

Лучников Илья Андреевич

**Тензорные сети и машинное обучение для
динамических и стационарных квантовых систем**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа прошла апробацию в лаборатории квантовой теории информации Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией квантовой теории информации

Филиппов Сергей Николаевич

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита диссертации состоится 07 сентября 2020 г. в 10:00 на заседании диссертационного совета ЛФИ. 01.04.02.004 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) <https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fizikomatematicheskie-nauki.php>

Работа представлена «02» июня 2020 г. в Аттестационную комиссию Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Современная теоретическая физика предоставляет большое количество инструментов для описания сложных природных явлений. Практически для любого природного явления существует упрощенная физическая модель, которая допускает точное решение. На практике такие точно решаемые модели очень полезны, т.к. позволяют качественно описать поведение любой природной системы. Если качественного, идеализированного описания недостаточно, точно решаемая модель может стать отправной точкой для более глубокого изучения. Для уточнения описания можно использовать разложение по малому параметру, который отличает реальную систему от идеализированной. Такой универсальный подход используется во всех разделах теоретической физики. В квантовой механике все основные результаты опираются именно на такой подход. Существует большое количество *точно* решаемых моделей квантовой механики, таких как модель атома водорода, модель квантового осциллятора, модели Бозе– и Ферми–газа без взаимодействия, одномерная квантовая модель Гейзенберга и некоторые другие модели квантовых магнетиков, модель Вайскопфа–Вигнера для распада двухуровневой системы, модели открытой квантовой динамики с генератором Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада и многие другие модели, которые образуют основу качественного понимания квантовой механики динамических и стационарных систем. При необходимости описать систему с большей точностью можно воспользоваться теорией возмущения, квазиклассическим приближением или любым другим разложением по малому параметру, отличающему реальную систему от точно решаемой [3; 23].

Однако зачастую существует необходимость описать квантовую систему, которая не допускает точного решения и далека от всех других точно решаемых моделей (не имеет малого параметра). Такая задача часто возникает на практике, когда система не имеет симметрий и включает в себя много компонент, которые сильно взаимодействуют друг с другом. В этом случае прибегают к численному исследованию задачи. Основное отличие численного подхода от аналитического заключается в том, что задачу заменяют на близкий к ней дискретный аналог и используют арифметику с плавающей точкой, что полностью разрушает аналитические свойства задачи. Такой подход имеет как преимущества, так и недостатки. Основное преимущество заключается в том, что такой подход значительно более универсальный и может быть применен к гораздо более широкому классу задач. Основной недостаток заключается в невозможности установить аналитическую связь между параметрами и свойствами задачи (вывести закон), исследовать асимптотики задачи, получить глубокое качественное понимание моделей и явлений. При этом стандартные методы численного анализа (такие как точная диагонализация гамильтониана) не

применимы для систем, состоящих из большого числа частиц. *Эффективный* численный метод должен опираться на физическую структуру задачи (локальность гамильтониана взаимодействия, общие свойства спектра гамильтониана, свойства корреляционных функций квантового окружения). Поэтому разработка эффективных численных методов, опирающихся на физическую структуру задачи, является важным направлением исследований [17]. Одним из широко распространенных инструментов численного анализа многочастичных квантовых систем являются тензорные сети, структура которых учитывает физические особенности задачи. Активное развитие численных методов на основе тензорных сетей началось в 1992 году [2], когда был разработан метод “группа перенормировок матрицы плотности”, который позволяет находить основное состояние некоторых многочастичных квантовых систем. На данный момент существует большое количество методов на основе тензорных сетей, которые используются для описания свойств основного состояния [7; 16; 21], динамики во времени [4; 24], квантовых фазовых переходов [8; 9], тепловых состояний [5] многочастичных квантовых систем. Важной задачей является определение границ применимости тензорных сетей к различным задачам квантовой механики и создание новых архитектур на основе тензорных сетей для решения ранее неразрешимых задач.

Другой класс задач, важный для практики и требующий эффективных численных методов, — это задачи о расчете немарковской динамики квантовых систем, взаимодействующих с квантовым окружением. Наиболее часто в литературе рассматриваются задачи о взаимодействии квантовой системы с резервуаром невзаимодействующих квантовых осцилляторов. Для решения таких задач предложено большое количество численных методов, например, метод иерархических уравнений движения (hierarchical equations of motion) [1], изменяющихся во времени операторов в виде матричного произведения (time-evolving matrix product operators) [25], метод одетых квантовых траекторий (dressed quantum trajectories) [37] и многие другие. Так как для моделирования динамики квантовой системы, взаимодействующей с окружением, важно лишь действие окружения на систему, а структура самого окружения не важна, существуют методы, подбирающие эффективное окружение квантовой системы, которое проще моделировать численно [36]. Такое эффективное окружение оказывает идентичное воздействие на систему, хотя и отличается от оригинального окружения. Этот подход тесно связан с подходом марковского вложения для немарковской квантовой динамики [20], который позволяет сводить немарковскую динамику к марковской, расширяя пространство состояний квантовой системы и рассматривая динамику в новом, расширенном пространстве.

На практике часто встречается еще более сложная задача, которую иногда называют проблемой идентификации модели [19]. Применительно

к квантовой механике, примерами проблемы идентификации являются реконструкция операторов плотности и квантовых каналов по результатам измерений (томография) [10; 13; 15; 39], восстановление гамильтониана многочастичной системы по результатам локальных измерений [30], определение структуры квантового окружения по результатам измерений, произведенных над системой [29]. Методы для решения такого типа задач часто основываются на современных архитектурах для анализа данных, таких как нейронные сети. Например, для восстановления состояния многочастичной системы по данным, собранным с экспериментальной установки, можно использовать генеративные модели, которые часто используют для синтеза изображений [27; 38]. Для восстановления модели немарковской квантовой динамики можно использовать рекуррентные нейронные сети [26], которые используются для анализа временных рядов. Создание новых методов идентификации моделей в квантовой механике является важной задачей, в частности для построения алгоритмов оптимального управления, которые могут использоваться для борьбы с декогерентизацией, приготовления запутанных многочастичных состояний, обработки и передачи квантовой информации. Развитие новых методов оптимального управления существующими квантовыми регистрами является необходимым шагом для повышения их эффективности и является вызовом, требующим объединения методов теоретической физики (для построения адекватной модели эксперимента, учитывающей специфику задачи) и современных методов обработки данных (тензорные и нейронные сети, байесовские методы машинного обучения, методы оптимизации).

Решение задач идентификации модели и разработки новых методов описания квантовых систем на основе тензорных и нейронных сетей определяет актуальность работы.

Целью данной работы является разработка новых, применимых к физическому эксперименту методов описания открытой квантовой динамики и стационарных многочастичных квантовых систем на основе тензорных сетей и машинного обучения.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. нахождение размерности марковского вложения для немарковской динамики квантовой системы на основе параметров гамильтониана взаимодействия между системой и окружением, а также свойств корреляционных функций окружения;
2. разработка алгоритма восстановления генератора, определяющего динамику марковского вложения для немарковской динамики квантовой системы, по результатам последовательных однократных измерений над системой;

3. вывод эффективных уравнений для квантовой динамики составной системы, часть которой подвергается одинаковым, повторяющимся с периодом τ , проективным измерениям;
4. построение вариационного автокодировщика для моделирования исходов измерений над многочастичной квантовой системой и использование этой генеративной модели для расчета корреляционных функций спиновых цепочек.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Немарковская динамика открытой квантовой системы допускает марковское вложение с размерностью эффективного окружения

$$d_{\text{ER}} \approx \exp(2n\gamma T[1 - \log(\gamma\tau)]), \quad (1)$$

где T — характерное время убывания корреляционных функций окружения, n — количество различных степеней свободы системы, участвующих во взаимодействии с окружением, τ^{-1} — характерная частота изменения корреляционных функций резервуара, γ — константа взаимодействия окружения и системы.

2. Результаты последовательных однократных проективных измерений над открытой квантовой системой позволяют установить вид генератора $\mathcal{L}$ соответствующего марковского вложения, действующего в расширенном пространстве системы и эффективного окружения. Генератор $\mathcal{L}$ восстанавливается алгоритмом, максимизирующим функцию правдоподобия для исходов измерений. Восстановленная динамика матрицы плотности системы дается выражением

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_{\text{ER}} [\exp(t\mathcal{L}) \rho_{S+\text{ER}}(0)], \quad (2)$$

где ER обозначает степени свободы эффективного окружения.

3. Последовательные проективные измерения над вспомогательной (второй) частью двусоставной квантовой системы с гамильтонианом $H = \gamma \sum_k A_j \otimes B_j$, повторяющиеся с периодом τ и сопровождающиеся наблюдением одинаковых исходов, отвечающих проектору P , вызывают нетривиальную динамику в подпространстве $\mathcal{H}_S \otimes \text{supp} P$, где $\mathcal{H}_S$ — пространство основной (первой) части составной системы. В пределе $\gamma\tau \rightarrow 0$, $\gamma^2\tau \rightarrow \Omega = \text{const}$ динамика системы в целом задается эффективным неэрмитовым гамильтонианом

$$H_{\text{eff}} = H_1 - iH_2, \quad (3)$$

$$H_1 = \gamma \sum_j A_j \otimes G_j, \quad (4)$$

$$H_2 = \frac{\Omega}{2} \sum_{jk} A_j A_k \otimes (G_{jk} - G_j G_k), \quad (5)$$

где $G_j = PB_jP$, $G_{jk} = PB_jB_kP$.

4. Вариационный автокодировщик, обученный на конечном наборе исходов информационно полных измерений над многочастичной квантовой системой, позволяет генерировать неограниченно большую выборку исходов измерений, удовлетворяющих той же статистике, что и истинные результаты измерений. Сгенерированные вариационным автокодировщиком выборки позволяют рассчитать корреляционные функции многочастичной квантовой системы и средние значения локальных наблюдаемых.

Научная новизна:

1. Впервые показано, что действие окружения на динамику квантовой системы представляется в виде тензорной сети (временная сеть резервуара), аппроксимация которой с заданной точностью определяет размерность эффективного окружения в марковском вложении.
2. Впервые построен алгоритм для предсказания немарковской квантовой динамики по набору исходов последовательных однократных измерений над системой, позволяющий предсказывать отклик системы на внешний управляющий сигнал.
3. Впервые введена концепция стробоскопического предела, позволяющая получать эффективное описание динамики квантовой системы, прерываемой проективными измерениями.
4. Впервые вариационный автокодировщик применен для моделирования исходов измерений над многочастичной квантовой системой. Предложенный подход заключается в том, что для обучения вариационного автокодировщика используется конечный набор исходов измерений над многочастичной квантовой системой в неизвестном состоянии, а обученный вариационный автокодировщик способен генерировать произвольное число новых исходов измерений, которые используются для уточнения статистических оценок корреляционных функций.

Практическая значимость. Изложенные в диссертации результаты обладают большим практическим потенциалом. Алгоритм для восстановления марковского вложения немарковской квантовой динамики на основе результатов последовательных однократных измерений над системой может быть использован для создания эффективной модели квантовой системы на основе экспериментальных данных. В свою очередь, эффективная модель может быть использована для реализации оптимального контроля над квантовой системой [6; 12; 34; 35]. Такая схема имеет большую универсальность и может быть использована в разных практических задачах, таких как управление центрами окраски в алмазах, управление холодными ионами и атомами в оптических ловушках, управление сверхпроводящими кубитами и т.д. [11; 22; 28; 31; 32]. Оценка достаточной

размерности эффективного резервуара может быть использована не только для определения гиперпараметров алгоритма восстановления марковского вложения, но и для определения параметров некоторых других численных алгоритмов [18; 25] для моделирования немарковской квантовой динамики. Нелинейная динамика в стробоскопическом пределе, индуцированная последовательными измерениями, также представляет интерес с точки зрения практики, например, для управления квантовыми системами могут быть использованы нелинейные эффекты, вызванные измерениями. Схема восстановления состояния многочастичной квантовой системы с использованием вариационного автокодировщика может быть использована для считывания квантового состояния с аналогового квантового устройства, например, с квантового симулятора [33]. Практическая ценность результатов, описанных в диссертации, подтверждается цитированиями российских и зарубежных коллег.

Апробация работы. Основные результаты работы прошли апробацию на следующих всероссийских и международных конференциях: 48 Symposium on Mathematical Physics (г. Торунь, Польша, 10 - 12 июня 2016 г.), 13th Central European Quantum Information Processing Workshop (г. Вальтице, Чехия, 16 - 19 июня 2016 г.), Уфимская международная математическая конференция (г. Уфа, 27 - 30 сентября 2016 г.), конференция “Новые направления в теории квантовых и сложных систем” (г. Москва 3 - 7 октября 2016 г.), Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А. Ф. Леонтьева (г. Уфа, 24 - 27 мая 2017 г.), 4th International Conference on Quantum Technologies (г. Москва, 12 - 16 июля 2017 г.), Probability Theory, Mathematical Statistics and its Applications (г. Казань, 7 - 10 ноября 2017 г.), 15-я Международная конференция по квантовой оптике и квантовой информации (г. Минск, Республика Беларусь, 20 - 23 ноября 2017), 2nd Physics Informed Machine Learning (г. Санта-Фе, США, 21 - 25 января 2018 г.), 14th Biennial IQSA conference Quantum Structures 2018 (г. Казань, 16 - 20 июля, 2018 г.), MIPT-PhysTech-Quant 2018 (г. Долгопрудный, 9 - 15 сентября 2018 г.), 61-я Всероссийская научная конференция МФТИ (г. Долгопрудный, 19 - 25 ноября 2018 г.), Machine Learning for Quantum Design (г. Ватерлоо, Канада, 8 - 12 июля 2019 г.), 62-я Всероссийская научная конференция МФТИ (г. Долгопрудный, 18 - 23 ноября 2019 г.).

Личный вклад. Все теоретические результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Основная часть программного кода для алгоритма восстановления марковского вложения и восстановления состояния многочастичной квантовой системы при помощи вариационного автокодировщика написана автором самостоятельно. Задача о стробоскопическом пределе квантовой динамики была поставлена научным руководителем. Постановка остальных задач была предложена автором и обсуждена с научным руководителем.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях [1–4], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена изучению немарковской квантовой динамики в формализме тензорных сетей. В разделе 1.1 первой главы приведено краткое введение в формализм тензорных сетей. Дан краткий обзор архитектур тензорных сетей, часто используемых на практике, таких как тензорные деревья (tensor trees), состояние произведения матриц (matrix product state или MPS), состояние спроецированных запутанных пар (projected entangled pair states или PEPS). Дано краткое описание основных алгоритмов для работы с тензорными сетями, таких как алгоритм приведения тензорного дерева к каноническому виду, ренормгруппа матрицы плотности (density matrix renormalization group или DMRG), алгоритмом разрежения блоков во времени (time-evolving block decimation или TEBD). В разделе 1.2 излагаются основные результаты первой главы. В начале раздела приведен краткий обзор подходов к описанию динамики открытых квантовых систем. Введены понятия марковской и немарковской квантовой динамики. Введен генератор квантовой динамической полугруппы Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада, который описывает произвольную марковскую динамику конечномерной квантовой системы. Введено уравнение Накажимы–Цванцига, которое используется для описания динамики немарковских открытых квантовых систем. Приведены примеры численных подходов к моделированию немарковской динамики открытых квантовых систем. Далее в разделе 1.2 рассмотрено описание динамики открытой квантовой системы в формализме тензорных сетей. Рассмотрен наиболее общий гамильтониан взаимодействия квантовой системы с окружением

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\text{int}}, \quad H_0 = H_S \otimes I + I \otimes H_R, \\ H_{\text{int}} &= \gamma \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i, \end{aligned} \tag{6}$$

где γ — характерная константа взаимодействия системы с окружением. Для данного гамильтониана построено представление открытой динамики

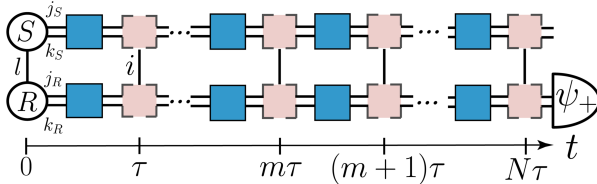


Рис. 1 — Диаграммное представление открытой квантовой динамики.

системы в форме тензорной сети

$$|\varrho_S(t)\rangle = \langle \Psi_+ | \underbrace{\Phi_0(\tau) \Phi_{\text{int}}(\tau) \dots \Phi_0(\tau) \Phi_{\text{int}}(\tau)}_{t/\tau \text{ times}} |\varrho(0)\rangle + O(\gamma\tau), \quad (7)$$

где $|\varrho(0)\rangle$ — начальная матрица плотности системы и окружения, вытянутая в вектор, $|\varrho_S(t)\rangle$ — матрица плотности системы в момент времени τ , вытянутая в вектор, $\langle \Psi_+ | = \sum_{j=1}^{d_R} I_S \otimes \langle j | \otimes I_S \otimes \langle j |$ — прямоугольная матрица, реализующая взятие следа по степеням свободы окружения, $\Phi_0(\tau)$ — динамическое отображение, отвечающее за свободную динамику в течение времени τ , $\Phi_{\text{int}}(\tau)$ — динамическое отображение, отвечающее за динамику только с участием гамильтониана взаимодействия в течение времени τ :

$$\Phi_0(\tau) = \exp[-i\tau H_S] \otimes \exp[i\tau H_S^T] \otimes \exp[-i\tau H_R] \otimes \exp[i\tau H_R^T], \quad (8)$$

$$\Phi_{\text{int}}(\tau) = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{A}_i(\tau) \otimes \mathcal{B}_i(\tau) + O(\gamma^2\tau^2), \quad (9)$$

$$\mathcal{A}_i(\tau) = \begin{cases} I \otimes I, & \text{если } i = 0, \\ \sqrt{\gamma\tau} A_i \otimes I, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \\ \sqrt{\gamma\tau} I \otimes A_{i-n}^T, & \text{если } i \geq n+1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathcal{B}_i(\tau) = \begin{cases} I \otimes I, & \text{если } i = 0, \\ -i\sqrt{\gamma\tau} B_i \otimes I, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \\ i\sqrt{\gamma\tau} I \otimes B_{i-n}^T, & \text{если } i \geq n+1. \end{cases} \quad (11)$$

Данную тензорную сеть можно представить в виде диаграммы Пенроуза, изображенной на рисунке 1. Нижняя часть данной диаграммы является тензорной сетью, которая полностью описывает действие окружения на квантовую систему. Данная тензорная сеть, изображенная на рисунке 2, названа временной сетью резервуара (timeline reservoir network или TRN). Далее в разделе 1.2 временная сеть резервуара используется для оценки до-

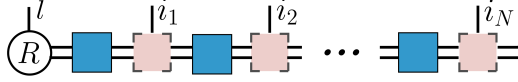


Рис. 2 — Диаграммное представление временной сети резервуара.

статочной размерности эффективного окружения квантовой системы, для воспроизведения всех эффектов открытой квантовой динамики, включая эффекты памяти. Временная сеть резервуара имеет форму MPS — тензорной сети, которая используется для описания состояний одномерных многочастичных систем. Для определения ранга MPS используют ее связь с энтропией запутанности между подсистемами. В случае временной сети резервуара, рангом MPS является квадрат размерности эффективного окружения. Используя данную связь, получена оценка на размерность эффективного окружения квантовой системы, которая дается формулой

$$d_{\text{ER}} \approx \exp(2n\gamma T(1 - \ln \gamma\tau)), \quad (12)$$

где d_{ER} — достаточная размерность эффективного окружения, γ — характерная константа взаимодействия системы с окружением, T — характерное время, на котором наблюдаются эффекты памяти (глубина памяти), n — количество степеней свободы системы, участвующих во взаимодействии с окружением, τ — минимальный временной масштаб эволюции окружения. В конце раздела 1.2 приводится проверка полученной оценки на примере задачи о распаде возбужденного состояния двухуровневой системы, которая допускает точное решение. Гамильтониан системы и окружения (набора квантовых осцилляторов) дается выражением

$$H = \Omega\sigma_+\sigma_- + \sum_m \omega_m b_m^\dagger b_m + \sum_m g_m (b_m^\dagger \sigma_- + b_m \sigma_+). \quad (13)$$

Если начальное состояние системы и окружения содержит только одно возбуждение (двухуровневая система находится в возбужденном состоянии, а все осцилляторы в основном), то задача о нахождении динамики решается точно. Динамика двухуровневой системы в такой модели будет немарковской. Варьируя параметры точно решаемой модели можно получить различную размерность эффективного резервуара согласно выражению (12). Динамику точно решаемой модели можно аппроксимировать используя модель с эффективным резервуаром размерности d . На рисунке 3 изображено сравнение точной динамики и аппроксимаций с фиксированным d . Можно наблюдать, что модель с $d = 2$ хорошо воспроизводит динамику точно решаемой модели с $d_{\text{ER}} = 7$ и не воспроизводит динамику точно решаемых моделей с $d_{\text{ER}} \gg 2$. Таким образом, в данном частном случае оценка (12) может предсказать порядок размерности эффективного окружения.

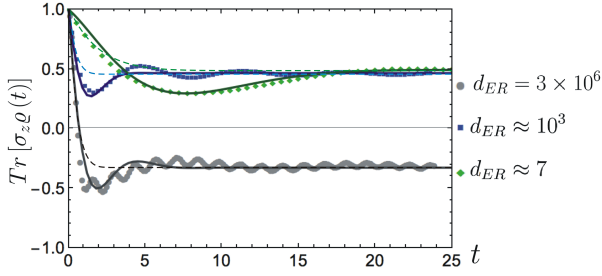


Рис. 3 — Сравнение динамик трех моделей: точно решаемой модели, модели с $d = 1$ и модели с $d = 2$. Последовательные точки показывают динамику точно решаемой модели, пунктирная линия показывает динамику модели с $d = 1$, сплошная линия показывает динамику модели с $d = 2$. Сравнение выполнено для трех различных оценок d_{ER} точно решаемой модели.

Вторая глава посвящена разработке алгоритма восстановления марковского вложения для немарковской квантовой динамики по результатам последовательных, однократных, проективных измерений над системой. В разделе 2.1 второй главы приводится краткий обзор алгоритмов предсказания динамики открытых квантовых систем по результатам измерений над системой. В разделе 2.2 второй главы приведено описание и результаты проверки алгоритма восстановления марковского вложения. В начале раздела 2.2 приводится описание эксперимента по сбору входных данных для алгоритма. Предполагается, что экспериментальная установка позволяет проводить проективные измерения над системой в моменты времени $t_i = i\tau$, $i = 1, \dots, n$, в измерительном базисе $\{|\phi_k^{(i)}\rangle\}_{k=1}^{d_S}$, который выбирается случайным образом в каждый момент времени t_i . Результатом измерения номер i является реализовавшийся в ходе измерения проектор $E_i = |\phi_{k_i}^{(i)}\rangle\langle\phi_{k_i}^{(i)}|$. Проекторы $\{E_i\}_{i=1}^n$ являются входными данными в алгоритм восстановления марковского вложения. Далее в разделе 2.2 приведено описание алгоритма восстановления марковского вложения. Основа алгоритма — процедура максимизации функции логарифмического правдоподобия $\log p(\{E_i\}_{i=1}^n|H)$ по параметру H для полученных исходов измерений $\{E_i\}_{i=1}^n$. Параметр H — гамильтониан, который параметризует представление Стайнспринга квантового канала действующего в гильбертовом пространстве системы и ее эффективного окружения (марковского вложения). Далее в разделе 2.2 приведен расчет градиента логарифмического правдоподобия, который необходим для реализации градиентной

оптимизации. Градиент логарифмического правдоподобия дается следующей цепочкой выражений:

$$\frac{\partial \log p(\{E_i\}_{i=1}^n | H)}{\partial H_{ij}} = \frac{1}{p(\{E_i\}_{i=1}^n | H)} \frac{\partial p(\{E_i\}_{i=1}^n | H)}{\partial H_{ij}}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\{E_i\}_{i=1}^n | H)}{\partial H_{ij}} &= \sum_{m=1}^n \text{Tr} \left\{ (E_m \mathcal{E}_{\text{S+ER}}(t_m) E_m) \otimes I_A \right. \\ &\times \left[\frac{\partial U(H)}{\partial H_{ij}} \tilde{\varrho}_{\text{S+ER}}(t_{m-1}) \otimes \varrho_A U^\dagger(H) + \right. \\ &\left. \left. + U(H) \tilde{\varrho}_{\text{S+ER}}(t_{m-1}) \otimes \varrho_A \frac{\partial U^\dagger(H)}{\partial H_{ij}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(H)}{\partial H_{ij}} &= \left(\frac{\partial U^\dagger(H)}{\partial H_{ij}} \right)^\dagger = \sum_{k,l} f_{kl} \langle \psi_k | i \rangle \langle j | \psi_l \rangle | \psi_k \rangle \langle \psi_l |, \\ f_{kl} &= \begin{cases} \frac{e^{-i\lambda_k} - e^{-i\lambda_l}}{\lambda_k - \lambda_l}, & \lambda_k \neq \lambda_l, \\ e^{-i\lambda_l}, & \lambda_k = \lambda_l, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tilde{\varrho}_{\text{S+ER}}(t_{m-1})$ — матрица плотности системы и эффективного резервуара в момент времени t_{m-1} , $\mathcal{E}_{\text{S+ER}}(t_m)$ задается рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{S+ER}}(t_m) &= \text{Tr}_A [U^\dagger(H) ((E_{m+1} \mathcal{E}_{\text{S+ER}}(t_{m+1}) E_{m+1}) \otimes I_A) \\ &\times U(H) (I_{\text{S+ER}} \otimes \varrho_A)], \\ \mathcal{E}_{\text{S+ER}}(0) &= I_{\text{S+ER}}, \end{aligned} \quad (17)$$

ϱ_A матрица плотности вспомогательной системы, $U(H) = \exp(-iH)$, $\{\psi_k\}$ — набор собственных векторов гамильтониана, $\{\lambda_k\}$ — набор собственных значений гамильтониана. Результатом оптимизации является гамильтониан H , максимизирующий правдоподобие, который используется для расчета генератора $\mathcal{L}$ марковской квантовой динамики в гильбертовом пространстве системы и эффективного окружения. Динамика матрицы плотности системы рассчитывается по следующей формуле

$$\rho_{\text{S}}(t) = \text{Tr}_{\text{ER}}[\exp(t\mathcal{L}) \rho_{\text{S+ER}}(0)], \quad (18)$$

где $\rho_{\text{S+ER}}(0)$ — начальная матрица плотности системы и эффективного окружения. Далее в разделе 2.2 приводится проверка алгоритма на примере точно решаемой модели немарковской квантовой динамики. Результаты измерений над немарковской квантовой системой моделируются на компьютере, обрабатываются алгоритмом, и предсказанная алгоритмом динамика матрицы плотности системы сравнивается с точной динамикой. В разделе 2.2 также показано, что разработанный алгоритм способен предсказать отклик немарковской квантовой системы на внешнее возмущение, что является основным преимуществом разработанного алгоритма

перед аналогами. Пример предсказания отклика немарковской квантовой системы на внешнее возмущение приведена на рисунке 4. В разделе 2.3

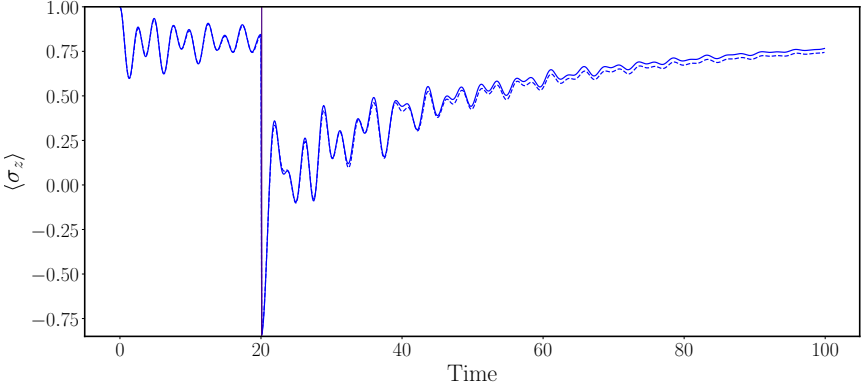


Рис. 4 — На графике показано сравнение отклика обученного марковского вложения и истинной системы на внешнее возмущение. Сплошная кривая показывает динамику $\langle \sigma_z \rangle$ истинной системы, пунктирная кривая — обученной. Вертикальная фиолетовая линия показывает момент времени, когда к системе было приложено внешнее возмущение. Возмущением является мгновенный переворот спина, который реализуется за счет применения унитарного преобразования $u = \sigma_x$.

приведено описание байесовского расширения алгоритма, позволяющего не только предсказать динамику немарковской квантовой системы, но и определить ошибку предсказания. В конце раздела 2.3 точность разработанного алгоритма сравнивается с точностью томографии процесса. Сравнение показывает, что разработанный алгоритм позволяет получить более высокую точность предсказания по сравнению с томографией процесса при фиксированном размере набора данных. Это достигается за счет использования априорной информации о структуре резервуара в разработанном алгоритме.

Третья глава посвящена исследованию нового типа квантовой динамики, индуцированного последовательными измерениями. В разделе 3.1 третьей главы вводится концепция стробоскопического предела и краткое описание задачи, которая разрешается в третьей главе. Пусть одна из подсистем двусоставной квантовой системы находится под действием последовательных, одинаковых, проективных и селективных измерений, проводимых с периодом τ . Пусть γ — константа взаимодействия между подсистемами. Ставится задача исследовать динамику такой системы на масштабе времени $T \sim (\gamma^2 \tau)^{-1}$. Далее вводится стробоскопический

предел $\tau \rightarrow 0$, $\gamma^2\tau = \Omega = \text{const}$, в котором такая система допускает описание с помощью эффективного неэрмитового гамильтониана. Описание, полученное в стробоскопическом пределе, справедливо для временных масштабов $T \gg T_{\text{int}} = \gamma^{-1}$ и может быть интерпретировано как поправка к эффекту Зенона на больших временах. В разделе 3.2 рассматривается математическая постановка задачи о расчете динамики двусоставной системы, находящейся под действием измерений в стробоскопическом пределе. Пусть $\mathcal{H}_{\text{sys}}$ и $\mathcal{H}_{\text{pr}}$ — конечномерные гильбертовы пространства системы и вспомогательной системы. Обозначим $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{sys}})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{pr}})$ линейные пространства операторов, действующих на $\mathcal{H}_{\text{sys}}$ и $\mathcal{H}_{\text{pr}}$ соответственно. Любой гамильтониан системы и вспомогательной системы может быть представлен в виде

$$H = \gamma \sum_j A_j \otimes B_j, \quad (19)$$

где безразмерные операторы $A_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{sys}})$ и $B_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{pr}})$ имеют операторную норму $\|A_j\|_\infty$ и $\|B_j\|_\infty < 1$, $\|A\|_\infty = \max_{\psi: \langle \psi | \psi \rangle = 1} \sqrt{\langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle}$, γ — константа взаимодействия. Пусть вспомогательная система находится под действием последовательных, одинаковых, селективных и проективных измерений, повторяющихся с периодом τ . Пусть в результате всех измерений реализовался проектор $P_i = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{pr}})$. При этом состояние вспомогательной системы будет $\varrho_{\text{pr}} = |\phi\rangle\langle\phi|$. Необходимо изучить динамику такой системы в стробоскопическом пределе. Тензорная диаграмма для такой двусоставной системы изображена на рисунке 5. В разделе 3.3 представлено решение данной задачи. Показано, что система эволюционирует согласно эффективному неэрмитовому гамильтониану

$$H_{\text{eff}} = H_1 - iH_2 + O(\sqrt{\tau}), \quad (20)$$

$$H_1 = \gamma \sum_j A_j \langle B_j \rangle, \quad (21)$$

$$H_2 = \frac{\Omega}{2} \sum_{jk} A_j A_k (\langle B_j B_k \rangle - \langle B_j \rangle \langle B_k \rangle), \quad (22)$$

где $\langle B_{j_1} \dots B_{j_k} \rangle = \langle \phi | B_{j_1} \dots B_{j_k} | \phi \rangle$. При этом вспомогательная система остается в состоянии $\varrho_{\text{pr}} = |\phi\rangle\langle\phi|$ (эффект Зенона). Существует вероятность того, что в результате одного из измерений, состояние вспомогательной системы перейдет в отличное от $\varrho_{\text{pr}} = |\phi\rangle\langle\phi|$. Вероятность такого исхода равна $p(t) = 1 - \text{Tr}(\varrho_{\text{sys}}(t))$. Уменьшение следа матрицы плотности системы со временем вызвано тем, что эффективный гамильтониан не является эрмитовым. В разделе 3.3 также приведен пример применения разработанной теории к конкретной физической системе. Пусть имеется два кубита (система и вспомогательная система), гамильтониан которых

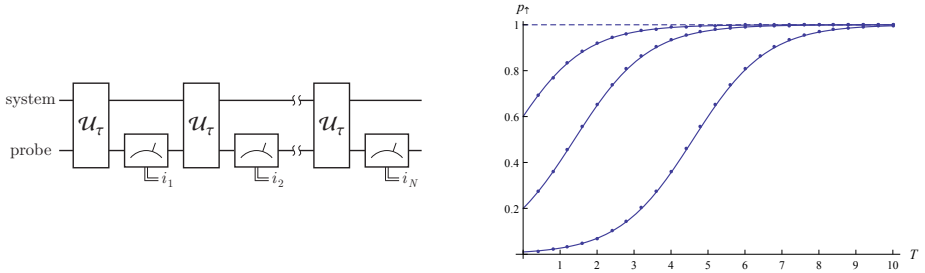


Рис. 5 — Рисунок слева показывает тензорную диаграмму для стробоскопических измерений над вспомогательной системой (probe). Рисунок справа показывает сравнение точной динамики заселенности (точки) и динамики заселенности рассчитанной в стробоскопическом пределе. Параметры модели $\gamma = 5$, $\tau = 0.04$, $\Omega = 1$. Три кривые показывают эволюцию заселенности с разными начальными условиями.

принимает следующий вид:

$$H = \frac{\gamma}{2} \sum_{j=0}^3 \sigma_j \otimes \sigma_j. \quad (23)$$

Пусть $P_i = \varrho_{\text{pr}}(0) = |\uparrow\rangle \langle \uparrow|$, тогда эффективный неэрмитовый гамильтониан системы в стробоскопическом пределе примет вид

$$H_{\text{eff}} = \gamma |\uparrow\rangle \langle \uparrow| - i \frac{\Omega}{2} |\downarrow\rangle \langle \downarrow|. \quad (24)$$

Точная динамика заселенности возбужденного состояния системы сравнивается с приближенной, полученной в стробоскопическом пределе. Сравнение приведено на рисунке 5. В разделе 3.4 разработанная теория обобщается на проекторы P_i , которые имеют ранг больше единицы.

В **четвертой главе** рассмотрено применение условного вариационного автокодировщика для реконструкции состояния многочастичной квантовой системы по результатам конечного набора информационно полных измерений над многочастичной квантовой системой. В разделе 4.1 четвертой главы приведен краткий обзор подходов к моделированию квантовых систем при помощи нейронных сетей. В разделе 4.2 показано, как генеративные модели, которые используют для моделирования многомерных вероятностных распределений, можно использовать для описания состояния многочастичной квантовой системы. Известно, что используя некоторую положительную операторозначную меру (POVM) $\{M_\alpha\}$, $M_\alpha^\dagger = M_\alpha$, $\sum_\alpha M_\alpha = I$ можно отобразить матрицу плотности квантовой системы в распределение вероятностей

$$P_\alpha = \text{Tr}(\varrho M_\alpha), \quad (25)$$

где P_α — вероятности исходов измерений, описываемых конкретной POVM. Особым классом POVM являются информационно полные POVM. Для информационно полных POVM по распределению P_α можно восстановить матрицу плотности

$$\varrho = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \sum_{\alpha'} T_{\alpha\alpha'}^{-1} M^{\alpha'},$$

$$T_{\alpha\alpha'} = \text{Tr} \left(M^{\alpha} M^{\alpha'} \right). \quad (26)$$

Для информационно полной POVM матрица $T_{\alpha\alpha'}$ является обратимой. Таким образом, для информационно полной POVM распределение P_α полностью характеризует квантовое состояние. Для многочастичной квантовой системы можно построить информационно полную POVM, используя одночастичную POVM. Например, для системы состоящей из многих спинов это можно сделать следующим образом:

$$M_{\text{tetra}}^{\alpha_1, \dots, \alpha_N} = M_{\text{tetra}}^{\alpha_1} \otimes M_{\text{tetra}}^{\alpha_2} \otimes \dots \otimes M_{\text{tetra}}^{\alpha_N}, \quad (27)$$

где $M_{\text{tetra}}^{\alpha}$ — одночастичная информационно полная POVM, также называемая тетраэдральной POVM, $M_{\text{tetra}}^{\alpha_1, \dots, \alpha_N}$ — многочастичная информационно полная POVM. Тетраэдральная POVM, которая используется в численных экспериментах, описанных в диссертации, задается следующим образом

$$M_{\text{tetra}}^{\alpha} = \frac{1}{4} \left(I + s^{\vec{\alpha}} \vec{\sigma} \right), \quad \alpha \in (0, 1, 2, 3), \quad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z),$$

$$\vec{s}^0 = (0, 0, 1), \quad \vec{s}^1 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3} \right), \quad \vec{s}^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3} \right),$$

$$\vec{s}^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3} \right). \quad (28)$$

Производя измерения, описываемые такой многочастичной POVM, над системой из многих спинов, можно построить выборку из распределения $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}$, задающего матрицу плотности многочастичной системы. Используя выборку, можно обучить генеративную модель имитировать распределение $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}$. Таким образом, обученная генеративная модель будет являться описанием состояния многочастичной квантовой системы. В разделе 4.3 приведено краткое описание квантовой модели Изинга в поперечном поле, которая использовалась для проведения численных экспериментов (моделирования исходов измерений, обучения генеративной модели на полученных исходах измерений). В качестве генеративной модели использовался условный вариационный автокодировщик. Краткое описание архитектуры условного вариационного автокодировщика приведено в разделе 4.4. В разделе 4.5 приведены результаты численных

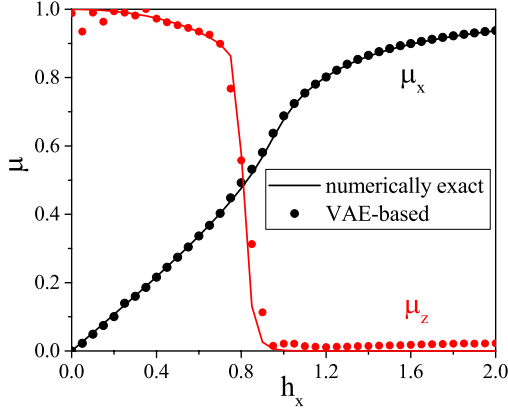


Рис. 6 — Полная намагниченность цепочки вдоль осей x и z в зависимости от внешнего магнитного поля. Положение точки фазового перехода смещено влево из-за конечности цепочки. VAE — английская аббревиатура к variational autoencoder, обозначающая вариационный автокодировщик.

экспериментов. Для основного состояния квантовой модели Изинга в поперечном поле были смоделированы исходы измерений, по 500 000 измерений для каждого значения поперечного магнитного поля h_x . Величина поперечного магнитного поля варьировалась от 0 до 2 с шагом 0,1. Условный вариационный автокодировщик был обучен на полученных исходах измерений и использован для расчета корреляционных функций квантовой модели Изинга в поперечном поле. Было показано, что вариационный автокодировщик с высокой точностью воспроизводит точные корреляционные функции и одночастичные средние для квантовой модели Изинга в поперечном поле. Более того, вариационный автокодировщик с высокой точностью описывает квантовый фазовый переход, который есть в квантовой модели Изинга в поперечном поле. Зависимость намагниченностей всей цепочки вдоль разных осей от поперечного магнитного поля, приведенная на рисунке 6, это подтверждает.

В заклучении приведены основные результаты. В диссертации представлено систематическое описание структуры и свойств тензорных сетей, которые могут быть использованы для исследования как стационарных многочастичных квантовых систем (спиновые цепочки в четвертой главе), так и динамических квантовых систем со сложными эффектами памяти (первая и вторая главы) и нелинейными эффективными уравнениями движения (третья глава). Основное преимущество использования тензорных сетей заключается в их эффективном описании задач, не требующем

экспоненциально больших ресурсов (по числу частиц или времени эволюции). Задачи, сформулированные на языке тензорных сетей, допускают применение методов машинного обучения (вторая глава). Разработанные в диссертации методы машинного обучения напрямую применимы к обработке экспериментальных данных, содержащих исходы проективных измерений над исследуемой системой (вторая и четвертая главы). Результатом применения разработанных методов машинного обучения являются конкретные физические объекты (динамический генератор эффективного марковского вложения во второй главе и статистика информационно полных измерений в четвертой главе). Таким образом, представленные в диссертации подходы комбинируют аналитические и численные методы и позволяют построить эффективную математическую модель сложных физических систем и их временной динамики на основе имеющихся в распоряжении экспериментальных данных.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Введена тензорная сеть (временная сеть резервуара), которая описывает действие окружения на квантовую систему. Сжатие временной сети резервуара позволяет получить эффективное окружение низкой размерности, которое действует на систему так же, как и исходное окружение. Оценена допустимая степень сжатия временной сети резервуара. Данная оценка имеет простой физический смысл размерности эффективного окружения. Временная сеть резервуара может быть использована для создания новых численных методов моделирования открытых квантовых систем на основе сжатого представления окружения. Оценка может быть использована для определения размерности эффективного окружения в марковском вложении немарковской квантовой динамики, например, с ее помощью можно оценить размерность эффективного окружения в задаче о распаде возбужденного состояния двухуровневого атома для различных спектральных плотностей [2]. Также оценка может быть использована для определения размерности окружения, в алгоритмах, использующих марковское вложение [18; 25].
2. Разработан алгоритм восстановления генератора марковского вложения для немарковской динамики по результатам предварительных измерений над квантовой системой. На вход алгоритма подается набор проекторов, описывающих исходы измерений, которые реализовались в ходе эксперимента. После обработки входных данных, алгоритм возвращает генератор марковского вложения. Генератор описывает марковскую динамику в расширенном пространстве. Взятие частичного следа по степеням свободы эффективного окружения позволяет найти немарковскую динамику в пространстве системы. Основным преимуществом

разработанного алгоритма является то, что алгоритм способен предсказать отклик системы на внешний сигнал. Это позволяет использовать алгоритм для подбора оптимального управляющего сигнала для управления немарковской динамикой. В перспективе разработанный метод может быть также обобщен на случай непроективных измерений, возникающих на практике [14].

3. Была введена концепция стробоскопического предела для описания динамики квантовой системы, периодически прерываемой мгновенными измерениями. Для двусоставной системы, вспомогательная подсистема которой находится под действием последовательных, одинаковых, проективных измерений, был выведен неэрмитов гамильтониан, задающий динамику двусоставной системы в стробоскопическом пределе. Описанный в диссертации новый тип квантовой динамики, индуцированный неэрмитовым гамильтонианом, может быть использован для построения новых типов квантового контроля и увеличения чувствительности квантовых сенсоров [40].
4. Вариационный автокодировщик был применен для моделирования исходов информационно полных измерений над многочастичной квантовой системой. В качестве набора данных, на котором обучается вариационный автокодировщик, используются конечный набор исходов информационно полных измерений над многочастичной квантовой системой. Обученный вариационный автокодировщик способен генерировать исходы измерений с той же статистикой, что и истинные исходы измерений. Сгенерированные вариационным автокодировщиком исходы могут быть использованы для расчета корреляционных функций и других наблюдаемых средних многочастичной квантовой системы. Поскольку вариационный автокодировщик позволяет рассчитывать любые средние величины для многочастичной квантовой системы, его можно трактовать как представление матрицы плотности многочастичной квантовой системы. Такой подход реконструкции состояния многочастичной квантовой системы в форме вариационного автокодировщика по конечной выборке исходов информационно полных измерений может быть применен для реконструкции состояния квантовых устройств, таких как квантовый симулятор [33].

Публикации автора по теме диссертации

1. *Luchnikov, I.* Quantum evolution in the stroboscopic limit of repeated measurements [Текст] / I. Luchnikov, S. Filippov // Physical Review A. — 2017. — Vol. 95, no. 2. — P. 022113.

2. Simulation complexity of open quantum dynamics: Connection with tensor networks [Текст] / I. Luchnikov, S. Vintskevich, H. Ouerdane, S. Filippov // Physical Review Letters. — 2019. — Vol. 122, no. 16. — P. 160401.
3. Variational autoencoder reconstruction of complex many-body physics [Текст] / I. A. Luchnikov, A. Ryzhov, P.-J. Stas, S. N. Filippov, H. Ouerdane // Entropy. — 2019. — Vol. 21, no. 11. — P. 1091.
4. Machine learning non-markovian quantum dynamics [Текст] / I. A. Luchnikov, S. V. Vintskevich, D. A. Grigoriev, S. N. Filippov // Physical Review Letters. — 2020. — Vol. 124, no. 14. — P. 140502.

Список литературы

1. *Tanimura, Y.* Nonperturbative expansion method for a quantum system coupled to a harmonic-oscillator bath [Текст] / Y. Tanimura // Physical Review A. — 1990. — Vol. 41, no. 12. — P. 6676.
2. *White, S. R.* Density matrix formulation for quantum renormalization groups [Текст] / S. R. White // Physical Review Letters. — 1992. — Vol. 69. — P. 2863–2866.
3. *Breuer, H.-P.* The theory of open quantum systems [Текст] / H.-P. Breuer, F. Petruccione. — Oxford University Press, 2002. — P. 625.
4. *Vidal, G.* Efficient classical simulation of slightly entangled quantum computations [Текст] / G. Vidal // Physical Review Letters. — 2003. — Vol. 91, no. 14. — P. 147902.
5. *Feiguin, A. E.* Finite-temperature density matrix renormalization using an enlarged Hilbert space [Текст] / A. E. Feiguin, S. R. White // Physical Review B. — 2005. — Vol. 72, no. 22. — P. 220401.
6. *Accardi, L.* Coherent quantum control of Λ -atoms through the stochastic limit [Текст] / L. Accardi, S. Kozyrev, A. Pechen // Quantum Information and Computing. — 2006. — P. 1–17.
7. *Hastings, M. B.* Solving gapped Hamiltonians locally [Текст] / M. B. Hastings // Physical Review B. — 2006. — Vol. 73, no. 8. — P. 085115.
8. *Vidal, G.* Class of quantum many-body states that can be efficiently simulated [Текст] / G. Vidal // Physical Review Letters. — 2008. — Vol. 101, no. 11. — P. 110501.
9. *Evenbly, G.* Algorithms for entanglement renormalization [Текст] / G. Evenbly, G. Vidal // Physical Review B. — 2009. — Vol. 79, no. 14. — P. 144108.

10. *Lvovsky, A. I.* Continuous-variable optical quantum-state tomography [Tekst] / A. I. Lvovsky, M. G. Raymer // Reviews of Modern Physics. — 2009. — Vol. 81, no. 1. — P. 299.
11. *Nebendahl, V.* Optimal control of entangling operations for trapped-ion quantum computing [Tekst] / V. Nebendahl, H. Häffner, C. Roos // Physical Review A. — 2009. — Vol. 79, no. 1. — P. 012312.
12. *Dong, D.* Quantum control theory and applications: a survey [Tekst] / D. Dong, I. R. Petersen // IET Control Theory & Applications. — 2010. — Vol. 4, no. 12. — P. 2651–2671.
13. Efficient quantum state tomography [Tekst] / M. Cramer, M. B. Plenio, S. T. Flammia, R. Somma, D. Gross, S. D. Bartlett, O. Landon-Cardinal, D. Poulin, Y.-K. Liu // Nature Communications. — 2010. — Vol. 1, no. 1. — P. 1–7.
14. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification [Tekst] / A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt, R. J. Schoelkopf // Reviews of Modern Physics. — 2010. — Vol. 82, no. 2. — P. 1155.
15. Statistical estimation of the efficiency of quantum state tomography protocols [Tekst] / Y. I. Bogdanov, G. Brida, M. Genovese, S. Kulik, E. Moreva, A. Shurupov // Physical Review Letters. — 2010. — Vol. 105, no. 1. — P. 010404.
16. *Schollwöck, U.* The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states [Tekst] / U. Schollwöck // Annals of Physics. — 2011. — Vol. 326, no. 1. — P. 96–192.
17. *Avella, A.* Strongly correlated systems: numerical methods [Tekst]. Vol. 176 / A. Avella, F. Mancini. — Springer Science & Business Media, 2013. — P. 349.
18. *Frenzel, M. F.* Matrix product state representation without explicit local Hilbert space truncation with applications to the sub-ohmic spin-boson model [Tekst] / M. F. Frenzel, M. B. Plenio // New Journal of Physics. — 2013. — Vol. 15, no. 7. — P. 073046.
19. Industrial applications of the Kalman filter: A review [Tekst] / F. Auger, M. Hilaiet, J. M. Guerrero, E. Monmasson, T. Orłowska-Kowalska, S. Katsura // IEEE Transactions on Industrial Electronics. — 2013. — Vol. 60, no. 12. — P. 5458–5471.
20. Mappings of open quantum systems onto chain representations and Markovian embeddings [Tekst] / M. Woods, R. Groux, A. Chin, S. Huelga, M. B. Plenio // Journal of Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 55, no. 3. — P. 032101.

21. *Orús, R.* A practical introduction to tensor networks: Matrix product states and projected entangled pair states [Tekcr] / R. Orús // *Annals of Physics*. — 2014. — Vol. 349. — P. 117–158.
22. Optimal control of complex atomic quantum systems [Tekcr] / S. van Frank, M. Bonneau, J. Schmiedmayer, S. Hild, C. Gross, M. Cheneau, I. Bloch, T. Pichler, A. Negretti, T. Calarco, S. Montangero // *Scientific Reports*. — 2016. — Vol. 6. — P. 34187.
23. *De Vega, I.* Dynamics of non-Markovian open quantum systems [Tekcr] / I. De Vega, D. Alonso // *Reviews of Modern Physics*. — 2017. — Vol. 89, no. 1. — P. 015001.
24. Quantum thermalization dynamics with matrix-product states [Tekcr] / E. Leviatan, F. Pollmann, J. H. Bardarson, D. A. Huse, E. Altman // *arXiv preprint arXiv:1702.08894*. — 2017.
25. Efficient non-Markovian quantum dynamics using time-evolving matrix product operators [Tekcr] / A. Strathearn, P. Kirton, D. Kilda, J. Keeling, B. W. Lovett // *Nature Communications*. — 2018. — Vol. 9, no. 1. — P. 3322.
26. Modelling non-Markovian quantum processes with recurrent neural networks [Tekcr] / L. Banchi, E. Grant, A. Rocchetto, S. Severini // *New Journal of Physics*. — 2018. — Vol. 20, no. 12. — P. 123030.
27. Neural-network quantum state tomography [Tekcr] / G. Torlai, G. Mazzola, J. Carrasquilla, M. Troyer, R. Melko, G. Carleo // *Nature Physics*. — 2018. — Vol. 14, no. 5. — P. 447.
28. Reinforcement learning in different phases of quantum control [Tekcr] / M. Bukov, A. G. Day, D. Sels, P. Weinberg, A. Polkovnikov, P. Mehta // *Physical Review X*. — 2018. — Vol. 8, no. 3. — P. 031086.
29. *Shrapnel, S.* Quantum Markovianity as a supervised learning task [Tekcr] / S. Shrapnel, F. Costa, G. Milburn // *International Journal of Quantum Information*. — 2018. — Vol. 16, no. 08. — P. 1840010.
30. *Bairey, E.* Learning a local Hamiltonian from local measurements [Tekcr] / E. Bairey, I. Arad, N. H. Lindner // *Physical Review Letters*. — 2019. — Vol. 122, no. 2. — P. 020504.
31. Coherent quantum control of nitrogen-vacancy center spins near 1000 Kelvin [Tekcr] / G.-Q. Liu, X. Feng, N. Wang, Q. Li, R.-B. Liu // *Nature Communications*. — 2019. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–8.

32. Digital coherent control of a superconducting qubit [Tekcr] / E. Leonard, M. A. Beck, J. Nelson, B. Christensen, T. Thorbeck, C. Howington, A. Opremcak, I. Pechenezhskiy, K. Dodge, N. Dupuis, M. Hutchings, J. Ku, F. Schlenker, J. Suttle, C. Wilen, S. Zhu, M. Vavilov, B. Plourde, R. McDermott // Physical Review Applied. — 2019. — Vol. 11, no. 1. — P. 014009.
33. Integrating neural networks with a quantum simulator for state reconstruction [Tekcr] / G. Torlai, B. Timar, E. P. L. van Nieuwenburg, H. Levine, A. Omran, A. Keesling, H. Bernien, M. Greiner, Vuletić, M. D. Lukin, R. G. Melko, M. Endres // Physical Review Letters. — 2019. — Vol. 123, no. 23. — P. 230504.
34. *Morzhin, O. V.* Minimal time generation of density matrices for a two-level quantum system driven by coherent and incoherent controls [Tekcr] / O. V. Morzhin, A. N. Pechen // International Journal of Theoretical Physics. — 2019. — P. 1–9.
35. *Morzhin, O. V.* Krotov method for optimal control of closed quantum systems [Tekcr] / O. V. Morzhin, A. N. Pechen // Russian Mathematical Surveys. — 2019. — Vol. 74, no. 5. — P. 851.
36. Optimized auxiliary oscillators for the simulation of general open quantum systems [Tekcr] / F. Mascherpa, A. Smirne, D. Tamascelli, P. F. Acebal, S. Donadi, S. F. Huelga, M. B. Plenio // arXiv preprint arXiv:1904.04822. — 2019.
37. *Polyakov, E. A.* Dressed quantum trajectories: novel approach to the non-Markovian dynamics of open quantum systems on a wide time scale [Tekcr] / E. A. Polyakov, A. N. Rubtsov // New Journal of Physics. — 2019. — Vol. 21, no. 6. — P. 063004.
38. Reconstructing quantum states with generative models [Tekcr] / J. Carrasquilla, G. Torlai, R. G. Melko, L. Aolita // Nature Machine Intelligence. — 2019. — Vol. 1, no. 3. — P. 155.
39. *Huang, H.-Y.* Predicting many properties of a quantum system from very few measurements [Tekcr] / H.-Y. Huang, R. Kueng, J. Preskill // arXiv preprint arXiv:2002.08953. — 2020.
40. Quantum sensing with a single-qubit pseudo-Hermitian system [Tekcr] / Y. Chu, Y. Liu, H. Liu, J. Cai // Physical Review Letters. — 2020. — Vol. 124, no. 2. — P. 020501.

Лучников Илья Андреевич

Тензорные сети и машинное обучение для динамических и стационарных
квантовых систем

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____