На правах рукописи

Жуковский Сергей Евгеньевич

Исследование решений уравнений и их свойств в метрических, нормированных и частично упорядоченных пространствах

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва — 2018

Работа прошла апробацию в лаборатории геометрической теории управления федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (г. Новосибирск)

Научный консультант: доктор физико-математических наук
профессор
Арутюнов Арам Владимирович

Работа представлена "__"________ 2018 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона "О науке и государственной научно-технической политике".

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. В диссертации исследуются абстрактные уравнения и включения в метрических, нормированных и частично упорядоченных пространствах. При различных предположениях регулярности рассматриваемых задач доказывается существование решений и исследуются свойства решений.

Вопросы разрешимости абстрактных уравнений и свойства множеств решений составляют одну из основных задач анализа. Утверждения о разрешимости уравнений и свойствах решений имеют основополагающее значение в теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории управления и используются во многих других разделах математики. Эти результаты важны в приложениях, так как современные математические модели различных процессов и явлений, учитывающие многочисленные факторы и параметры, сводятся к уравнениям, которые нельзя или сложно решить аналитически.

Многие задачи анализа, теории дифференциальных, интегральных, разностных и других типов уравнений можно записать в виде

$$F(x) = y, \tag{1}$$

где X и Y – метрические пространства, $F : X \to Y$ – заданное отображение, $x \in X$ – неизвестное, а $y \in Y$ – параметр. При этом для заданного $x_0 \in X$ требуется установить существование решения x уравнения (1) при y, близких к $y_0 = F(x_0)$. В случае, когда X и Y – банаховы пространства, а отображение F является гладким, исследование уравнения (1) осуществляется с помощью теоремы об обратной функции. Она гарантирует, что если оператор $A := F'(x_0)$ является сюръективным, то для всех y, близких к y_0, уравнение (1) имеет решение $x = R(y)$, которое непрерывно в некоторой окрестности точки y_0, и при некотором $c > 0$ справедлива оценка $\|x_0 - R(y)\| \leq c\|y - y_0\|$.

Уравнение (1) в окрестности точки x_0 сводится к уравнению

$$A(x - x_0) = y - y_0 - \Delta(x - x_0), \tag{2}$$

где $\Delta(x) = o(\|x\|)$. Таким образом, при каждом y мы приходим к задаче о точке совпадения двух отображений. Напомним, что *точкой совпадения* отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ называется точка $x \in X$ такая, что $\psi(x) = \varphi(x)$. Это понятие является далеким развитием понятия неподвижной точки. При этом во многих приложениях возникает необходимость искать решение уравнения (1) не просто в окрестности точки x_0, а в некотором замкнутом подмножестве $C \subset X$, $x_0 \in C$. В качестве C часто берут выпуклый замкнутый конус или, более общо, выпуклое замкнутое множество. Такие задачи встречаются в теории управления, математической экономике, теории оптимизации и т.д. Поэтому исследование вопроса существования точки совпадения, обусловленное, в частности, уравнением (2), естественно проводить в случае, когда X и Y являются метрическими пространствами, даже если исходное отображение было определено в нормированных пространствах. В уравнении (1) отображение F также может зависеть от некоторого параметра. Поэтому важным и актуальным является нахождение не просто точки совпадения при каждом значении параметра, а точки совпадения, как функции, непрерывно зависящей от этого параметра.

Теория точек совпадения активно развивалась в последнее десятилетие, начиная с работы [1], в которой в естественных предположениях было доказано существование точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений. Далее исследования из [1] были продолжены во многих

[1] *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // ДАН. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.

работах[2][3][4][5] и др. При этом рассматривались как однозначные, так и многозначные отображения, где под точкой совпадения многозначных отображений Ψ и Φ понимается точка x такая, что $\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset$.

Теория точек совпадения представляет самостоятельный математический интерес и имеет приложения. Результаты из [1] и близкие утверждения (см., например, теоремы 1 и 2 в [2], теорему 4.25[6] и др.) являются не просто обобщением теоремы об обратной функции на уравнения в метрических пространствах, но представляют собой инструмент исследования задач анализа, теории экстремальных задач, теории управления, и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Накрывающие отображения, теоремы о точках совпадения, теоремы о возмущении накрывающих отображений применялись при исследовании экстремальных задач [6][7]; для получения условий разрешимости управляемых систем, дифференциальных включений, неявных дифференциальных уравнений, вольтерровых интегральных и абстрактных уравнений [5] [8] [9]; для нахождения равновесных цен в нелинейных математических моделях рынка[10] [11] и т.д.

[2] *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. fixed Points Theory and Appl. 2009. V. 5, № 1. P. 105-127.

[3] Dontchev A.L., Frankowska, H. Lyusternik-Graves theorem and Fixed points // Proc. of Amer. Math. Soc. 2011. V. 139, Iss. 2. P. 521–534.

[4] *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифф. уравнения. 2009. Т. 5. С. 613-634.

[5] Фоменко Т.Н., К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 304–309

[6] *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. V. 1. Springer. 2005.

[7] A.Uderzo, Exact penalty functions and calmness for mathematical programming under nonlinear perturbations, Nonlin. Anal.: T.M.A., 2010, V.73, Iss.6, P. 1596–1609.

[8] *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.,* Existence of local solutions in constrained dynamic systems, Applicable Analysis, 2011, Vol. 90, Iss. 6, pp. 889 -898.

[9] *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S, Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2011. V. 75, № 3. P. 1026-1044.

[10] *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Павлова Н.Г.* Равновесные цены, как точка совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 2. С. 55–67.

[11] *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А.* Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Матем. моделирование. 2016. Т. 28, № 3. С. 3–22.

Исследование многих задач анализа, в том числе некоторых дифференциальных и интегральных уравнений, естественным образом приводит к изучению уравнений в частично упорядоченных пространствах[12] [13]. В частично упорядоченных пространствах традиционно используются классические теоремы о неподвижных точках монотонных отображений такие, как теоремы Кнастера-Тарского, Тарского-Канторовича[14] и др. Этим обусловлена актуальность исследования точек совпадения отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах.

В классических теоремах об обратной функции предполагается, что в уравнении (1) точка x_0 нормальна, т.е. линейный оператор $F'(x_0)$ является сюръективным. Естественно, возникает необходимость исследования разрешимости уравнения и обратной функции в окрестности анормальной точки. Применительно к задачам об обратной и неявной функции известны условия разрешимости уравнений уже в терминах первой и второй производной [15] [16] [17] [18]. Подробный обзор соответствующих результатов приведен в [18] .

Наиболее характерный случай анормальной точки – когда $F'(x_0) = 0$. Это приводит к необходимости исследования уравнений вида $Q(x) + \Delta(x) = y$, где $Q = \frac{1}{2}F''(x_0)$ – квадратичное отображение, а $\Delta(x) = o(\|x\|^2)$. Это приводит к необходимости исследования свойств квадратичных отображений. Квадратичные отображения являются объектом

[12]Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1962.

[13]Kantorovitch L., The method of successive approximations for functional equations // Acta Math. 1939. V. 71. P. 63–97.

[14]Granas A., Dugundji D. Fixed Point Theory. Springer-Verlag. New York. 2003.

[15]*Аваков Е.Р.*. Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47, № 5. С. 3–13.

[16]*Измаилов А.Ф.* Устойчивые особые решения нелинейных операторных уравнений с параметром // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39, № 5. С. 707–717.

[17]*Измаилов А.Ф.* Теоремы о представлении семейств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 1. С. 57–68.

[18]*Арутюнов А. В.* Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа // УМН. 2012. Т. 67. № 3. С. 3–62.

исследования многих работ [19] [20] [21]. Это связано с тем, что задачи, определяемые квадратичными отображениями возникают не только в анализе (см. [18]), но и в приложениях, и, в частности, в теоретической механике при исследовании шарнирных устройств[22] [23] [24].

Сказанное демонстрирует актуальность и важность исследования задач о точках совпадения, накрывающих отображений и порожденных ими уравнений, а также уравнений, в которых условия регулярности в заданной точке нарушаются, и, в частности, квадратичных отображений. Диссертация посвящена исследованию этих задач и разработке соответствующего математического аппарата.

Цель работы. Целью работы является качественное исследование различных уравнений и включений в метрических, нормированных и частично упорядоченных пространствах, как удовлетворяющих различным условиям невырожденности в окрестности заданной точки, так и уравнений, в которых такие условия нарушаются, а также разработка соответствующего математического аппарата.

В терминах накрывания отображений относительно множеств получить утверждения о точках совпадения как однозначных, так и многозначных отображений метрических пространств, а также соответствующие локальные теоремы с равномерными в окрестности заданной точки оценками расстояния от точки до множества точек совпадения. Получить условия единственности и неединственности точек совпадения двух

[19] *Аграчев А. А.* Квадратичные отображения в геометрической теории управления // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1988. М.: ВИНИТИ Т. 20. С. 111–205.

[20] *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Квадратичные отображения и гладкие вектор-функции: эйлеровы характеристики множеств уровня // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1989. М.: ВИНИТИ. Т. 35. С. 179–239.

[21] *Матвеев А. С.* О выпуклости образов квадратичных отображений // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10, №. 2. С. 159–196.

[22] *Ковалев М. Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, N 1. С. 45–70.

[23] *Ковалев М. Д.* Квадратичные и рычажные отображения // Тр. МИАН. 2002. Т. 239. С. 195–214.

[24] *Ковалев М. Д.* Некоторые свойства рычажных отображений // Фундамент. и прикл. матем. 2006. Т. 12, N 1. С. 129–142.

отображений в нормированных пространствах. Получить условия существования решений абстрактных включений в терминах накрывающих относительно множеств и псевдолипшицевых отображений метрических пространств. Получить условия непрерывной зависимости от параметра точки совпадения отображений и решений включений в метрических пространствах. Как для однозначных, так и для многозначных отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах, получить условия существования точек совпадения двух отображений. Исследовать свойства множества точек совпадения. Исследовать устойчивую сюръективность вещественных квадратичных отображений. Получить условия, при которых сюръективные квадратичные отображения имеют нетривиальные нули.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они могут использоваться при исследовании нелинейных абстрактных уравнений и включений, обыкновенных дифференциальных уравнений и включений, управляемых систем, задач теоретической механики, задач оптимизации с ограничениями и некоторых математических моделей экономики.

Методология и методы исследования. Применяются методы математического и функционального анализа, выпуклого анализа, теории многозначных отображений, дифференциальной топологии, алгебры, теории функций вещественной переменной и теории частично упорядоченных пространств. В диссертации разработаны методы исследования точек совпадения двух отображений, основанные на идее дискретной гомотопии, методы исследования квадратичных отображений, основанные на теории степени отображений.

Положения, выносимые на защиту. В диссертации получены следующие результаты.

1. В терминах накрывания отображений относительно множеств получены утверждения о точках совпадения отображений метрических пространств и, в частности, локальные теоремы существования точки совпадения двух отображений. Существенное отличие полученных результатов от известных состоит в том, что доказанные оценки расстояния от точки до множества точек совпадения равномерны в окрестности заданной точки. Получены необходимые и достаточные условия единственности и неединственности точек совпадения двух отображений в нормированных пространствах. Все указанные результаты получены как для обычных, так и для многозначных отображений.

2. Получены достаточные условия существования решений абстрактных включений вида $y \in \Upsilon(x, x)$, где многозначное отображение Υ является накрывающим относительно множеств по первому аргументу и псевдолипшицевым по второму. Получены оценки расстояния от заданной точки до множества решений включений. Получены необходимые и достаточные условия единственности и неединственности решения абстрактных включений.

3. Получены достаточные условия непрерывной зависимости от параметра точки совпадения двух отображений, действующих из одного метрического пространства в другое. Аналогичные результаты получены для абстрактных включений. Все указанные результаты получены как для обычных, так и для многозначных отображений.

4. Введено понятие накрываемости для отображений частично упорядоченных пространств. Получены достаточные условия существования точек совпадения двух отображений, действующих из одного частично упорядоченного пространства в другое. Получены оценки точек совпадения. Выведены условия существования минимальной точки во множе-

стве точек совпадения.

5. Введено понятие накрывания для многозначных отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах. Теоремы о существовании точек совпадения и соответствующие оценки также доказаны для многозначных отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах.

6. Исследованы свойства сюръективных вещественных квадратичных отображений. Приведен пример сюръективного квадратичного отображения, для которого существует последовательность сходящихся к нему несюръективных квадратичных отображений. Получены достаточные условия, при которых сюръективное квадратичное отображение устойчиво сюръективно, т.е. любое близкое к нему квадратичное отображение сюръективно. Доказано, что любое квадратичное отображение, действующее из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, устойчиво сюръективно. Получены утверждения о существовании обратной функции для дважды дифференцируемого отображения, первая производная которого в рассматриваемой точке равна нулю. Доказано, что любое сюръективное квадратичное отображение, действующее из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^3$, при $n \geq 5$ имеет нетривиальный нуль.

7. В качестве приложения доказанных теорем о существовании решения абстрактных включений получены условия разрешимости задачи Коши для дифференциального включения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции. В качестве приложения теорем о точках совпадения получены достаточные условия существования вектора равновесных цен для одной математической модели экономического равновесия.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты имеют строгое математическое обоснование.

Результаты диссертации заслушивались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

• семинар по теории функций действительного переменного МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика Кашина Б.С., академика Конягина С.В., профессора Голубова Б.И., профессора Дьяченко М.И.;
• семинар кафедры общих проблем управления МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора В.М. Тихомирова, профессора А.В. Фурсикова, члена-корреспондента Зеликина М.И., члена-корреспондента Протасова В.Ю.;
• семинар кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН под руководством профессора Арутюнова А.В. и профессора Буренкова В.И.;
• семинар "Некоммутативная геометрия и топология" под руководством профессора Мищенко А.С. и профессора Мануйлова В.М.;
• семинар по геометрическому анализу института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск) под руководством профессора Водопьянова С.К.;
• семинар кафедры высшей математики МФТИ под руководством профессора Половинкина Е.С.
• межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике под руководством профессора Райгородского А.М., профессора Карасёва Р.Н., профессора Вялого М.Н.;
• семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского) МИАН под руководством члена-корреспондента Бесова О.В.;
• семинар "Динамические системы и дифференциальные уравнения" МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора Давыдова А.А. и профессора Степина А.М.;
• семинар под руководством профессора Сабитова И.Х., МГУ им. М.В. Ломоносова.

Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:
• Международная конференция "Конструктивный негладкий анализ и

смежные вопросы", посвященная памяти профессора В.Ф. Демьянова (22–27 мая 2017 г., Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург);

• XIII Международная Казанская летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казанский (Приволжский) федеральный университет, 21 – 27 августа 2017);

• International Workshop on Nonlinear Analysis and Optimization 60th anniversary of Aram Arutyunov (University of Porto, April 19–21, 2017);

• Воронежская Весенняя Математическая Школа «Современные методы теории краевых задач» Понтрягинские чтения — XXVIII (Воронеж, 3 – 9 мая, 2017);

• Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (25–29 мая 2015 г., МИАН, г. Москва)

• The 13th European Control Conference (ECC 2014) (June 24–27, 2014, Strasbourg, France);

• The 11th Portuguese Conference on Automatic Control – CONTROLO 2014, Porto, Portugal, July 21th to 23th, 2014.

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертации опубликованы в 27 работах в журналах, входящих в список ВАК. Из них 24 статьи опубликованы в журналах, индексируемых реферативными базами данных "Scopus" или "Web of Science". Основные результаты диссертации и положения выносимые на защиту отражают личный вклад соискателя в его статьях, а также в совместных статьях с соавторами, и получены соискателем самостоятельно. **Личный вклад соискателя в работах с соавторами** состоит в следующем (см. стр. 30–31, список работ автора по теме диссертации): 2) – доказана разрешимость абстрактного уравнения, порожденного накрывающим и липшицевым отображениями метрических пространств; 5), 9), 18), 23), 24) – введено понятие упорядоченно накрывающего отображения, доказано существование точки совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображения, доказана возможность сведения уравнений в метрических пространствах к уравнениям в частично упорядоченных пространствах; эти результаты получены также для многозначных отображений; 6) – доказано существование нетривиальных нулей для специального класса положительно однородных отображений; 7) – проведено сравнение различных определений липшицевости многозначных отображений; 11), 12) – приведен пример сюръективного но не устойчиво сюръективного квадратичного отображения, пример квадратичного отображения, которое при кубическом возмущении не имеет обратной функции в окрестности нуля, введено понятие проективной степени квадратичного отображения и в ее терминах получены достаточные условия устойчивой сюръективности, достаточные условия существования обратной функции у возмущенного квадратичного отображения, доказана устойчивая сюръективность квадратичных отображений, действующих из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, доказано существование нетривиального нуля у сюръективных квадратичных отображений, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^3$ при $n \geq 5$; 14), 21) – доказана локальная теорема о точках совпадения с равномерной оценкой расстояния до множества точек совпадения, получена оценка расстояния между двумя множествами точек совпадения; 15) – доказана накрываемость многозначного отображения, порожденного выпуклыми неравенствами; 16), 20) – доказана непрерывная зависимость от параметра точек совпадения двух отображений и решения включения в банаховых пространствах, 17) – доказано существование точек совпадения многозначных отображений в обобщенных метрических пространствах, 19) – доказана разрешимость включения в метрических пространствах и разрешимость неявного дифференциального включения; 25) – доказана инвариантность компактных подмножеств множеств точек совпадения; 26) – доказано существовании равновесных цен в одной нелинейной модели математической экономики; 27) – доказана разрешимость уравнений в метрических пространствах и разрешимость неявных интегральных уравнений Вольтерра.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 206 страниц.

Основное содержание работы. Во **введении** приводится краткий обзор результатов, касающихся вопросов разрешимости уравнений при различных предположениях регулярности, излагается мотивация исследования, описывается структура диссертации.

В **главе 1** рассмотрены задачи о существовании точек совпадения отображений и многозначных отображений метрических пространств и задача о разрешимости включений в метрических пространствах.

В §1.1 даны различные определения понятия накрывающего отображения, определение псевдолипшицевого отображения, исследованы элементарные свойства и приведены примеры таких отображений. Приведем некоторые определения из §1.1, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства, задано число $\alpha > 0$, многозначные отображения $\Psi, \Phi : X \rightrightarrows Y$ (многозначное отображение метрических пространств каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие непустое замкнутое подмножество пространства Y), множества $U \subset X$ и $V \subset Y$. Через $B_X(x, r)$ будем обозначать замкнутый шар в X с центром в точке $x \in X$ радиуса $r \in [0, +\infty]$. Положим

$$B_Y(V, r) := \bigcup_{v \in V} B_Y(v, r), \quad r \geq 0.$$

Многозначное отображение Ψ называется α*-накрывающим относительно множеств* U и V, если

$$B_X(x, r) \subset U \ \Rightarrow\ B_Y(\Psi(x), \alpha r) \cap V \subset \Psi(B_X(x, r)).$$

Многозначное отображение Ψ называется *α-накрывающим*, если оно является α-накрывающим относительно X и Y.

Зададим в $X \times Y$ метрику по формуле

$$\rho((x,y),(u,v)) := \max\{\rho_X(x,u), \rho_Y(y,v)\} \quad \forall\, (x,y),(u,v) \in X \times Y.$$

Многозначное отображение Ψ называется *замкнутым относительно множеств U и V*, если множество $\mathrm{gph}(\Psi) \cap (U \times V)$ замкнуто в $X \times Y$. Здесь $\mathrm{gph}(\Psi)$ – график многозначного отображения Ψ.

Многозначное отображение Φ называется *псевдолипшицевым с константой Липшица $\beta \geq 0$ относительно множеств U и V*, если

$$\Phi(u) \cap V \subseteq B_Y(\Phi(x), \beta\rho_X(x,u)) \quad \forall\, x, u \in U.$$

В §1.2.1 рассмотрена задача о точках совпадения многозначных отображений. Для многозначных отображений $\Psi, \Phi : X \rightrightarrows Y$ точкой совпадения называется точка $x \in X$ такая, что

$$\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset. \tag{3}$$

Множество точек совпадения отображений Ψ и Φ обозначим через $\mathrm{coin}(\Psi, \Phi)$. Положим $\Gamma(\Psi, \Phi) := \mathrm{gph}(\Psi) \cap \mathrm{gph}(\Phi)$.

Пусть заданы $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$, точка $x_0 \in X$, замкнутое множество $D_0 \subset \Psi(x_0)$, числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Положим

$$U := B_X(x_0, R_1), \quad V := B_Y(D_0, \alpha R_2), \quad \widetilde{R} := \min\{R_1, R_2\}.$$

Основной результат §1.2.1 состоит в получении равномерной оценки расстояния от начальной точки до множества точек совпадения отображений Ψ и Φ. Сформулируем его.

Через dist_Y обозначим расстояние между подмножествами пространства Y. Положим $d(x) := \mathrm{dist}_Y(\Psi(x), \Phi(x) \cap B_Y(D_0, (\alpha - \beta)R_2))$, $\quad x \in X$,

$$R := \min\left\{ \frac{(\alpha-\beta)\widetilde{R} - d(x_0)}{2(\alpha-\beta)},\ \frac{(\alpha-\beta)R_2 - \mathrm{dist}_Y(\Phi(x_0), D_0)}{\beta} \right\}.$$

Теорема 1.9. *Предположим, что отображение Ψ является замкнутым и α-накрывающим относительно множеств U и V, отображение Φ является псевдолипшицевым с константой Липшица $\beta < \alpha$ относительно множеств U и V, хотя бы один из графиков* $\mathrm{gph}(\Psi)$ *или* $\mathrm{gph}(\Phi)$ *является полным пространством. Если*

$$d(x_0) < (\alpha - \beta)R_1, \quad \mathrm{dist}_Y(\Phi(x_0), D_0) < (\alpha - \beta)R_2,$$

то $\mathrm{coin}(\Psi, \Phi) \neq \emptyset$ *и* $\mathrm{dist}_X(x, \mathrm{coin}(\Psi, \Phi)) \leq \dfrac{d(x)}{\alpha - \beta} < +\infty$ *для всех x из открытой R-окрестности точки x_0.*

Теорема 1.9 не только гарантирует существование равномерной оценки до множества точек совпадения, но и существование точек совпадения в предположениях более слабых, чем предположения из [2].

В §1.2.2 рассматривается задача о разрешимости включения

$$y \in \Upsilon(x, x), \tag{4}$$

где $y \in Y$ – заданная точка, $\Upsilon : X \times X \rightrightarrows Y$ – заданное многозначное отображение. Основной результат §1.2.2 состоит в получении достаточных условий разрешимости включения (4). Сформулируем его.

Пусть заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $R \in [0, +\infty]$ и точки $u_0 \in X$, $y_0 \in \Upsilon(u_0, u_0)$. Положим $U := B_X(u_0, R)$.

Теорема 1.22. *Предположим, что для любого $x_2 \in U$ отображение $\Upsilon(\cdot, x_2)$ является α-накрывающим относительно множеств U и $\{y\}$; для любого $x_1 \in U$ отображение $\Upsilon(x_1, \cdot)$ является псевдолипшицевым с константой β относительно множеств U и $\{y\}$; шар U является полным метрическим пространством и отображение Υ замкнуто.*

Тогда если $\beta < \alpha$ и $\rho_Y(y_0, y) \leq (\alpha - \beta)R$, то

$$\exists \xi \in U : \quad y \in \Upsilon(\xi, \xi), \quad \rho_X(\xi, u_0) \leq \frac{\rho_Y(y_0, y)}{\alpha - \beta}.$$

В случае, если Υ является “однозначным” отображением, включение (4) представляет собой уравнение вида $y = \Upsilon(x, x)$. Условия разрешимости таких уравнений в терминах накрывающих и липшицевых отображений были доказаны, например, в работе[4]. В ней получены условия существования решения при всех y, близких к заданному. В §1.2.2 получены условия разрешимости задачи (4) лишь для фиксированного $y \in Y$, что позволило ослабить предположения на отображение Υ.

В §1.3 исследован вопрос о единственности и неединственности решения задачи о точке совпадения (3) и включения (4) в случае, когда X – выпуклое подмножество нормированного пространства. Сформулируем основной результат этого параграфа.

Пусть метрическое пространство X является выпуклым подмножеством нормированного пространства $(L, \|\cdot\|)$, а метрика в X определена как $\rho_X(x,u) \equiv \|x-u\|$. Пусть заданы числа $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$.

Теорема 1.25. *Предположим, что многозначное отображение* $\Psi : X \rightrightarrows Y$ *является* α*-накрывающим и замкнутым, многозначное отображение* $\Phi : X \rightrightarrows Y$ *является липшицевым с константой* $\beta < \alpha$, *и хотя бы один из графиков* $\operatorname{gph}(\Psi)$ *или* $\operatorname{gph}(\Phi)$ *является полным. Если*

$$\exists\, \xi_* \in \operatorname{coin}(\Psi, \Phi), \quad \exists\, x \in X : \quad x \neq \xi_*, \quad \Psi(x) \cap \Phi(\xi_*) \neq \emptyset, \tag{5}$$

то для любых $y \in \Psi(x) \cap \Phi(\xi_*)$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует точка* $(\xi, \eta) \in \Gamma(\Psi, \Phi)$ *такая, что* $\xi \neq \xi_*$ *и*

$$\|\xi - x\| \leq \frac{\beta}{\alpha-\beta}\|\xi_* - x\| + \varepsilon, \quad \|\xi - \xi_*\| \geq \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\|\xi_* - x\| - \varepsilon,$$

$$\rho_Y(\eta, y) \leq \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\|\xi_* - x\| + \varepsilon.$$

На основании этого результата в §1.3 получены необходимые и достаточные условия единственности точки совпадения накрывающего и липшицевого отображений. В частном случае, когда $Y = X$, и множество X замкнуто, пространство L является банаховым и $\Psi(x) \equiv \{x\}$, полученный результат совпадает с теоремой 7 из[25]. Случай, когда метрическое пространство не обязательно является выпуклым подмножеством

[25] *Saint Raymond J.* Multivalued contractions // Set-Valued Anal. 1994. V. 2, №. 4. P. 559–571.

нормированного пространства, был рассмотрен в[26]. Там было показано, что утверждение теоремы 1.25 выполняется лишь при дополнительном предположении $2\beta < \alpha$, которое в метрическом пространстве ослабить нельзя.

Приведем аналогичный результат из §1.3 для включения (4).

Теорема 1.34. *Пусть пространство X полно, отображение Υ замкнуто, для любого $x \in X$ отображение $\Upsilon(\cdot, x)$ является α-накрывающим, отображение $\Upsilon(x, \cdot)$ является β-липшицевым, и $\beta < \alpha$. Пусть $\xi_* \in X$ – решение включения (4), т.е. $y \in \Upsilon(\xi_*, \xi_*)$. Если*

$$\exists\, x \in X : \quad x \neq \xi_*, \quad y \in \Upsilon(x, \xi_*),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\xi \neq \xi_*$ такое, что $y \in \Upsilon(\xi, \xi)$ и

$$\|\xi - x\| \leq \frac{\beta}{\alpha - \beta}\|\xi_* - x\| + \varepsilon, \quad \|\xi - \xi_*\| \geq \frac{\alpha - \beta}{\alpha}\|\xi_* - x\| - \varepsilon.$$

В §1.4 рассмотрена задача о непрерывной зависимости точек совпадения от параметра. Для этого введено понятие сильно накрывающего отображения. Прежде чем сформулировать соответствующее определение, прокомментируем некоторые свойства накрывающих отображений.

Очевидно, что $\Psi : X \rightrightarrows Y$ является α-накрывающим тогда и только тогда, когда существует отображение $\chi : \mathrm{gph}(\Psi) \times Y \to X$ такое, что

- $y \in \Psi(\chi(x^*, y^*, y))\ \ \forall\, (x^*, y^*) \in \mathrm{gph}(\Psi),\ \forall\, y \in Y$;
- $\rho_X\big(x^*, \chi(x^*, y^*, y)\big) \leq \alpha^{-1}\rho_Y(y^*, y)\ \ \forall\, (x^*, y^*) \in \mathrm{gph}(\Psi),\ \forall\, y \in Y.$

Простые примеры показывают, что если отображение Ψ является накрывающим, то отображение χ, удовлетворяющее этим свойствам, может быть неединственным. Естественно, возникает вопрос: можно ли для заданного α-накрывающего отображения Ψ выбрать отображение χ непрерывным или хотя бы непрерывным по переменной y? Известен

[26] *Арутюнов А. В., Гельман Б. Д.* О структуре множества точек совпадения // Мат. сборник. 2015. Т. 206, № 3. С. 35–56.

пример[27], показывающий, что существует отображение Ψ, для которого все соответствующие функции χ разрывны. В связи с этим, представляется естественным выделить класс отображений Ψ, для которых указанное непрерывное решение $\chi(\cdot)$ включения $y \in \Psi(x)$ существует. При этом мы рассмотрим более общую ситуацию, а именно, когда отображение $\Psi : X \times \Sigma \rightrightarrows Y$ зависит от двух переменных x, σ, где элемент σ топологического пространства Σ играет роль параметра, а накрывание рассматривается относительно заданных множеств $U \subset X$, $V \subset Y$.

Положим $\Pi_\Sigma := \{(x^*, \sigma, y^*, y) \in \mathrm{gph}(\Psi) \times V \colon B_X(x^*, \alpha^{-1}\rho_Y(y^*, y)) \subset U\}$. Отображение $\Psi : X \times \Sigma \rightrightarrows Y$ назовем *сильно α-накрывающим (по x) относительно множеств U и V*, если существует непрерывное отображение $\chi : \Pi_\Sigma \to U$ такое, что

- $y \in \Psi(\chi(x^*, \sigma, y^*, y), \sigma)\ \ \forall\, (x^*, \sigma, y^*, y)$;
- $\rho_X\big(x^*, \chi(x^*, \sigma, y^*, y)\big) \le \alpha^{-1}\rho_Y(y^*, y)\ \ \forall\, (x^*, \sigma, y^*, y)$.

Отображение $\Phi \colon X \times \Sigma \rightrightarrows Y$ назовем *сильно β-липшицевым (по x)*, если существует непрерывное отображение $\varphi \colon \mathrm{gph}(\Phi) \times X \to Y$ такое, что

- $\varphi(x^*, \sigma, z^*, x) \in \Phi(x, \sigma)\ \ \forall\, (x^*, \sigma, z^*, x)$;
- $\rho_X\big(z^*, \varphi(x^*, \sigma, z^*, x)\big) \le \beta\rho_Y(x^*, x)\ \ \forall\, (x^*, \sigma, z^*, x)$.

В §1.4.1 доказано следующее утверждение о непрерывной зависимости точки совпадения от параметра. Пусть заданы $r_0 \in [0, \infty]$, $\delta \in [0, r_0]$, $\varepsilon \in [0, r_0]$ и точки $u_0 \in X$, $v_0 \in Y$. Положим

$$U := B_X(u_0, r_0), \quad V := B_Y(v_0, \alpha r_0),$$

$$G := \Big\{ (x^*, \sigma, y^*, z^*) \in B_X(u_0, \delta) \times \Sigma \times B_Y(v_0, \alpha\varepsilon) \times Y :$$

[27] *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Существование обратных отображений и их свойства // Тр. Мат. Инст. им. В.А. Стеклова, 271 (2010), 12-22.

$$y^* \in \Psi(x^*, \sigma), \quad z^* \in \Phi(x^*, \sigma), \quad \rho_Y(y^*, z^*) \le (\alpha - \beta)\min\{r_0 - \varepsilon,\, r_0 - \delta\}\Big\}.$$

Теорема 1.36. *Предположим, что отображение $\Psi : X \times \Sigma \rightrightarrows Y$ является сильно α-накрывающим относительно множеств U и V, а отображение $\Psi(\cdot, \sigma)$ замкнуто относительно U и V при любом $\sigma \in \Sigma$; отображение $\Phi : U \times \Sigma \rightrightarrows Y$ сильно β-липшицево, $\beta < \alpha$; при любом $\sigma \in \Sigma$ хотя бы один из графиков $\mathrm{gph}(\Psi(\cdot, \sigma))$ или $\mathrm{gph}(\Phi(\cdot, \sigma))$ является полным пространством.*

Тогда существует непрерывная функция $\xi : G \to X$ такая, что

$$\Psi\big(\xi(g), \sigma\big) \cap \Phi\big(\xi(g), \sigma\big) \neq \emptyset, \quad \rho_X\big(x^*, \xi(g)\big) \le \frac{\rho_Y(y^*, z^*)}{\alpha - \beta}$$

для любых $g = (x^*, \sigma, y^*, z^*) \in G$.

В §1.4.2 доказано утверждение о непрерывной зависимости решения включения от параметра. Пусть задано отображение $\Upsilon : X \times X \rightrightarrows Y$.

Теорема 1.41. *Предположим, что для любого $x_2 \in X$ отображение $\Upsilon(\cdot, x_2)$ является сильно α-накрывающим, для любого $x_1 \in X$ отображение $\Upsilon(x_1, \cdot)$ является сильно β-липшицевым с константой $\beta < \alpha$, пространство X полно, при любом $\sigma \in \Sigma$ отображение Υ замкнуто. Тогда отображение $\Psi : X \rightrightarrows Y$, $\Psi(x) := \Upsilon(x, x)$, $x \in X$, является сильно $(\alpha - \beta)$-накрывающим.*

Теорема о липшицевых возмущениях накрывающих отображений[28] гласит, что *если метрическое пространство X полно, Y является нормированным пространством, отображение $\psi : X \to Y$ является α-накрывающим и непрерывным, а отображение $\varphi : X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$, то отображение $\Psi + \Phi$ является $(\alpha - \beta)$-накрывающим.*

Из теоремы 1.41 вытекает аналогичное утверждение о возмущении сильно накрывающих отображений: *если метрическое пространство X полно, Y является нормированным пространством, отображение ψ :*

[28] *Дмитрук А.В., Милютин А.А, Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35, № 6. С. 11–46.

$X \to Y$ является сильно α-накрывающим и непрерывным, а отображение $\varphi : X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$, то отображение $\Psi + \Phi$ является сильно $(\alpha - \beta)$-накрывающим.

Глава 2 посвящена проблеме существования точек совпадения отображений в случае, когда X и Y – частично упорядоченные пространства. Оказывается, что концепция накрывания может быть трансформирована применительно и к отображениям, действующим в частично упорядоченных пространствах. В результате удается получить утверждения о точках совпадения накрывающего и монотонного отображений, включающие в себя в качестве частных случаев классические утверждения Г. Биркгофа, А. Тарского, Б. Кнастера, Л.В. Канторовича, Р.Е. Смитсона о неподвижных точках монотонных отображений [14] [29].

В §2.1 приведены определения основных понятий, связанных с частично упорядоченными пространствами. В §2.2.1 введено понятие упорядоченного накрывания, в §2.2.2 получены достаточные условия существования точки совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображений.

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $(X, \preceq), (Y, \preceq)$, отображения $\psi, \varphi : X \to Y$. Положим

$$O_X(x) := \{u \in X : u \preceq x\}, \quad x \in X.$$

Отображение $\psi : X \to Y$ будем называть *упорядоченно накрывающим множество* $W \subset Y$, если для любого $x \in X$ имеет место включение

$$O_Y\big(\psi(x)\big) \cap W \subset \psi\big(O_X(x)\big).$$

Если $W = Y$, то упорядоченно накрывающее множество W отображение ψ будем называть *упорядоченно накрывающим.* Отображение φ называется монотонным, если $\varphi(x_1) \preceq \varphi(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 \preceq x_2$.

[29] *R.E. Smithson.* Fixed points of order preserving multifunctions // Proc. Amer. Soc. 1971. 27, № 1. P. 304-310.

Для заданных множеств $U \subset X$ и $W \subset Y$ через $\mathcal{S}(\psi, \varphi, U, W)$ обозначим множество всех цепей $S \subset X$ таких, что

$$S \subset U, \quad \psi(S) \subset W, \quad \psi(x) \succeq \varphi(x) \quad \forall\, x \in S,$$

$$\psi(x_1) \preceq \varphi(x_2) \quad \forall\, x_1,\, x_2 \in S: \;\; x_1 \prec x_2.$$

Теорема 2.7. *Пусть существует такой элемент* $x_0 \in X$, *что* $\psi(x_0) \succeq \varphi(x_0)$. *Предположим, что отображение* φ *монотонно, отображение* ψ *упорядоченно накрывает множество* $W = \varphi(O_X(x_0))$, *для произвольной цепи* $S \in \mathcal{S}(\psi, \varphi, O_X(x_0), W)$ *существует нижняя граница* $u \in X$ *цепи* S *такая, что* $\psi(u) \succeq \varphi(u)$.

Тогда $O_X(x_0) \cap \mathrm{coin}(\psi, \varphi) \neq \emptyset$ *и во множестве* $O_X(x_0) \cap \mathrm{coin}(\psi, \varphi)$ *существует минимальный элемент (т.е. точка* $\xi_* \in O_X(x_0) \cap \mathrm{coin}(\psi, \varphi)$ *такая, что* $\xi \not\prec \xi_* \;\; \forall \;\; \xi \in O_X(x_0) \cap \mathrm{coin}(\psi, \varphi)$ *).*

Теорема Кнастера-Тарского [14] утверждает, что если пространство $(X, \preceq)$ упорядоченно полно (т.е. любая цепь в этом пространстве имеет точную нижнюю границу), отображение $\varphi : X \to X$ монотонно и существует $x_0 \in X$ такой, что $x_0 \succeq \varphi(x_0)$, то множество неподвижных точек отображения φ непусто, и в нем существует наименьший элемент. Этот результат вытекает из теоремы 2.7 при $Y = X$, $\psi(x) \equiv x$.

Наряду с теоремой 2.7 в §2.2.2 получены достаточные условия существования наименьшего элемента во множестве $\mathrm{coin}(\psi, \varphi)$. Приведена модификация теоремы 2.7, позволяющая находить точку совпадения в виде точной нижней границы последовательности итераций.

В §2.3.1 введено понятие упорядоченно накрывающего многозначного отображения. Многозначное отображение $\Psi : X \rightrightarrows Y$ будем называть *упорядоченно накрывающим множество* $W \subset Y$, если для любого $x \in X$ имеет место включение

$$O_Y\big(\Psi(x)\big) \cap W \subset \Psi\big(O_X(x)\big).$$

Если $W = Y$, то упорядоченно накрывающее множество W многозначное отображение Ψ будем называть *упорядоченно накрывающим.*

Отображение $\Phi : X \rightrightarrows Y$ принято называть *монотонным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $y_2 \in \Phi(x_2)$, из $x_1 \preceq x_2$ следует существование такого $y_1 \in \Phi(x_1)$, что $y_1 \preceq y_2$. Отображение $\Phi : X \rightrightarrows Y$ принято называть *антитонным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $y_2 \in \Phi(x_2)$, из $x_1 \preceq x_2$ следует существование такого $y_1 \in \Phi(x_1)$, что $y_2 \preceq y_1$.

В §2.3.1 получены достаточные условия существования точек совпадения многозначных отображений, действующих из одного частично упорядоченного пространства в другое. Сформулируем их.

Пусть заданы многозначные отображения $\Psi, \Phi : X \rightrightarrows Y$.

Теорема 2.23. *Предположим, что существуют $x_0 \in X$, $y_0 \in \Psi(x_0)$, $z_0 \in \Phi(x_0)$ такие, что $y_0 \succeq z_0$, отображение Φ монотонно, отображение Ψ является упорядоченно накрывающим множество $W := \Phi(O_X(x_0))$, для любых селекторов $\psi, \varphi : X \to Y$ отображений Ψ, Φ, соответственно, и любой цепи $S \in \mathcal{S}\big(\psi, \varphi, O_X(x_0), W\big)$ существуют нижние границы $u \in X$, $y \in \Psi(u)$, $z \in \Phi(u)$ цепей S, $\psi(S)$, $\varphi(S)$, соответственно, такие, что $y \succeq z$. Тогда $O_X(x_0) \cap \operatorname{coin}(\Psi, \Phi) \neq \emptyset$.*

Частным случаем теоремы 2.23, когда $X = Y$, а отображение Ψ – тождественное, является теорема Смитсона[29] о неподвижной точке.

Наряду с теоремой 2.23 в §2.3.2 приведена ее модификация, позволяющая находить точку совпадения отображений Ψ и Φ в виде точной нижней границы последовательности итераций.

В §2.4 получены достаточные условия разрешимости включений. Пусть задано отображение $\Upsilon : X \times X \rightrightarrows Y$ и точка $y \in Y$.

Теорема 2.24. *Пусть существуют точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in \Upsilon(x_0, x_0)$ такие, что $y \preceq y_0$. Предположим, что при любом $x_1 \in X$ отображение $\Upsilon(x_1, \cdot)$ антитонно; при любом $x_2 \in X$ отображение $\Upsilon(\cdot, x_2)$ упорядоченно накрывает множество $\{y\}$; для любых монотонных последовательностей $\{x_j^1\} \subset X$, $\{x_j^2\} \subset X$ таких, что $\Upsilon(x_j^1, x_j^2) = y$ при каж-*

дом j, существуют $\inf\{x_j^1\}$ *и* $\inf\{x_j^2\}$, *причем* $\Upsilon(\inf\{x_j^1\}, \inf\{x_j^2\}) = y$. *Тогда существует точка* $\xi \in X$ *такая, что* $y \in \Upsilon(\xi, \xi)$ *и* $\xi \preceq x_0$.

В §2.5 показано, что из полученных в главе 2 результатов для отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах, могут быть выведены известные теоремы о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих в метрических пространствах, (а, следовательно, и классические теоремы существования неподвижных точек для сжимающих отображений).

Для этого используется известное [30][31] определение порядка в множествах $X \times \mathbb{R}_+$, $Y \times \mathbb{R}_+$, где X, Y — заданные метрические пространства. В §2.5 с помощью этого построения теорема 1 из [1] и теорема 1 из [2] о точках совпадения отображений метрических пространств выводятся из доказанной в §2.2 теоремы 2.7 о точках совпадения отображений частично упорядоченных пространств. Кроме того, теорема 2 из [1] и теорема 2 в [2] о точках совпадения многозначных отображений метрических пространств выводятся из теоремы 2.23 о точках совпадения многозначных отображений частично упорядоченных пространств.

Глава 3 посвящена исследованию вещественных сюръективных квадратичных отображений.

В §3.1 приводится определение квадратичного отображения, формулируются известные утверждения о свойствах квадратичных отображений, приведен ряд вопросов, исследованию которых посвящена третья глава. Сформулируем их.

Будем называть квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *устойчиво сюръективным*[32], если существует $\varepsilon > 0$ такое, что отображение $(Q +$

[30] *DeMarr R.* Partially ordered spaces and metric spaces // The American Math. Monthly. 1965. V. 72, №. 6. P. 628–631.
[31] *Bishop E., Phelps R.R.* The support functionals of a convex set // Proc. Symp. Pure Math. 1963. V. 7: Convexity. Amer. Math. Soc., P. 27–35.
[32] *Аграчев А. А.* Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. 1988. М.: ВИНИТИ. Т. 26. С. 85–124.

$\Delta)$ сюръективно для любого квадратичного отображения $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, для которого $\|\Delta\| < \varepsilon$. Здесь $\|\Delta\| = \sup\{|\Delta(x)| : |x| \le 1\}$.

Вопрос 1. Является ли любое сюръективное квадратичное отображение устойчиво сюръективным?

Пусть задано отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такое, что $G(0) = 0$ и некоторая окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^k$. Будем говорить, что отображение $R : U \to \mathbb{R}^n$ является *обратным (правым обратным)* к отображению G, если $G(R(y)) \equiv y$, $R(0) = 0$ и R непрерывно в нуле.

Вопрос 2. Пусть квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ сюръективно, а $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – непрерывное отображение такое, что

$$\frac{|\Delta(x)|}{|x|^2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{6}$$

Существуют ли окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^k$ и обратное к $(Q + \Delta)$ отображение $R : U \to \mathbb{R}^n$?

Вопрос 3. Пусть k задано. Каково наименьшее натуральное $N(k)$ такое, что для любого $n \ge N(k)$ у любого сюръективного квадратичного отображения $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ существует нетривиальный нуль?

Отрицательный ответ на первый вопрос дается в §3.2. В этом параграфе показано, что квадратичные отображения $Q, \Delta : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$,

$$Q(x) \equiv (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, 2x_1x_3, 2x_2x_3, x_4^2 - x_5^2, 2x_4x_5),$$

$$\Delta(x) \equiv (0, -2x_2x_5, 2x_1x_5, 0, 0)$$

обладают следующим свойством: отображение Q сюръективно, но для любого $\varepsilon \ne 0$ квадратичное отображение $Q + \varepsilon\Delta$ несюръективно. Таким образом, показано, что сюръективное квадратичное отображение не обязательно является устойчиво сюръективным.

В §3.2 введено понятие степени квадратичного отображения. Обозначим через S^{n-1} единичную сферу с центром в нуле в $\mathbb{R}^n$, а через O_ε –

открытую ε-окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$. Через $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ обозначим оператор нормировки, т.е. $\mathcal{N}(y) \equiv y/|y|$, а через $Q\big|_{S^{n-1}}$ – сужение квадратичного отображения Q на S^{n-1}.

Пусть квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не имеет нетривиальных нулей. Обозначим через $Q_P : \mathbb{R}P^{n-1} \to S^{n-1}$ отображение, которое каждому элементу χ, принадлежащему $(n-1)$-мерному проективному пространству $\mathbb{R}P^{n-1}$, ставит в соответствие значение $\mathcal{N}(Q(x))$, где $x \in \mathbb{R}^n$ – произвольный элемент, принадлежащий классу эквивалентности χ. Здесь и далее мы отождествляем точку χ из $\mathbb{R}P^{n-1}$ с соответствующей прямой из $\mathbb{R}^n$, у которой "выколот" нуль. Отображение Q_P определено корректно, поскольку отображение Q является четным и не имеет нетривиальных нулей.

Проективной степенью mod2 *квадратичного отображения* Q будем называть топологическую степень mod2 отображения Q_P и обозначать ее через $\deg_2^P Q$. Если n четно, то гладкое компактное многообразие $\mathbb{R}P^{n-1}$ ориентируемо, и, значит, топологическая степень отображения Q_P определена. Это число мы будем называть *проективной степенью квадратичного отображения* Q и обозначать через $\deg^P Q$.

В терминах степени квадратичного отображения доказаны следующие условия устойчивой сюръективности.

Теорема 3.17. *Пусть n четно и квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не имеет нетривиальных нулей. Если $\deg^P Q \neq 0$, то Q устойчиво сюръективно.*

Теорема 3.18. *Пусть квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не имеет нетривиальных нулей. Если $\deg_2^P Q \neq 0$, то Q устойчиво сюръективно.*

Отрицательный ответ на второй вопрос дается в §3.3. Показано, что для отображений $Q, \Delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$Q(x) \equiv (x_1^2+x_2^2-x_3^2, 2x_1x_3, 2x_2x_3), \quad \Delta(x) \equiv (0, -2x_2(x_1^2+x_2^2), 2x_1(x_1^2+x_2^2))$$

уравнение $Q(x)+\Delta(x) = (\varepsilon^2, 0, 0)$ не имеет решений ни при каком $\varepsilon \neq 0$, несмотря на то, что отображение Q сюръективно.

В §3.3 приводятся утверждения, выделяющие класс отображений, для которых ответ на вопрос 2 является положительным.

Теорема 3.21. *Пусть n четно, квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не имеет нетривиальных нулей. Если $\deg^P Q \neq 0$, то для любого непрерывного отображения $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию (6), существуют числа $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ и обратное к $(Q + \Delta)$ отображение $R : O_\varepsilon \to \mathbb{R}^n$ такие, что $|R(y)| \leq \alpha\sqrt{|y|} \quad \forall\, y \in O_\varepsilon$.* Здесь O_ε – ε-окрестность нуля в $\mathbb{R}^k$.

В §3.4 дается ответ на вопрос 1 для квадратичных отображений, действующих из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$. Сформулируем его.

Теорема 3.25. *Пусть квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ сюръективно. Тогда Q устойчиво сюръективно.*

В §3.5 дается ответ на вопрос 3 для квадратичных отображений, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^3$. Сформулируем его.

Теорема 3.36. *Пусть $n \geq 5$. Тогда любое сюръективное квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ имеет нетривиальный нуль.*

Из теоремы 3.36 следует, что $N(3) = 5$, поскольку расслоение Хопфа сюръективно и не имеет нетривиальных нулей. Это дает ответ на третий вопрос при $k = 3$. Известно[18], что справедлива оценка $N(k) \leq k^2 \ \forall k$. Таким образом, теорема 3.36 уточняет лемму 5.5 из[18] при $k = 3$.

В **главе 4** рассматриваются приложения полученных в предыдущих главах результатов.

В §4.1 в качестве приложения теоремы 1.36 о непрерывной зависимости точки совпадения от параметра выводятся достаточные условия существования неявной функции. Рассмотрена следующая задача.

Пусть X и Y – банаховы пространства, Σ – топологическое пространство, заданы выпуклые замкнутые множества $K \subset X$ и $C \subset Y$, отображение $f : K \times \Sigma \to Y$, точки $x_0 \in K$, $\sigma_0 \in \Sigma$ и $y_0 = f(x_0, \sigma_0) \in C$. Требуется получить условия, при которых при каждом значении параметра σ из некоторой окрестности точки σ_0 существует решение задачи

$$f(x, \sigma) \in C, \quad x \in K, \tag{7}$$

т.е. точка $x = x(\sigma) \in K$ такая, что $f(x, \sigma) \in C$. Для этой задачи в §4.1 доказано, что при естественных предположениях гладкости функции f при условии регулярности Робинсона существует непрерывное решение $x = x(\sigma)$ задачи (7), удовлетворяющее стандартной линейной оценке. Это утверждение аналогично теореме о неявной функции из [33].

В §4.2 утверждения о разрешимости абстрактных включений из главы 1 применены для исследования неявных дифференциальных включений. Рассмотрена следующая задача. Пусть заданы отрезок $[t_0, t_1]$, замкнутое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и многозначное отображение $F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^k$, удовлетворяющее следующим условиям: множество $F(t, x, u) \subset \mathbb{R}^k$ компактно при всех $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$, при п.в. $t \in [t_0, t_1]$; многозначное отображение $F(\cdot, x, u)$ измеримо при всех $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$; многозначное отображение $F(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно для п.в. $t \in [t_0, t_1]$; для любого $d \geq 0$ существует $m \geq 0$ такое, что

$$|x| \leq d \text{ и } |u| \leq d \Rightarrow |y| \leq m \quad \forall y \in F(t, x, u), \quad \dot{\forall} t \in [t_0, t_1].$$

Рассмотрим неявное дифференциальное включение

$$0 \in F(t, x, \dot{x}), \quad \dot{x}(t) \in \Omega, \quad x(t_0) = a. \tag{8}$$

Оно называется *локально разрешимым*, если существуют $\varepsilon > 0$ и абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ такие, что $0 \in F(t, x(t), \dot{x}(t))$, $\dot{x}(t) \in \Omega$ для п.в. $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ и $x(t_0) = a$.

[33] *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г.* Теорема о неявной функции для включений // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 5-6, С. 764–769.

Пусть заданы измеримые существенно ограниченные функции $u_0 : [t_0, t_1] \to \Omega$, $y_0 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^k$ такие, что

$$y_0(t) \in F\left(t, a + \int\limits_{t_0}^{t} u_0(s)\, ds, u_0(t)\right) \quad \dot{\forall}\, t \in [t_0, t_1].$$

Для заданных $R > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [t_0, t_1]$ положим

$$d_0 := \operatorname*{esssup}_{t \in [t_0, t_1]} |y_0(t)|, \quad x_0(t) := a + \int\limits_{t_0}^{t} u_0(s)\, ds, \quad U(t) := B_\Omega(u_0(t), R).$$

В §4.2 из теоремы 1.22 о существовании решений абстрактных включений в метрических пространствах выведено утверждение, гарантирующее разрешимость задачи (8). Доказано, что *если многозначное отображение* $F(t, x, \cdot)$ *является* α*-накрывающим относительно множеств* $U(t)$ *и* $\{0\}$ *для п.в.* $t \in [t_0, t_1]$ *и для всех* $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0(t), R(t - t_0))$, *многозначное отображение* $F(t, \cdot, u)$ *является псевдолипшицевым относительно* $B_{\mathbb{R}^n}(x_0(t), R(t - t_0))$ *и* $\{0\}$ *для п.в.* $t \in [t_0, t_1]$ *и для всех* $u \in U(t)$, *и* $d_0 < \alpha R$, *то включение (8) локально разрешимо.*

В §4.3 теоремы о точках совпадения применены для вывода достаточных условий существования равновесных цен в одной модели экономического равновесия.

Пусть $D, S : \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ \to \mathbb{R}^k$ – заданные функции спроса и предложения, где $\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+ := \{p = (p_1, ..., p_n) : p_1 > 0, ..., p_n > 0\}$. Вектор $p \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^n_+$ называется *вектором равновесных цен*, если $S(p) = D(p)$. Для некоторых классов рациональных функций спроса и предложения S и D с помощью теорем о точках совпадения получены достаточные условия существования равновесных цен.

Работы автора по теме диссертации

1) *Zhukovskiy S. E.* On continuous selections of finite-valued set-valued mappings // Eurasian Math. J. 2018. V. 9, No. 1. P. 93–99.
2) *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Точки совпадения отображений в пространствах с векторной метрикой и их приложения к дифференциальным уравнениям и управляемым системам // Дифф. уравн. 2017. Т. 53, № 11. С. 1473–1481.
3) *Жуковский С. Е.* Линейно-квадратичные гомеоморфизмы // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2017. Т. 22, № 6-1. С. 1293–1297.
4) *Жуковский С. Е.* Минимумы функционалов и неявные дифференциальные уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2017. Т. 22, № 6-1. С. 1298–1303.
5) *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Covering Mappings and Their Applications // Тез. докл. междунар. конф. «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посв. памяти проф. В.Ф. Демьянова. 2017. С. 15–17.
6) *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Карамзин Д. Ю.* Некоторые свойства двумерных сюръективных p-однородных отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 7. С. 1083–1092.
7) *Arutyunov A. V., Vartapetov S. A., Zhukovskiy S. E.* Some Properties and Applications of the Hausdorff Distance // J. of Opt. Theory Appl. 2016. V. 171, No. 2. P. 527—535.
8) *Жуковский С. Е.* О накрываемости линейных операторов на полиэдральных множествах // Изв. вузов. Матем. 2016. № 9 С. 74–77.
9) *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.
10) *Zhukovskiy S. E.* Comparison of some types of locally covering mappings // Fixed Point Theory. 2016. V. 17, No. 1. P. 215-222.
11) *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Свойства сюръективных вещественных квадратичных отображений // Матем. сб. 2016. Т. 207, № 9. С. 3–34.
12) *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* О сюръективных квадратичных отображениях // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 181-–185.
13) *Zhukovskiy S.* On Covering Properties in Variational Analysis and Optimization // Set-Val. Var. Anal. 2015. V. 23, No. 3. P. 415–424.
14) *Arutyunov A. V., Avakov E. R., Zhukovsky S. E.* Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points // SIAM J. Opt. 2015. V. 25, No. 2. P. 807–828.
15) *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Об оценках решений систем выпуклых неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 9. С. 1486–1492.

16) *Arutyunov A. V., Zhukovskiy S. E.* Continuous Dependence of Coincidence Points on a Parameter // Set-Val. Var. Anal. 2015. V. 23, No. 1, P. 23–41.

17) *Arutyunov A. V., Zhukovskiy S. E.* Coincidence Points in Generalized Metric Spaces // Set-Val. Var. Anal. 2015. V. 23, No. 2. P. 355–373.

18) *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topol. Appl. 2015. V. 179. P. 13–33.

19) *Arutyunov A. V., de Oliveira V. A., Pereira F. L.,* Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. On the solvability of implicit differential inclusions // Appl. Anal. 2015. V. 94. No. 1. P. 129–143.

20) *Арутюнов А. В. Жуковский С. Е.* О непрерывности обратных отображений для липшицевых возмущений накрывающих отображений // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 4. С. 93–99.

21) *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Возмущение решений задачи о точках совпадения двух отображений // ДАН. 2014. Т. 456. № 5. С. 514–517.

22) *Жуковский С. Е.* Сравнение различных определений накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 376–379.

23) *Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.* Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // ДАН. 2013. Т. 453, № 6, С. 595–598

24) *Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // ДАН. 2013. Т. 453, № 5. С. 475–478.

25) *Гельман Б. Д., Жуковский С. Е.* Накрывающие отображения пространств компактных подмножеств // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 4. С. 530–536.

26) *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е. Павлова Н. Г.* Равновесные цены, как точка совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 2. С. 55–67.

27) *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S, Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2011. V. 75, № 3. P. 1026-1044.