_p как случайный элемент со значениями в множестве Ω_G и распределением $\mathsf{P}_{G,p}$ на $\mathcal{F}_G = 2^{\Omega_G}$, где Ω_G — это множество всех остовных подграфов G без петель и кратных ребер, а $\mathsf{P}_{G,p}(\tilde{G}) = p^{|\tilde{E}|}(1-p)^{|E|-|\tilde{E}|}$, где $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$.

Для этой классической модели П. Эрдешем, А. Реньи[9], Б. Боллобашем[10], А. Ручински, Э. Винсом[11] и др. был доказан ряд теорем о распределении малых подграфов в случайном графе. Под малыми подграфами мы понимаем подграфы случайного графа (не обязательно индуцированные), изоморфные некоторому фиксированному графу.

Напомним, что *плотностью* графа F с k вершинами и l ребрами называется отношение $\rho(F) = l/k$. *Максимальной плотностью* графа F принято называть величину $\rho^{\max}(F) = \max\{\rho(H) \colon H \subset F\}$. Граф F — *сбалансированный (строго сбалансированный)*, если для любого его собственного непустого подграфа H выполнено $\rho(H) \leqslant \rho(F)$ $(\rho(H) < \rho(F))$.

В первой главе диссертации рассматриваются определенные выше дистанционные графы $G(n,r,s)$ с постоянными r, s и их случайные подграфы.

Получена следующая теорема о пороговой вероятности содержать малый сбалансированный подграф.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксированы. Пусть F — связный сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами. Тогда функция*

$$p = n^{-\frac{kr-(k-1)s}{l}}$$

является пороговой вероятностью для свойства содержать граф F.

---

[9] P. Erdős и A. Rényi. “On the evolution of random graphs”. В: *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 5 (1960), с. 17—61.

[10] B. Bollobás. “Threshold functions for small subgraphs”. В: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 90.2 (1981), с. 197—206.

[11] A. Ruciński и A. Vince. “Balanced graphs and the problem of subgraphs of random graphs”. В: *Proceedings of the sixteenth Southeastern international conference on combinatorics, graph theory and computing.* Т. 49. 1985, с. 181—190.

Кроме того, при $p \gg n^{-\frac{kr-(k-1)s}{l}}$ имеет место закон больших чисел, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X}{\mathsf{E}X} - 1\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

Напомним, что связный граф называется *двусвязным*, если при удалении любой его вершины и всех инцидентных ей ребер граф остается связным[12]. *Компонентами двусвязности* связного графа F называются его максимальные двусвязные индуцированные подграфы. Будем называть *нетривиальными* компоненты двусвязности с числом вершин, большим двух. Известно, что компоненты двусвязности могут пересекаться лишь по одной вершине. Точки, по которым пересекаются нетривиальные компоненты, назовем *точками касания*. Пусть в графе F последние образуют множество $\{c_1, c_2, \ldots, c_j\}$. *Кратностью* точки касания $k(c_i)$ будем называть количество нетривиальных компонент, пересекающихся по ней. Обозначим h сумму $\sum_{i=1}^{j}(k(c_j) - 1)$.

Теорема 2 описывает распределение числа копий фиксированного графа, когда вероятность ребра p совпадает (с точностью до умножения на константу) с пороговой.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксированы. Пусть F — связный сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами. Пусть F содержит b нетривиальных компонент двусвязности и число вершин, лежащих в них, равно d. Пусть h, как и выше, — число точек касания. Кроме того, a — количество автоморфизмов F. Пусть $p \sim cn^{-\frac{kr-(k-1)s}{l}}$, $n \to \infty$, где $c > 0$. Тогда распределение величины X сходится к пуассоновскому с параметром*

$$\lambda = \frac{c^l}{ar!((r-s)!)^{k-1}}(C_r^s)^{k-d+2b-h-1}.$$

Получена также центральная предельная теорема для числа вхождений фиксированного графа в случайный дистанционный граф.

Теорема 3. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксированы. Пусть F — связный сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и b, d, h, a определены так же, как в теореме 2. Пусть функция $p = p(n)$ такая, что $pn^{\frac{kr-(k-1)s}{l}} \to \infty$ и $pn^{\frac{kr-(k-1)s}{l} - \varepsilon} \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\frac{X - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),$$

где

$$\lambda_n = Mp^l, \;\; M \sim \frac{n^{kr-(k-1)s}}{ar!((r-s)!)^{k-1}}(C_r^s)^{k-d+2b-h-1}.$$

[12] Ф. Харари. *Теория графов.* Эдиториал УРСС, М., 2003.

Наконец, теорема 1 обобщается на более широкое семейство графов.

Будем обозначать $v(H)$ и $e(H)$ число вершин и число ребер графа H соответственно. Пусть также

$$\tau(F) = \min_{H \subset F} \left\{ \frac{v(H)r - (v(H)-1)s}{e(H)} \right\}.$$

Теорема 4. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксированы. Пусть F — произвольный связный граф и*

$$\min_{H \subset F} \left\{ \frac{v(H)r - (v(H)-1)s}{e(H)} \right\} = \min_{\substack{H \subset F \\ H \text{ связен}}} \left\{ \frac{v(H)r - (v(H)-1)s}{e(H)} \right\}. \qquad (1)$$

Тогда функция

$$p = n^{-\tau(F)}$$

является пороговой вероятностью для свойства содержать граф F. Как и для связных сбалансированных графов, при $p \gg n^{-\tau(F)}$ выполняется закон больших чисел: для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left| \frac{X}{\mathsf{E}X} - 1 \right| < \varepsilon \right) \to 1.$$

Отметим, что при $s = 0$ условие (1) выполнено для любых связных F. Этот случай соответствует случайным подграфам графов $G(n, r, 0)$, известных также как кнезеровские. Отметим также, что условие (1) при определенных r и s не выполнено, например, для графа F, полученного объединением двух копий K_5 и пути из четырех вершин, соединяющего две вершины из разных копий, и теорема 4 в этом случае неприменима.

Приведем пример, демонстрирующий кардинальное отличие случайного графа $G_p(n, r, s)$ от классической модели $G(n, p)$. Пусть граф F есть K_4, к вершине которого присоединено еще одно ребро. Тогда в силу теоремы 4 при определенных r, s существует такая функция p, что $\mathsf{P}(X_{K_4} > 0) \to 1$, но $\mathsf{P}(X_F > 0) \to 0$ при $n \to \infty$. В модели случайного графа Эрдеша–Реньи такая ситуация невозможна.

Доказательство теорем использует леммы, которые интересны и сами по себе.

Для любых смежных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(n, r)$ рассмотрим простые пути $(\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k = \mathbf{y})$, $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2 \sim \ldots \sim \mathbf{x}_k$. Здесь мы записываем $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2$, если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ соединены ребром. Обозначим P_k количество таких путей. Пусть также N_2 — число вершин, дополняющих произвольное ребро до треугольника. Ясно, что N_2 не зависит от выбора ребра и $N_2 \sim \frac{1}{(r-s)!} n^{r-s}$, $n \to \infty$.

Лемма 1. *Если $k = \mathrm{const}$, то $P_k \sim N_2^{k-2}$, $n \to \infty$.*

Обозначим $M = M_F$ число подграфов дистанционного графа $G(n, r, s)$, изоморфных F.

Лемма 2. *Пусть F — связный граф с k вершинами и l ребрами. Пусть F содержит b нетривиальных компонент двусвязности и число вершин, лежащих в них, равно d. Пусть h — величина, определенная перед формулировкой теоремы 2. Кроме того, a — количество автоморфизмов F. Тогда*

$$M \sim \frac{1}{a} N N_1^{k-d+2b-h-1} N_2^{d-2b+h}, \ n \to \infty.$$

Доказательство леммы 2 использует разложение графа на компоненты двусвязности, для каждой из которых строится *разложение на уши* (англ. *ear decomposition*), существующее согласно теореме Уитни[13].

Оказывается, что асимптотически почти любой цикл фиксированной длины в дистанционном графе представляет собой *клику* (полный подграф) особого вида: если рассматривать вершины графа как r-элементные подмножества $\mathcal{F}$, то все вершины этого цикла пересекаются по одному и тому же множеству из s элементов.

В качестве следствия полученных результатов доказывается теорема о пороговой вероятности для планарности случайного дистанционного графа.

Теорема 5. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N}$ фиксированы, причем $N_1 = o\left(N^{1/4}\right)$, т.е. $s > 3r/4$. Тогда пороговой вероятностью для свойства планарности $G_p(n, r, s)$ является функция*

$$p = \frac{1}{N_1} \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9} \asymp n^{-\frac{6r-5s}{9}}.$$

Кроме того, при $p \sim c n^{-\frac{6r-5s}{9}}$

$$\mathsf{P}(G_p(n, r, s) \text{ планарен}) \sim \mathsf{P}\left(X_{K_{3,3}} = 0\right) \to e^{-\lambda},$$

где

$$\lambda = \frac{c^9 C_r^s}{72 r! \left((r-s)!\right)^5}.$$

Особенно интересна эта теорема в контексте последовательностей случайных подграфов произвольных регулярных графов с неограниченно растущими степенями N_1. Известно, что при $p = c/N_1$, $c > 1$, случайный подграф G_p а.п.н. непланарен. Здесь и далее мы говорим, что событие $A = A(n)$ происходит *асимптотически почти наверное (а.п.н.)*, если $\mathsf{P}(A) \to 1$, $n \to \infty$. Мы доказываем также следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $G(n)$ — последовательность регулярных графов на $N = N(n)$ вершинах степени $N_1 = N_1(n)$, причем $N \ll N_1^4$. Тогда при $p \leqslant c/N_1$, где $c < 1$, случайный граф $G_p = G_p(n)$ а.п.н. планарен.*

[13] H. Whitney. "Non-separable and planar graphs". В: *Trans. Amer. Math. Soc.* 34.2 (1932), с. 339—362.

Отсюда следует, что при $N \ll N_1^4$ пороговой вероятностью для свойства планарности G_p является функция $p = 1/N_1$. Более того, эта пороговая вероятность является точной. Напомним, что пороговая вероятность для планарности в классической модели Эрдеша–Реньи, где G — полный граф на n вершинах (а степень каждой вершины $N_1 = n - 1$), как раз равна $1/n \sim 1/N_1$.

Из доказательства теоремы 5 следует, что для последовательности регулярных графов с $N_1 \to \infty$ и $N_1^4 \ll N$ функция $p \ll \frac{1}{N_1}\left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9}$ не может быть пороговой, т.е. пороговая вероятность для планарности лежит в интервале

$$\left[\frac{1}{N_1}\left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9}, \frac{1}{N_1}\right].$$

Таким образом, $G_p(n, r, s)$ с $s > 3r/4$ представляет собой класс (последовательностей) графов, на которых достигается в некотором смысле минимум пороговой вероятности для свойства планарности. Более того, в этом случае пороговая вероятность не является точной.

Вторая глава диссертации посвящена случайным дистанционным графам с $r = n/2, s = n/4$.

Для строго сбалансированных графов результат о пороговой вероятности содержать малый подграф был получен М. Е. Жуковским. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на произвольные графы.

Теорема 6. *Пусть F — произвольный фиксированный граф. Тогда функция*

$$p^* = N^{-1/\rho^{\max}(F)}\frac{N}{N_1}$$

является пороговой вероятностью свойства содержать копию F для случайного графа G_p. При $p \gg p^*$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X_F}{\mathsf{E}X_F} - 1\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

Мы также находим распределение числа копий фиксированного подграфа в «критическом периоде», когда вероятность p пропорциональна пороговой.

Теорема 7. *Пусть F — строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и a есть число автоморфизмов F. Пусть*

$$p \sim cN^{-k/l}\frac{N}{N_1},$$

где $c = \text{const} > 0$. Тогда распределение X_F слабо сходится к пуассоновскому с параметром $\lambda = c^l/a$.

Основная часть второй главы посвящена *свойствам расширений.*

Пусть H — граф с вершинами $z_1, \ldots, z_d, y_1, \ldots, y_k$, где $R = \{z_1, \ldots, z_d\}$ — множество *корней. Сетью* называется пара (R, H). Говорят, что граф G удовлетворяет *свойству расширения* $\mathrm{Ext}(R, H)$, если для любых $v_1, \ldots, v_d \in V(G)$ найдутся такие $w_1, \ldots, w_k \in V(G)$, что $\{z_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{v_i, w_j\} \in E(G)$ для любых $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ и $\{y_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{w_i, w_j\} \in E(G)$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

Для модели случайного графа Эрдеша–Реньи теорема о пороговой вероятности была доказана Дж. Спенсером. Прежде чем сформулировать аналогичный результат для случайного симметричного дистанционного графа, приведем несколько соображений.

В силу разреженности дистанционного графа $G(n, n/2, n/4)$ для многих сетей (R, H) и для любых p свойства $\mathrm{Ext}(R, H)$ с вероятностями, стремящимися к 1, не выполнены для некоторых подпоследовательностей случайных дистанционных графов. В частности, если n не делится на 8, то в графе $G(n, n/2, n/4)$ найдутся три вершины, не обладающие общим соседом (в данном случае рассматривается следующее свойство расширения: любые три вершины обладают общим соседом)[14]. В то же время при $8|n$ в этом графе у любых трех вершин найдется достаточно большое количество соседей. Поэтому для подобных свойств расширений пороговую вероятность не удается представить в удобном виде, как это сделано в классическом случае. Такая проблема возникает, очевидно, из-за того, что в качестве множества корней можно взять любой набор d вершин из V, а среди таких наборов встречаются комбинации, приводящие к "исключениям". Естественным решением является сузить систему множеств корней. Оказывается, это можно сделать так, чтобы мощность получившейся системы была асимптотически равна мощности семейства всех наборов вершин. Таким образом, при этих ограничениях мы не теряем много информации, и полученные новые свойства расширений достаточно аккуратно отражают структуру графа. Итак, определим эти свойства.

Пусть $f(n)$ — некоторая последовательность положительных чисел. Пусть, кроме того, (R, H) — нетривиальная строго сбалансированная сеть с $V(H) = \{z_1, \ldots, z_d, y_1, \ldots, y_k\}$, $R = \{z_1, \ldots, z_d\}$ и $e(R, H) = l$. Рассмотрим произвольные вершины $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, \ldots, v_n^1), \ldots, \mathbf{v}^d = (v_1^d, \ldots, v_n^d) \in V$. Напомним, что вершины нашего графа находятся в пространстве $\{0, 1\}^n$. Обозначим $\delta_1, \ldots, \delta_{2^d} \in \{0, 1\}^d$ различные d-последовательности из нулей и единиц, упорядоченные лексикографически: $\delta_1 = (1, \ldots, 1) > \ldots > (0, \ldots, 0) = \delta_{2^d}$. Разобьем множество $\{1, \ldots, n\}$ на подмножества $B_1, \ldots, B_{2^d}$ следующим образом: $i \in B_j$ тогда и

[14] М. Е. Жуковский. "Ослабленный закон нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов". В: *Матем. сборник* 203.7 (2012), с. 95—128.

только тогда, когда $(v_i^1, \ldots, v_i^d) = \delta_j$. Положим

$$x_j = x_j\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d\right) = |B_j| - \left[n/2^d\right] \text{ при } j \in \left\{1, \ldots, 2^d - 1\right\},$$

$$x_{2^d} = x_{2^d}\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d\right) = |B_{2^d}| - n + \left(2^d - 1\right)\left[n/2^d\right],$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. Обозначим $\tilde{V}_f^d$ множество всех d-последовательностей вершин из V, для которых $|x_j| \leqslant f(n)$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$. Будем говорить, что остовный подграф G' дистанционного графа G обладает свойством $\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R, H)$, если для любых $(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d) \in \tilde{V}_f^d$ найдутся такие $\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k \in V$, что $\{z_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^j\} \in E(G')$ для любых $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ и $\{y_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{\mathbf{w}^i, \mathbf{w}^j\} \in E(G')$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Иными словами, свойство $\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R, H)$ получается из $\mathrm{Ext}(R, H)$ рассмотрением лишь тех d-последовательностей вершин из V, которые принадлежат $\tilde{V}_f^d$. Таким образом, нас интересуют только последовательности вершин, разбивающие $\{1, \ldots, n\}$ на приблизительно равные подмножества. Будет доказано, что $|\tilde{V}_f^d| \sim |V|^d$. Теорема, сформулированная ниже, выполнена при условии $f \ll n^{2/3}$.

Теорема 8. *Пусть c_1 есть число автоморфизмов H, которые оставляют на месте каждый корень $z_i \in R$. Пусть $p = p(n)$ удовлетворяет равенству*

$$N^k \left(\frac{N_1}{N}\right)^l p^l / c_1 = d \ln N.$$

Тогда p является точной пороговой вероятностью для свойства $\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R, H)$.

Доказательства всех перечисленных теорем кардинально отличаются от доказательств теорем из главы 1 и опираются на три вспомогательные леммы, представляющие самостоятельный интерес.

Пусть $f = f(n)$ — произвольная последовательность положительных чисел, причем $f \ll n^{2/3}$. Пусть, кроме того, (R, H) — произвольная сеть с $V(H) = \{z_1, \ldots, z_d, y_1, \ldots, y_k\}$, $R = \{z_1, \ldots, z_d\}$ и $e(R, H) = l$. Для $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d \in V$ обозначим $M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d)$ количество инъективных отображений из $V(H)$ в V, переводящих z_i в $\mathbf{v}^i$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, и сохраняющих ребра между вершинами, среди которых хотя бы одна не является корнем. Поскольку величина $M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d)$ не зависит от выбора конкретных вершин, а лишь от значений $|B_j|$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, которые, в свою очередь, задаются числами $x_1, \ldots, x_{2^d}$, будем обозначать $M_{(R,H)}^{\vec{x}} = M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d)$, где вектор $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{2^d})$ определен перед формулировкой теоремы 8.

Лемма 3. *Найдется такая функция $M'_{(R,H)} = M'_{(R,H)}(n)$, не зависящая от $\vec{x}$, что $M_{(R,H)}^{\vec{x}} = M'_{(R,H)}\left(1 + O\left(f(n) n^{-0.8}\right)\right)$ при $n \to \infty$ равномерно по всем $\vec{x}$ с условием $|x_j| \leqslant f(n)$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$.*

В основе доказательства леммы 3 лежит представление числа вложений фиксированного графа в $G(n, n/2, n/4)$ в виде некоторой суммы по всем решениям ряда систем уравнений и неравенств и доказательство того, что для получения асимптотики можно некоторым образом сузить множество решений, что позволяет доказать равномерность сходимости в формулировке леммы.

В следующем утверждении мы получили асимптотику количества вхождений произвольного графа F в дистанционный граф G.

Лемма 4. *Пусть M_F — количество мономорфизмов графа F с k вершинами и l ребрами в G. Тогда*

$$M_F \sim M(k,l) := N^k \left(\frac{N_1}{N}\right)^l.$$

Мы нашли элегантное и лаконичное доказательство леммы 4, которое использует индукцию по числу ребер графа F. В определенном смысле мы доказываем лемму сразу для всех графов на k вершинах.

Наконец, мы нашли явное представление $M'_{(R,H)}$ из леммы 3. Так как вывод этого представления опирается на лемму 4, то мы формулируем соответствующее утверждение отдельно от леммы 3.

Лемма 5. *В обозначениях леммы 3 в качестве $M'_{(R,H)}$ можно выбрать $M(k,l)$.*

В главе 3 мы обобщаем результаты второй главы на более широкое семейство случайных дистанционных графов $G_p(n, \alpha n, \alpha^2 n)$.

Как мы видели в главе 2, вложение фиксированного графа в дистанционный граф (или расширение) можно рассматривать последовательно для каждой вершины этого графа (расширения). В такой постановке вершине с номером i соответствует разбиение n координат на 2^i сегментов (подмножеств), причем разбиение для каждой вершины образуется путем разделения каждой части разбиения для предыдущей вершины на две части. Для симметричного дистанционного графа было относительно нетрудно показать, что (асимптотически) почти все вложения (расширения) отвечают разбиениям для каждой вершины на приблизительно равные части. В случае графов $G(n, \alpha n, \alpha^2 n)$ это существенно сложнее. Оказывается, что каждая последовательная вершина должна разделять каждый сегмент предыдущего разбиения на части в соотношении $\alpha : 1 - \alpha$. Это требует нескольких вспомогательных утверждений и изменений в доказательствах основных лемм. Высокоуровневые формулировки же самих теорем и лемм остаются без изменений.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. В. Буркин. Малые подграфы в случайных дистанционных графах. *Теория вероятн. и ее примен.*, 60(3):439–458, 2015.

[2] А. В. Буркин. О пороговой вероятности для свойства планарности случайного подграфа регулярного графа. *УМН*, 70(6(426)):205–206, 2015.

[3] А. В. Буркин, М. Е. Жуковский. Малые подграфы и их расширения в случайном дистанционном графе. *Матем. сборник*, 209(2):22–46, 2018.

[4] А. В. Буркин. Малые подграфы и расширения в семействе случайных подграфов плотных дистанционных графов. *Труды МФТИ*, 11(1):5–19, 2019.