**Семенова, Ольга Львовна.**

## Некоторые свойства предельных множеств фуксовых групп : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.01. - Санкт-Петербург, 1999. - 108 с.

## Введение диссертации (часть автореферата)на тему «Некоторые свойства предельных множеств фуксовых групп»

Основная цель диссертации это доказательство утверждения о принадлежности классу ВМО функции логарифм расстояния до предельного множества для произвольной конечно порожденной фуксовой группы второго рода.

Теория фуксовых групп - важнейшей разновидности клейновых групп (групп мебиусовых преобразований расширенной комплексной плоскости, действующих разрывно в некотором непустом открытом множестве) имеет приложения, в различных областях математики -теории функции комплексного переменного, топологии, геометрии, теории дифференциальных уравнений и теории чисел.

Фуксовой группой называется клейнова группа, сохраняющая некоторый круг расширенной комплексной плоскости. Всякая фуксова группа является группой изометрий гиперболической плоскости. Стоит отметить факт существования тесной связи между фуксовыми группами и римановыми поверхностями.

Хотя основания теории фуксовых групп были заложены еще в девятнадцатом веке (главным образом, в работах Ф. Клейна и А. Пуанкаре), интерес к этой тематике продолжает проявляться по сей день - с развитием новых методов топологии, геометрии и теории конформных преобразований возникают новые задачи, связанные с фуксовыми группами. В последние десятилетия исследованием фуксовых групп занимались А.Марден, А.Бердон, Т.Йоргенсен, Б.Маскит, Л.Гринберг, Б.Апанасов, С.Крушкаль и др.

Предельным множеством произвольной фуксовой группы называется множество дополнительное к регулярной области группы. В настоящее время имеется ряд результатов, касающихся свойств предельного множества фуксовых групп второго рода (фуксова группа относится ко второму роду, если ее предельное множество не совпадает с ее инвариантной окружностью). Известно, что предельное множество представляет собой нигде не плотное подмножество инвариантной окружности. Если группа является конечно порожденной, то предельное множество имеет нулевую лебегову меру на инвариантной окружности; предельное множество бесконечно порожденной группы может иметь положительную меру Лебега. Как показано X. Поммеренке, предельное множество любой конечно порожденной фуксовой группы второго рода обладает свойствам Карлесона, выражающимся в том, что функция логарифм расстояния до предельного множества такой группы является суммируемой по Лебегу.

Если фуксова группа не является элементарной, иначе говоря, если её предельное множество содержит более двух точек, то предельное множество этой группы представляет собой континуум, и "достаточно велико" (даже для конечно порожденной группы), если подходить к понятию "малости" множества с некоторых других точек зрения: в работе [26] П.Мирберг показал, что предельное множество любой неэлементарной фуксовой группы имеет положительную логарифмическую ёмкость; А.Бердон ([13] - [16]) установил, что хаусдорфова размерность этого множества есть положительное число, меньшее единицы, причем, если группа содержит параболические элементы, то хаусдорфова размерность больше одной второй.

На основании этих данных представлялось интересным исследовать вопрос о "регулярности" строения предельного множества - в работе [10] Н. А. Широкова было сформулировано утверждение о том, что функция логарифм расстояния до предельного множества имеет ограниченную осцилляцию, говоря иначе, является элементом класса ВМО. В этой же работе приведены примеры применения данного утверждения: для построения Г-автоморфных форм отрицательного веса и максимальной возможной гладкости, а также для доказательства теоремы Бердона о принадлежности функции расстояние до предельного множества конечно порожденной фуксовой группы второго рода классу Ьр при некотором р, меньшем единицы (зависящем от группы). Однако доказательство принадлежности функции (л:,Л)) классу ВМО не было приведено.

Используя методы работы [11], можно показать, что «регулярность» множества является одним из следствий пористости этого множества, то есть существования не зависящей от дуги единичной окружности оценки доли в этой дуге максимальной компоненты дополнения к предельному множеству. Таким образом, естественным образом возник вопрос о тех случаях, когда предельное множество фуксовой группы является пористым.

Кратко обсудим наиболее важные термины, использующиеся в диссертации (подробное описание используемой терминологии, а также обзор основных известных результатов, используемых в тексте диссертации, приведены в главе I)

Фуксова группа - это дискретная группа дробно-линейных (мёбиусовых) преобразований, сохраняющая круг или полуплоскость расширенной комплексной плоскости (при условии существования для группы мёбиусовых преобразований инвариантного круга дискретность группы эквивалентна разрывному действию этой группы вне ее инвариантной окружности). При этом произвольная группа О гомеоморфизмов некоторого пространства X называется действующей разрывно в X, если для любого компактного подмножества К в X условие д(К) П К ^ 0 выполняется лишь для конечного набора элементов д группы в. Регулярной областью фуксовой группы О называется наибольшее О-инвариантное подмножество расширенной комплексной плоскости, в котором группа в действует разрывно. Предельным множеством Л(О) группы мёбиусовых преобразований называется дополнение к регулярной области группы относительно расширенной комплексной плоскости.

Обозначение {х, К) отвечает евклидову расстоянию между точкой х замкнутого единичного круга и подмножеством К замкнутого единичного круга. Для любой дуги J единичной окружности символ | J | обозначает длину этой дуги.

Функция /, определенная на единичной окружности, называется функцией с ограниченной осцилляцией, если для этой функции найдется такая положительная постоянная С, что для любой дуги I единичной окружности справедлива оценка

Совокупность всех функций с ограниченной осцилляцией образует линейное пространство, называемое ВМО (boundary mean of oscillation).

Множество К на единичной окружности называется пористым, если существует такое положительное число S, что для любой дуги I единичной окружности найдется дуга J, содержащаяся в I \К и удовлетворяющая условию | J \ >S\ I \ .

Структура диссертации такова. В Главе I изложены предварительные сведения: приведены все необходимые определения и формулировки полученных ранее результатов; обсуждается используемая в диссертации терминология.