Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Лихоманенко Татьяна Николаевна

Исследование решений неклассических краевых задач для уравнений смешанного типа

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

10 МАЙ 2017

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Научный руководитель: **Моисеев Евгений Иванович**
доктор физико-математических наук, академик РАН, декан факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Зарубин Александр Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений физико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева»

Макин Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики института комплексной безопасности и специального приборостроения Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский технологический университет»

Ведущая организация: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»*

Защита состоится «21» июня 2017 года в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 2. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.43».

Автореферат разослан «21» апреля 2017 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 501.001.43,

доктор физико-математических наук, профессор Захаров Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Главным предметом изучения настоящей диссертационной работы являются решения неклассических краевых задач для уравнений смешанного типа: исследование собственных функций для задач Трикоми и Геллерстедта с наклонными линиями вырождения, построение биортогональных систем в аналитическом виде, получение корректных краевых задач.

Начало теории уравнений смешанного типа представлено в работах М. Чибрарио, С.А. Чаплыгина, Ф. Трикоми, С. Геллерстедта, Ф.И. Франкля, М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, И.А. Векуа, K.G. Guderley, К.И. Бабенко, Л.В. Овсянникова, P. Germain и R. Bader.

Уравнения смешанного типа стали активно изучать после работ Ф.И. Франкля [1,2], в которых он указал на возможные приложения уравнений смешанного типа к околозвуковой и сверхзвуковой газовой динамике, а также обнаружил приложения задачи Трикоми в теории сопел Лаваля. Помимо этого И.Н. Векуа нашел приложения при исследовании теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и безмоментной теории оболочек[3], когда кривизна оболочки меняет знак. В дальнейшем оказалось, что краевые задачи для уравнений смешанного типа применимы в различных областях естественных наук: в задачах физики лазеров, при моделировании плазмы, в математической биологии.

В дальнейшем уравнениями смешанного типа занимались А.М. Нахушев, M. Protter, C.S. Morawetz, М.М. Смирнов, Г.Д. Каратопраклиев. Исследования по уравнениям смешанного типа стали проводиться по нескольким направлениям, среди которых спектральная теория, уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения, поиск корректных краевых задач.

---

[1] *Франкль Ф.И. О задачах С.А. Чаплыгина для смешанных до-и сверхзвуковых течений // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1945. — Т. 9. — №. 2. — С. 121–143.*

[2] *Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // ПММ. — 1956. — Т. 20. — №. 2. — С. 196–202.*

[3] *Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. Москва: Изд-во «Наука». — 1982. — 288 С.*

Спектральная теория для уравнений смешанного типа, в частности, требует привлечения методов теории несамосопряженных операторов, развитой Д. Биркгофом, Т. Карлеманом, М.В. Келдышем, В.А. Ильиным. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа — несамосопряженная задача, и поэтому спектр не обязан лежать на вещественной оси. Первые результаты по спектральной теории получены при исследовании задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в работах Т.Ш. Кальменова[4], доказавшего существование хотя бы одного положительного собственного значения и соответствующей ему неотрицательной собственной функции, Е.И. Моисеева[5], установившего сектора комплексной плоскости, в которых нет собственных значений, С.М. Пономарева[6], нашедшего специальные области для задачи Трикоми, в которых удается выписать собственные значения и собственные функции в явном виде, доказать их полноту в эллиптической области. Спектральные вопросы нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа, для которых, в частности, найдены сектора комплексной плоскости, где спектр не существует, исследовались в работах М.С. Салахитдинова и А.К. Уринова[7]. Последние результаты по спектральной теории представлены в статьях М.С. Салахитдинова, Е.И. Моисеева, К.Б. Сабитова, Т.Ш. Кальменова и их учеников, С.А. Алдашева, где рассматриваются различные модификации постановок краевых задач: ставятся нелокальные краевые условия, специальные условия склейки на линии изменения типа, рассматриваются негладкие линии вырождения. Помимо этого D. Lupo, D.D. Monticelli и K.R. Payne[8] исследовали спектральные вопросы для уравнений

---

[4] *Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13. — №. 8. — С. 1418-1425.*

[5] *Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. Москва: Изд-во МГУ. — 1988. — 150 С.*

[6] *Пономарев С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. Дисс. д-ра физ.-мат. наук. Москва. — 1981.*

[7] *Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан. — 1997. — 165 С.*

[8] *Lupo D., Monticelli D.D., Payne K.R. Spectral theory for linear operators of mixed type and applications to nonlinear Dirichlet problems // Communications in Partial Differential Equations. — 2012. — Vol. 37. — №. 9.*

смешанного типа в весовых пространствах Соболева.

В приведенных примерах отдельной задачей при изучении уравнений смешанного типа является исследование систем функций, с помощью которых решения выписываются в виде рядов: наличие свойства базисности в пространствах L_p, $p > 1$, изучение биортогональных систем, при помощи которых может быть получено интегральное представление решений, оценка поведения коэффициентов разложения. Проблемами полноты и базисности систем функций, возникающих при решении задач математической физики, занимались А.М. Седлецкий и Е.И. Моисеев[9], А.А. Полосин, Ф.М.Б. Могими, Н. Аббаси, В.Э. Амбарцумян, Б.Т. Билалов[10]. Исследованием собственных и присоединенных функций несамосопряженных операторов занимаются А.С. Макин[11], Шкаликов[12], R. Mennicken и M. Möller[13].

Как упоминалось выше, ряд исследований по уравнениям смешанного типа касается случаев негладких линий изменения типа и уравнений с несколькими линиями вырождения, которые рассматривали М.М. Зайнулабидов, А.М. Нахушев, А.Б. Базарбеков, В.Н. Врагов, J.M. Rassias, L.M. Sibner. Обзор такого рода задач и литературы приведен в книге А.Г. Кузьмина[14]. Последние результаты в этом направлении получены в работах М.М. Смирнова, А.А. Полосина, А.Н. Зарубина, Н.О. Таранова, J.M. Rassias, G.C. Wen, О.А. Репина, B.J. Kadirkulov: для уравнений смешанного типа (Лаврентьева-Бицадзе, Трикоми, с запаздывающим аргументом, с дробной производной и др.) с различны-

– P. 1495-1516.

[9] *Моисеев Е.И., Прудников А.П., Седлецкий А.М. Базисность и полнота некоторых тригонометрических систем элементарных функций // ВЦ им. А.А. Дородницына РАН. Москва. – 2004. – 146 С.*

[10] *Билалов Б.Т., Велиев С.Г. Некоторые вопросы базисов // Баку: Элм. – 2010. – 304 С.*

[11] *Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42. – №. 4. – С. 560-562.*

[12] *Савчук А.М., Шкаликов А.А. Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функциональный анализ и его приложения. – 2017. – Т. 51. – №. 1. – С. 82-98.*

[13] *Mennicken R., Möller M. Non-self-adjoint boundary eigenvalue problems. Gulf Professional Publishing, 2003. – Vol. 192. – 500 P.*

[14] *Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та. – 1990. – 208 С.*

ми линиями вырождения (перпендикулярными, параллельными, негладкими) доказаны теоремы существования и единственности решений задачи Трикоми и нелокальных краевых задач.

Другим важным направлением исследования уравнений смешанного типа являются постановка корректных краевых задач, в том числе и в многомерных областях, изучение существования и единственности решений для многомерных областей и исследование их устойчивости. Классические краевые задачи, такие как задачи Дирихле и Неймана, корректность которых для эллиптических уравнений хорошо известна, могут быть некорректно поставленными для уравнений смешанного типа. Впервые это показал[15] А.В. Бицадзе для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. После этой работы встал вопрос о поиске областей и краевых условий, заданных на всей границе области, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. В дальнейшем задачу Дирихле для уравнений смешанного типа изучали J.R. Cannon, C.S. Morawetz, А.П. Солдатов, К.Б. Сабитов, Н.Н. Вахания. Был получен ряд результатов с ограничением на вид области или требованием дополнительных условий на функции, заданные на границе области. Например, в работе А.П. Солдатова[16] показано, что существует и единственно решение задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области, ограниченной дугами окружности и гиперболы. Обширный обзор работ по этой теме представлен в монографии М.М. Хачева[17]. В связи с приложениями к газовой динамике актуален вопрос о постановке корректных задач не только в двумерной, но и в многомерных ($n \geq 3$) областях. Постановками корректных задач в многомерных областях занимались А.В. Бицадзе, Г. Каратопраклиев, A.K. Aziz и M. Schneider, А.М. Нахушев. Последним был

[15] *Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. – 1953. – Т. 122. – №. 2. – С. 167-170.*

[16] *Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т.30. – №11. – С. 2001-2009*

[17] *Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус. – 1998. – 280 С.*

получен критерий единственности для задачи Дирихле в многомерной цилиндрической области[18].

В последнее время были рассмотрены постановки задач с нелокальными краевыми условиями для уравнений смешанного типа, например, с нелокальным интегральным условием (В.А. Елеев, К.Б. Сабитов, Ю.К. Сабитова), или с весовыми условиями склеивания вдоль линии параболического вырождения (Р.И. Сохадзе, Т.И. Демина). D. Lupo, D.D. Monticelli и K.R. Payne[19] изучают корректность задачи Дирихле при отыскании решений в слабом смысле. Результаты, касающиеся задачи Дирихле для эллиптико-гиперболических уравнений типа Келдыша представлены в монографии T.H. Otway[20], в которой также описаны приложения уравнений смешанного типа к физике холодной плазмы и оптике. Также были исследованы[21] решения аналогов задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в трехмерных областях и показаны существование и единственность классических решений.

В середине XX столетия M.H. Protter[22] ввел в рассмотрение краевые задачи, являющиеся многомерными аналогами классических задач на плоскости для уравнений смешанного типа. Введенные многомерные аналоги являются некорректно поставленными в отличие от корректных двумерных задач. До сих пор нет фундаментальных результатов по вопросу существования решений введенных аналогов краевых задач в многомерных областях. Известно, что задача Проттера для уравнений смешанного типа не только некорректна, но и при глад-

[18] *Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. — 1970. — Т.6. — № 1. — С. 190–191.*

[19] Lupo D., Monticelli D.D., Payne K.R. Spectral theory for linear operators of mixed type and applications to nonlinear Dirichlet problems // Communications in Partial Differential Equations. — 2012. — Vol. 37. — №. 9. — P. 1495–1516.

[20] *Otway T.H. The Dirichlet problem for elliptic-hyperbolic equations of Keldysh type. Springer. — 2012. — Vol. 2043.*

[21] *Нефедов П.В. Неклассические задачи для уравнений в частных производных второго порядка. Дисс. к-та физ.-мат. наук. Москва. — 2015.*

[22] *Protter M.H. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // Journal of Rational Mechanics and Analysis. — 1954. — Vol. 3. — №. 5. — P. 435-446.*

кой правой части уравнения имеет сингулярные обобщенные решения. В настоящее время исследования в этом направлении ведутся J.M. Rassias, N. Popivanov, M. Schneider и их учениками. Например, для уравнений типа Келдыша ими была показана[23] некорректность задачи, введено определение квазирегулярного решения и найдены достаточные условия единственности таких решений.

Обзор теорем существования и единственности решений для уравнений смешанного типа и приложений к задачам трансзвуковых течений можно найти в работе C.S. Morawetz[24]. Обзор результатов последних десятилетий по краевым задачам для уравнений смешанного типа для трансзвуковых течений, касающийся вычислительных аспектов динамики жидкостей и таких практических задач, как проектирование аэродинамического профиля и управление течением жидкости, приведен в монографии А.Г. Кузьмина[25].

Цель диссертационной работы. В свете перечисленных выше работ и направлений исследований по уравнениям смешанного типа научный интерес представляет исследование решений неклассических краевых задач для уравнений смешанного типа, что и является целью настоящей диссертационной работы. Важно исследовать системы функций, с помощью которых выписываются решения неклассических краевых задач, получить биортогональные системы и интегральные представления решений в аналитическом виде. Интерес представляет исследование спектральной задачи для уравнения смешанного типа с линией вырождения, проходящей под произвольным углом к оси координат. Еще одним важным вопросом диссертационной работы является получение корректно поставленных задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях при помощи введения нелокальных условий.

[23] *Hristov T.D., Popivanov N.I., Schneider M. On uniqueness of quasi-regular solutions to Protter problem for Keldish type equations // AIP Conference Proceedings. – AIP, 2013. – Vol. 1570. – №. 1. – P. 321-326.*

[24] *Morawetz C.S. Mixed equations and transonic flow // Journal of Hyperbolic Differential Equations. – 2004. – Vol. 1. – №. 01. – P. 1-26.*

[25] *Kuz'min A.G. Boundary value problems for transonic flow. John Wiley and Sons, London, UK. – 2003. – 316 P.*

Основные результаты работы.

1. Доказано свойство базисности двухсерийных тригонометрических систем в пространстве $L_2\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и в явном аналитическом виде построена биортогональная к ней система функций. Результаты расширены на случай двухсерийных систем функций с идентичной второй серией и с произвольными функциями в первой серии, на которые наложены ограничения симметричности относительно $\theta=\frac{\pi}{4}$ и базисности Рисса в пространстве $L_2\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. С помощью аналитического вида биортогональной системы построено интегральное представление решения задачи Франкля в специальной области.

2. Изучены спектральные вопросы задач для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае наклонной линии изменения типа: задачи Трикоми с линией вырождения, проходящей под произвольным углом $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ к оси x, и задачи Геллерстедта с двумя линиями изменения типа, проходящими под двумя, не обязательно равными, углами α_1, $\alpha_2\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ к оси x (в последнем случае линия вырождения является негладкой). Получены условия на спектральные параметры областей эллиптичности и гиперболичности, при которых собственные функции рассматриваемых задач выписаны в явном виде и показано, что они образуют базис Рисса в эллиптической области. Получено интегральное условие связи типа свертки, приносимое гиперболической областью на границу и связывающее значения функции и ее производных на линии изменения типа.

3. Получена постановка корректной по Адамару краевой задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Показано, что задача с нелокальным условием, связывающим значения функции в гиперболической области со значениями на линии изменения типа, является корректно поставленной не только в двумерном, но и в трехмерном пространствах.

Методы исследования. В диссертации используется теория дифференциальных уравнений, функциональный анализ, теория функции комплексного переменного, операционное исчисление, теория сингулярных интегральных операторов, теория специальных функций, теория интегральных уравнений Вольтерры.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность работы. Впервые получены биортогональные системы в аналитическом виде для рассматриваемых двухсерийных систем функций. Явный вид биортогональных систем может использоваться при построении решений уравнений смешанного типа в интегральном виде и при доказательстве равномерной сходимости рядов Фурье в спектральном методе решения краевых задач. Для уравнений смешанного типа с линиями вырождения, проходящими под углом к оси координат, найдены условия, при которых собственные функции *выписываются в явном* виде. Получено интегральное условие связи в виде свертки на линии изменения типа, что позволяет сводить неклассические краевые задачи для уравнений смешанного типа с наклонной линией вырождения к задаче для эллиптического уравнения. Впервые рассмотрена корректная по Адамару нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа в трехмерном пространстве с нелокальным условием, связывающим значения функции на границе со значениями функции на линии изменения типа. Полученные результаты диссертации могут быть использованы в практике при математическом моделировании процессов трансзвуковой газовой динамики и в учебных целях при преподавании функционального анализа и дифференциальных уравнений в частных производных.

Апробация работы. Результаты работы были представлены в виде докладов на конференциях:

1. международная молодежная конференция «Ломоносов», Московский государственный университет М.В. Ломоносова, Москва, 2012 г. и 2013 г.;

2. международная конференция Applications of Mathematics in Engineering

and Economics (AMEE), Созополь, Болгария, 2012 г. и 2013 г.;

3. международная научная конференция «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященная памяти А.В. Бицадзе, Московский государственный университет М.В. Ломоносова, Москва, 2016 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах. Из них работы [1, 2, 3, 4] опубликованы в российских журналах из перечня ВАК. Работа [5] опубликована в зарубежном журнале, включенном в Web of Science и/или Scopus. Личный вклад автора, отражающий основные результаты, выносимые на защиту, состоит в их самостоятельном получении. Участие научного руководителя Е.И. Моисеева ограничивается постановкой задач, составлением планов исследований, проверкой достоверности полученных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 111 страниц. Библиография содержит 119 наименований.

Содержание работы

В первой главе, результаты которой изложены в работах [2] и [3], исследуется семейство двухсерийных тригонометрических систем следующего вида

$$\{\cos 4n\theta\}_{n=0}^{\infty},\ \left\{\sin\left[4\left(n+\frac{\beta}{2}\right)\theta+\frac{\gamma}{2}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}, \tag{1}$$

которое является естественным обобщением двухсерийных тригонометрических систем функций $\{\cos 4n\theta\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\cos 4(n-\Delta)\theta\}_{n=1}^{\infty}$ с параметром $\Delta \in (-\infty, \infty)$, возникающих при решении задачи Франкля с нелокальным условием четности. Вначале изучается свойство базисности в смысле Рисса системы функций (1) в пространстве $L_2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Определение 1. Система функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в гильбертовом пространстве H, если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис в H и существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что для любого $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ сходится, причем справедливы двусторонние оценки

$$C_1 \|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right\|_H^2 \leq C_2 \|c\|_{l_2}^2.$$

Для системы функций (1) были получены следующие утверждения.

Теорема 1. *Двухсерийная система функций (1) образует базис Рисса в пространстве $L_2\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ для любых $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, удовлетворяющих условию $\frac{\gamma}{\pi} \neq -\beta + k$ при всех $k \in 2\mathbb{Z} + 1$.*

Следствие 1. *Пусть $\beta = \beta_0 + 2m$ при $\beta_0 \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие $\frac{\gamma}{\pi} \neq -\beta + k$ при всех $k \in 2\mathbb{Z} + 1$. Тогда в пространстве $L_2\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ двухсерийная система функций (1) при $m = 0$ образует базис Рисса, при $m > 0$ минимальна и неполна, при $m < 0$ не минимальна и полна.*

Полученные результаты обобщены на следующий класс двухсерийных систем функций.

Определение 2. Будем говорить, что система функций $\{g_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ принадлежит классу функций $\mathcal{R}$, если система $\{g_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортогональный базис Рисса в $L_2\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно $g_n(\theta) = g_n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

Следствие 2. *Пусть $\beta = \beta_0 + 2m$ при $\beta_0 \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие $\frac{\gamma}{\pi} \neq -\beta + k$ при всех $k \in 2\mathbb{Z} + 1$. Пусть система $\{g_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{R}$. Тогда в пространстве $L_2\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ двухсерийная система функций $\{g_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$, $\left\{\sin\left[4\left(n + \frac{\beta}{2}\right)\theta + \frac{\gamma}{2}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ при $m = 0$ образует базис Рисса, при $m > 0$ минимальна и неполна, при $m < 0$ не минимальна и полна.*

Замечание 1. *Пусть выполнено условие $\frac{\gamma}{\pi} = -\beta + k$ при $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ и система функций $\{g_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{R}$. Тогда двухсерийная система функций $\{g_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$, $\left\{\sin\left[4\left(n + \frac{\beta}{2}\right)\theta + \frac{\gamma}{2}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ не образует базис в пространстве $L_2\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.*

Рассматривается вопрос построения биортогональной системы к системе функций (1) в явном виде. Из теоремы 1 следует, что функция $f(\theta) \in L_2\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ единственным образом разложима в пространстве $L_2\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ в ряд

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos 4n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left[4\left(n+\frac{\beta}{2}\right)\theta + \frac{\gamma}{2}\right],$$

где коэффициенты разложения A_n и B_n однозначно определяются через биортогональную систему $\{G_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{H_n(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$

$$A_n = \int\limits_0^{\pi/2} f(\varphi)G_n(\varphi)\,d\varphi,\ B_n = \int\limits_0^{\pi/2} f(\varphi)H_n(\varphi)\,d\varphi.$$

Доказана следующая теорема о виде биортогональной системы.

Теорема 2. *Биортогональная система функций $\{G_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{H_n(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ к двухсерийной системе функций (1) в пространстве $L_2\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ для любых $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, удовлетворяющих $\frac{\gamma}{\pi} \neq -\beta + k$ при всех $k \in 2\mathbb{Z}+1$, имеет вид*

$$G_n(\theta) = \left[\frac{2}{\pi}\cos 4n\theta - \frac{8\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{\gamma}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}}{\pi^2}\ v.p.\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\theta}\right)^{-\beta}\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin 2(\theta+\varphi)\sin 2(\theta-\varphi)}\cos 4n\varphi\,d\varphi\right]\times$$
$$\times\begin{cases}1 & n=0\\ 2 & n\in\mathbb{N}\end{cases},$$

$$H_n(\theta) = \frac{2}{\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}}\times$$
$$\times\left[\frac{2}{\pi}\sin\left[4\left(n+\frac{\beta}{2}\right)\theta - \frac{\pi\beta}{2}\right] + \frac{2}{\pi^2}(2\sin 2\theta)^{\beta}\sin\pi\beta\int\limits_0^1\frac{u^{n+\beta}\sin 4\theta\,du}{(1-u)^{\beta}(u^2+1-2u\cos 4\theta)}\right].$$

Следствие 3. *Для функций биортогональной системы справедливы следующие оценки*

$$|H_n(\theta)| \leq c_1|\cos 2\theta|\cdot|\sin 2\theta|^{\beta+1} + c_2$$

$$|G_n(\theta)| \leq C_1 + C_2\left[\ln|\theta| + \ln\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right| + \ln\left|\frac{\pi}{4}-\theta\right|\right] + C_3\left[|\theta|^{-\alpha} + \left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|^{-\alpha}\right],$$

где $\alpha = \alpha(\beta) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, а c_1, c_2, C_1, C_2, C_3, — константы, не зависящие от номера n и параметров β, γ.

Также справедливо обобщение.

Следствие 4. *Пусть система* $\{g_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{R}$. *Тогда биортогональная система* $\{G_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{H_n(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ *к двухсерийной системе функций* $\{g_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$, $\left\{\sin\left[4\left(n+\frac{\beta}{2}\right)\theta+\frac{\gamma}{2}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ *в пространстве* $L_2\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$ *для любых* $\beta \in \left(-\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}\right)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющих* $\frac{\gamma}{\pi} \neq -\beta+k$ *при всех* $k \in 2\mathbb{Z}+1$, *имеет вид*

$$G_n(\theta) = \|g_n\|^{-2}_{L_2(0,\frac{\pi}{4})}\left[\frac{1}{2}g_n(\theta) - \frac{2\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{\gamma}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}}{\pi}\,v.p.\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\theta}\right)^{-\beta}\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin 2(\theta+\varphi)\sin 2(\theta-\varphi)}g_n(\varphi)\,d\varphi\right]$$

$$H_n(\theta) = \frac{2}{\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}}\times$$
$$\times\left[\frac{2}{\pi}\sin\left[4\left(n+\frac{\beta}{2}\right)\theta-\frac{\pi\beta}{2}\right]+\frac{2}{\pi^2}(2\sin 2\theta)^{\beta}\sin\pi\beta\int\limits_0^1\frac{u^{n+\beta}\sin 4\theta\,du}{(1-u)^{\beta}(u^2+1-2u\cos 4\theta)}\right].$$

В заключении главы рассматривается регулярное решение задачи Франкля в специальной области из работы Е.И. Моисеева, удовлетворяющее уравнению Лаврентьева-Бицадзе $u_{xx}+\operatorname{sgn} y\; u_{yy}=0$ в области $\mathcal{D}$, ограниченной отрезком AA' оси OY, где $A=(0,1)$, $A'=(0,-1)$, отрезком характеристики $A'C=\{y=x-1,\ 0\le x\le 1\}$, где $C=(1,0)$, и дугой L единичной окружности с центром в начале координат, проходящей через точки A и C, и следующим краевым условиям

$$u_x|_{A'A}=0;\qquad u(0,\,y)=u(0,\,-y),\quad y\in[0,\,1];\qquad u|_L=f(\theta),\quad \theta\in\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right].$$

Решение задачи было получено в виде ряда по двухсерийной тригонометрической системе функций $\{\cos 4n\theta\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\sin(4n-1)\theta\}_{n=1}^{\infty}$, которая является частным случаем системы (1) при $\beta=-\frac{1}{2}$, $\gamma=0$. С помощью построенной биортогональной системы выписано интегральное представление для решение задачи Франкля в указанной области в предположении, что функция $f(\theta)$ лежит в классе Гельдера: в эллиптической области $(z=re^{i\theta})$

$$u(r,\,\theta)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}f(\varphi)\Re w(z,\varphi)\,d\varphi+\frac{16}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\, f(\varphi)\ \text{v.p.}\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi}\right)^{1/2}\frac{\sin 2\varphi\cos 2\varphi\,\Re w(z,\psi)}{\sin 2(\varphi+\psi)\sin 2(\varphi-\psi)}\,d\psi+$$
$$+\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}f(\varphi)\Im r(z,\varphi)\,d\varphi-\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\, f(\varphi)(2\sin 2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^1\frac{q^{\frac{1}{2}}(1-q)^{\frac{1}{2}}\sin 4\varphi\,\Im v(z,q)\,dq}{(q^2+1-2q\cos 4\varphi)}$$

и гиперболической области

$$2u(x,y) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} f(\varphi)\tilde{w}(x,y,\varphi)\,d\varphi + \frac{16}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\, f(\varphi)\ \text{v.p.}\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi}\right)^{1/2}\frac{\sin 2\varphi\cos 2\varphi\,\tilde{w}(x,y,\psi)}{\sin 2(\varphi+\psi)\sin 2(\varphi-\psi)}\,d\psi +$$

$$+\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} f(\varphi)\tilde{r}(x,y,\varphi)\,d\varphi - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\, f(\varphi)(2\sin 2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^1 \frac{q^{\frac{1}{2}}(1-q)^{\frac{1}{2}}\sin 4\varphi\,\tilde{v}(x,y,q)\,dq}{(q^2+1-2q\cos 4\varphi)},$$

где участвуют следующие функции

$$w(s,\varphi) = \frac{1-s^4\cos 4\varphi}{1-2s^4\cos 4\varphi+s^8} - \frac{1}{2}; \qquad \tilde{w}(x,y,\varphi) = w(x+y,\varphi) + w(x-y,\varphi);$$

$$v(s,q) = \frac{s^3}{1-qs^4}; \qquad \tilde{v}(x,y,q) = v(x+y,q) - v(x-y,q);$$

$$r(s,\varphi) = s^3\frac{s^4\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(3\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{1-2s^4\cos 4\varphi+s^8}; \qquad \tilde{r}(x,y,\varphi) = r(x+y,\varphi) - r(x-y,\varphi).$$

Во второй главе, результаты которой изложены в работах [4] и [5], изучаются уравнения смешанного типа со спектральным параметром и наклонной линией изменения типа (линия вырождения образует произвольный угол α с осью x). Рассмотрена задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральными параметрами μ^2 и $\tilde{\mu}^2$ для эллиптической и гиперболической областей соответственно

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) + \mu^2 u(x,y) = 0, & \text{в эллиптической области } \mathcal{D}^+, \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + \tilde{\mu}^2 u(x,y) = 0, & \text{в гиперболической области } \mathcal{D}^-, \end{cases} \tag{2}$$

в области $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$:

- отрезок $AB = \{y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha \,|\, x \in (0, \cos\alpha)\}$, где $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ — наклонная линия изменения типа уравнения;
- эллиптическая область $\mathcal{D}^+$ ограничена осью y, отрезком AB и сектором единичной окружности $BD = \left\{x = \cos\varphi, y = \sin\varphi \,|\, \varphi \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$;
- гиперболическая область $\mathcal{D}^-$ ограничена отрезком AB и двумя характеристиками уравнения $u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0$: $y = -x$ (отрезок AC) и $y = x - \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ (отрезок BC).

Введено следующее обозначение для значений решения $u(x,y)$ уравнения (2) в областях эллиптичности и гиперболичности

$$\begin{cases} u^+(\cdot,\cdot) = u(\cdot,\cdot), & \text{в эллиптической области } \mathcal{D}^+, \\ u^-(\cdot,\cdot) = u(\cdot,\cdot), & \text{в гиперболической области } \mathcal{D}^-. \end{cases}$$

Искомая функция $u(x,y)$ должна удовлетворять однородным краевым условиям

$$u(x,y)|_{AD} = 0, \qquad u(x,y)|_{AC} = 0, \qquad u(x,y)|_{\widehat{BD}} = 0, \tag{3}$$

условию непрерывности на линии изменения типа AB

$$u^+(x,y)|_{AB} = u^-(x,y)|_{AB} \tag{4}$$

и условию сопряжения градиентов

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u^+(r,\varphi)}{\partial\varphi}\Big|_{AB} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^-(\rho,\psi)}{\partial\psi}\Big|_{AB}, \tag{5}$$

заданному в полярной системе координат ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) для эллиптической области и гиперболической системе координат ($x = \rho\,\mathrm{ch}\,\psi$, $y = \rho\,\mathrm{sh}\,\psi$) для гиперболической области. При горизонтальной линии вырождения ($\alpha = 0$) условие сопряжения градиентов переходит в условие непрерывности градиента. Решение $u(x,y)$ ищется в следующем классе функций

$$C(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^1(\mathcal{D}^+ \cup AB) \cap C^2(\mathcal{D}^+) \cap C^2(\bar{\mathcal{D}}^- \setminus (\overline{AC} \cup \overline{CB})), \tag{6}$$

причем допускается особенность порядка ниже единицы в концевых точках A и B линии изменения типа для градиента решения $u(x,y)$: существуют константы $c > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что

$$|\nabla u| \le \frac{c}{[((x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2)(x^2+y^2)]^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}. \tag{7}$$

Определение 3. Функция $u(x,y)$ класса (6)-(7), удовлетворяющая уравнению (2) в области $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$, граничным условиям (3) и условиям сопряжения (4)–(5) называется решением задачи $T_{\mu,\tilde{\mu}}$, или собственной функцией задачи

Трикоми с соответствующими собственными значениями μ^2 и $\tilde{\mu}^2$ в областях эллиптичности и гиперболичности.

Для построения решения рассматриваемой задачи $T_{\mu,\tilde{\mu}}$ найдено интегральное условие связи на наклонной линии изменения типа AB, которое задается областью гиперболичности. Для этого рассмотрено уравнение (2) в гиперболической области $\mathcal{D}^-$ в новой системе координат $\left(x' = \frac{x+y}{2}, y' = \frac{x-y}{2}\right)$, в которой линия изменения типа AB описывается уравнением $y' = x' \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, а функция $u(x', y')$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$u_{x'y'}(x', y') + \tilde{\mu}^2 u(x', y') = 0, \qquad (x', y') \in \mathcal{D}^-. \tag{8}$$

Утверждение 1. *Любую функцию $u(x', y')$ класса (6)-(7), являющуюся решением уравнения (8) и удовлетворяющую условию $u|_{AC} = 0$, можно единственным образом представить в области $\mathcal{D}^-$ в интегральном виде*

$$u(x', y') = \int\limits_0^{x'} \nu(t) J_0\left(2\tilde{\mu}\sqrt{(x' - t)(y' - t\operatorname{ctg}\beta)}\right) dt, \tag{9}$$

где $\beta = \alpha + \frac{\pi}{4}$, J_0 — функция Бесселя первого рода, а $\nu(t)$ — некоторая функция класса $C^1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\right)$, причем

$$|\nu(t)| \le \frac{c}{\left[t\left(t - \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\right)\right]^{1-\varepsilon}}, \qquad c > 0,\ \varepsilon > 0.$$

С помощью полученного представления (9) решения $u(x', y')$ задачи $T_{\mu,\tilde{\mu}}$ в гиперболической области $\mathcal{D}^-$ получено интегральное условие связи между функцией $u(x, y)$ и ее частными производными на линии вырождения AB.

Теорема 3. *Решение $u(x, y)$ задачи $T_{\mu,\tilde{\mu}}$ удовлетворяет следующему интегральному условию связи на наклонной линии вырождения AB:*

в гиперболической области $\mathcal{D}^-$ интегральное условие связи имеет вид ($\operatorname{th}\tilde{\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$)

$$\left[u^-_\rho(\rho, \psi) - \frac{1}{\rho}u^-_\psi(\rho, \psi)\right]\Big|_{AB} = -\tilde{\mu}\int\limits_0^{\rho} u^-(t\operatorname{ch}\tilde{\alpha}, t\operatorname{sh}\tilde{\alpha})\frac{J_1(\tilde{\mu}(\rho - t))}{\rho - t}\, dt, \quad \rho \in (0, \sqrt{\cos 2\alpha}); \tag{10}$$

в эллиптической области $\mathcal{D}^+$ интегральное условие связи имеет вид

$$\left[u_r^+(r,\varphi)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} - \frac{1}{r}u_\varphi^+(r,\varphi)\right]\Big|_{AB} = -\tilde{\mu}\int\limits_0^r u^+(t\cos\alpha, t\sin\alpha)\frac{J_1\left(\tilde{\mu}\sqrt{\cos 2\alpha}(r-t)\right)}{r-t}\,dt, \quad r\in(0,1), \tag{11}$$

Замечание 2. *В случае горизонтальной линии изменения типа (угол $\alpha = 0$) интегральное условие связи редуцируется к условию, полученному С.М. Пономаревым в его диссертации.*

Утверждение 2. *Функция $u(x,y)$ класса (6)-(7), определенная в $\mathcal{D}^+$ и удовлетворяющая в этой области уравнению (2), обращающаяся в нуль на границах*

$$u(x,y)|_{AD} = 0, \qquad u(x,y)|_{\widehat{BD}} = 0,$$

продолжима до решения задачи $T_{\mu,\tilde{\mu}}$ в области $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда выполнено интегральное условие (11).

Таким образом задача $T_{\mu,\tilde{\mu}}$ сводится к задаче для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничном условии. При доказательстве утверждения не используются никакие свойства, касающиеся решения в эллиптической области, поэтому утверждение остается верным (с тем же интегральным условием) и для задач, в которых область эллиптичности имеет другую форму и/или в ней заданы другие граничные условия.

Теорема 4. *Пусть спектральные параметры областей эллиптичности и гиперболичности связаны условием $\mu = \tilde{\mu}\sqrt{\cos 2\alpha}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда функции*

$$u_{nm}(x,y) = \begin{cases} u_{nm}^+(r,\varphi) = J_{w_n}(\mu_{nm}r)\cdot\sin\left[w_n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right], & \text{в эллиптической области } \mathcal{D}^+ \\ u_{nm}^-(\rho,\psi) = J_{w_n}(\tilde{\mu}_{nm}\rho)e^{w_n(\psi-\tilde{\alpha})}\sin\left[w_n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] & \text{в гиперболической области } \mathcal{D}^-, \end{cases} \tag{12}$$

где $\operatorname{th}\tilde{\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, $w_n = \frac{-\operatorname{arctg}\sqrt{\cos 2\alpha}+\pi n}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$, $n\in\mathbb{N}$, μ_{nm} — m-ый корень функции Бесселя первого рода $J_{w_n}(t)$, $m\in\mathbb{N}$, являются собственными функциями задачи Трикоми с соответствующими собственными значениями μ_{nm}^2 и $\tilde{\mu}_{nm}^2$ в областях эллиптичности и гиперболичности.

Замечание 3. *Для задачи $T_{\mu,\tilde{\mu}}$ с горизонтальной линией изменения типа (случай $\alpha = 0$) спектральные параметры равны $\mu = \tilde{\mu}$ и собственные функции задачи Трикоми совпадают с полученными С.М. Пономаревым.*

Теорема 5. *Пусть $\mu = \tilde{\mu}\sqrt{\cos 2\alpha}$ при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда собственные функции (12) задачи Трикоми образуют базис Рисса в эллиптической области в пространстве $L_2(\mathcal{D}^+)$.*

Изучена следующая задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральными параметрами μ^2, $\tilde{\mu}_1^2$, $\tilde{\mu}_2^2$

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) + \mu^2 u(x,y) = 0, & \text{в эллиптической области } \mathcal{D}^+, \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + \tilde{\mu}_1^2 u(x,y) = 0, & \text{в гиперболической области } \mathcal{D}_1^-, \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + \tilde{\mu}_2^2 u(x,y) = 0, & \text{в гиперболической области } \mathcal{D}_2^- \end{cases} \tag{13}$$

в области $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}_1^- \cup \mathcal{D}_2^-$:

- $AB = \{y = x \operatorname{tg}\alpha_1 | x \in (0, \cos\alpha_1)\}$ и $AB' = \{y = x \operatorname{tg}\alpha_2 | x \in (-\cos\alpha_2, 0)\}$ — линии изменения типа, образующие произвольные углы α_1 и $\pi - \alpha_2$ с осью x, углы могут не совпадать и лежат в интервале $\alpha_1,\ \alpha_2 \in (-\pi/4, \pi/4)$;

- эллиптическая область $\mathcal{D}^+$ ограничена отрезками AB и AB' и дугой единичной окружности $BB' = \{x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi | \varphi \in [\alpha_1, \pi - \alpha_2]\}$;

- гиперболическая область $\mathcal{D}^- = \mathcal{D}_1^- \cup \mathcal{D}_2^-$ состоит из двух несимметричных треугольников ABC и $AB'C'$:

  треугольник ABC ограничен линией изменения типа AB и двумя характеристиками уравнения $u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0$: $y = -x$ (отрезок AC) и $y = x - \sqrt{2}\cos(\alpha_1 + \pi/4)$ (отрезок BC);

  треугольник $AB'C'$ ограничен линией изменения типа AB' и двумя характеристиками уравнения $u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0$: $y = x$ (отрезок AC') и $y = -x - \sqrt{2}\cos(\alpha_2 + \pi/4)$ (отрезок $B'C'$).

Искомая функция $u(x,y)$ должна удовлетворять краевым условиям

$$u|_{AC}=0,\qquad u|_{AC'}=0,\qquad u|_{\widehat{BB'}}=0, \tag{14}$$

и аналогичным условиям сопряжения, что и в задаче $T_{\mu,\tilde{\mu}}$, на линиях изменения типа AB и AB': непрерывности функции

$$u^+|_{AB}=u^-|_{AB};\qquad u^+|_{AB'}=u^-|_{AB'}; \tag{15}$$

и условию сопряжения градиентов

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u^+(r,\varphi)}{\partial\varphi}\bigg|_{AB}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^-(\rho,\psi)}{\partial\psi}\bigg|_{AB};\qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial u^+(r,\varphi)}{\partial\varphi}\bigg|_{AB'}=\frac{1}{\rho'}\frac{\partial u^-(\rho',\psi')}{\partial\psi'}\bigg|_{AB'}, \tag{16}$$

где в гиперболической области $\mathcal{D}_1^-$ используются гиперболические координаты $x=\rho\operatorname{ch}\psi$, $y=\rho\operatorname{sh}\psi$, а в $\mathcal{D}_2^-$ — координаты $x=-\rho'\operatorname{ch}\psi'$, $y=\rho'\operatorname{sh}\psi'$.

Функция $u(x,y)$ отыскивается в классе функций

$$C(\bar{\mathcal{D}})\cap C^1(\mathcal{D}^+\cup AB\cup AB')\cap C^2(\mathcal{D}^+)\cap C^2(\bar{\mathcal{D}}^-\setminus(\overline{AC}\cup\overline{CB}\cup\overline{AC'}\cup\overline{C'B'})), \tag{17}$$

причем допускается особенность порядка ниже единицы в концевых точках A, B и B' линий изменения типа для градиента решения $u(x,y)$: существуют константы $c>0$, $\varepsilon>0$ такие, что

$$|\nabla u|\le\frac{c}{[((x-\cos\alpha_1)^2+(y-\sin\alpha_1)^2)((x+\cos\alpha_2)^2+(y-\sin\alpha_2)^2)(x^2+y^2)]^{\frac{1-\varepsilon}{2}}}. \tag{18}$$

Определение 4. Функция $u(x,y)$ класса (17)–(18), удовлетворяющая уравнению (13) в области $\mathcal{D}=\mathcal{D}^+\cup\mathcal{D}_1^-\cup\mathcal{D}_2^-$, граничным условиям (14) и условиям сопряжения (15)–(16) называется решением задачи $G_{\mu,\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2}$, или собственной функцией задачи Геллерстедта с соответствующими собственными значениями μ^2, $\tilde{\mu}_1^2$ и $\tilde{\mu}_2^2$ в областях эллиптичности и гиперболичности.

Теорема 6. *Пусть спектральные параметры связаны условиями* $\mu=\tilde{\mu}_1\sqrt{\cos2\alpha_1}$, $\mu=\tilde{\mu}_2\sqrt{\cos2\alpha_2}$ *при* α_1, $\alpha_2\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. *Тогда функции*

$$u_{n,m}(x,y)=\begin{cases}J_{w_n}(\mu_{nm}r)\cdot\sin\left[w_n(\varphi-\alpha_1)+\operatorname{arctg}\sqrt{\cos2\alpha_1}\right], & \text{в эллиптической области } \mathcal{D}^+\\ J_{w_n}(\tilde{\mu}_{1,nm}\rho)e^{w_n(\psi-\tilde{\alpha}_1)}\sin\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\cos2\alpha_1}\right] & \text{в гиперболической области } \mathcal{D}_1^-\\ (-1)^{n+1}J_{w_n}(\tilde{\mu}_{2,nm}\rho')e^{w_n(\psi'-\tilde{\alpha}_2)}\sin\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\cos2\alpha_2}\right] & \text{в гиперболической области } \mathcal{D}_2^-,\end{cases} \tag{19}$$

где $\operatorname{th}\tilde{\alpha}_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{th}\tilde{\alpha}_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ *и* $w_n = \frac{-\operatorname{arctg}\sqrt{\cos 2\alpha_1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\cos 2\alpha_2}+\pi n}{\pi-\alpha_1-\alpha_2}$, $n \in \mathbb{N}$, *а* μ_{nm} *— m-ый корень функции Бесселя первого рода* $J_{w_n}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, *являются собственными функциями задачи Геллерстедта с соответствующими собственными значениями* μ^2_{nm}, $\tilde{\mu}^2_{1,nm}$ *и* $\tilde{\mu}^2_{2,nm}$ *в областях эллиптичночти и гиперболичности.*

Теорема 7. *Пусть* $\mu = \tilde{\mu}_1\sqrt{\cos 2\alpha_1}$, $\mu = \tilde{\mu}_2\sqrt{\cos 2\alpha_2}$ *при* $\alpha_1, \alpha_2 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. *Тогда собственные функции (19) задачи Геллерстедта образуют базис Рисса в эллиптической области в пространстве* $L_2(\mathcal{D}^+)$.

В третьей главе, результаты которой изложены в работе [1], рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с нелокальным условием, связывающим значения функции на границе и значения на линии вырождения.

В двумерном пространстве для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y \; u_{yy} = 0$ в области $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$ с линией вырождения $AB = \{(x,y)\,|x \in (0,\pi),\ y = 0\}$ требуется найти решение $u(x,y)$ класса $C(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^1(\mathcal{D} \cup AB) \cap C^2(\mathcal{D}^+) \cap C^2(\mathcal{D}^-)$, градиент которого непрерывен при переходе через линию изменения типа, для следующих двумерных задач $\Pi_{2d,\infty}$ (при $T > 0$) и Π_{2d} (при $T^+ > 0$, $T^- < 0$) при $\alpha \in \mathbb{R}$:

- Задача $\Pi_{2d,\infty}$. Заданы области $\mathcal{D}^+ = (0,\pi)\times(0,+\infty)$, $\mathcal{D}^- = (0,\pi)\times(-T,0)$, краевые условия

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \text{ при } y \in [-T,+\infty); \qquad u(x,+\infty) = 0 \text{ при } x \in [0,\pi]$$

и нелокальное условие $\alpha u(x,0) - u(x,-T) = f(x)$ при $x \in [0,\pi]$;

- Задача Π_{2d}. Заданы области $\mathcal{D}^+ = (0,\pi) \times (0,T^+)$, $\mathcal{D}^- = (0,\pi) \times (T^-,0)$, краевые условия

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \text{ при } y \in [T^-,T^+]; \qquad u(x,T^+) = f^+(x) \text{ при } x \in [0,\pi]$$

и нелокальное условие $\alpha u(x,0) - u(x,T^-) = f^-(x)$ при $x \in [0,\pi]$.

В трехмерной области $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$ для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + \operatorname{sgn} t \, u_{tt} = 0$ с поверхностью вырождения $P = \{(x, y, z) \,|x \in (0, \pi),\ y \in (0, \pi),\ z = 0\}$ требуется найти решение $u(x, y, t)$ класса $C(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^1(\mathcal{D} \cup P) \cap C^2(\mathcal{D}^+) \cap C^2(\mathcal{D}^-)$, градиент которого непрерывен при переходе через поверхность изменения типа, для следующих трехмерных задач $\Pi_{3d,\infty}$ (при $T > 0$) и Π_{3d} (при $T^+ > 0$, $T^- < 0$) при $\alpha \in \mathbb{R}$:

- Задача $\Pi_{3d,\infty}$. Заданы области $\mathcal{D}^+ = (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, +\infty)$, $\mathcal{D}^- = (0, \pi) \times (0, \pi) \times (-T, 0)$, краевые условия

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0, & (y, t) \in [0, \pi] \times [-T, +\infty) \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0, & (x, t) \in [0, \pi] \times [-T, +\infty) \\ u(x, y, +\infty) = 0, & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$

  и нелокальное условие

$$\alpha u(x, y, 0) - u(x, y, -T) = f(x, y), \qquad (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi].$$

- Задача Π_{3d}. Заданы области $\mathcal{D}^+ = (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, T^+)$, $\mathcal{D}^- = (0, \pi) \times (0, \pi) \times (T^-, 0)$, краевые условия

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0, & (y, t) \in [0, \pi] \times [T^-, T^+] \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0, & (x, t) \in [0, \pi] \times [T^-, T^+] \\ u(x, y, T^+) = f^+(x, y), & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$

  и нелокальное условие

$$\alpha u(x, y, 0) - u(x, y, T^-) = f^-(x, y), \qquad (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi].$$

Замечание 4. *Здесь и в дальнейшем запись $u(x, +\infty)$, $x \in G$ означает равномерный по $x \in G$ предел $\lim\limits_{y \to +\infty} u(x, y)$; запись $u(x, y, +\infty)$ — соответственно равномерный по x и y.*

Для исследуемых задач доказаны следующие теоремы о корректности.

Теорема 8. *Пусть* $|\alpha| > \sqrt{2}$ *и функция* $f(x)$ *класса* $C^3[0,\pi]$ *удовлетворяет условиям* $f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0$. *Тогда задача* $\Pi_{2d,\infty}$ *имеет, и притом единственное, решение, устойчивое по* T

$$\|\delta u\|_{C(\mathcal{D})} = \max_{\mathcal{D}} |\delta u| \leq \text{const}\ \delta T,$$

где $\delta u = u_{T+\delta T}(x,y) - u_T(x,y)$ *и введено обозначение* $u_\tau(x,y)$ *для решения задачи* $\Pi_{2d,\infty}$ *при* $T = \tau$.

Замечание 5. *При* $|\alpha| \leq \sqrt{2}$ *для разрешимости может понадобиться счетное число условий ортогональности на функцию* $f(x)$.

Теорема 9. *Пусть* $|\alpha| > \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\operatorname{th}^2 T^+}\right)}$, *функция* $f^-(x)$ *класса* $C^3[0,\pi]$ *удовлетворяет условиям* $f^-(0) = f^-(\pi) = f^{-''}(0) = f^{-''}(\pi) = 0$, *а для функции* $f^+(x)$ *класса* $C^1[0,\pi]$ *выполнено условие* $f^+(0) = f^+(\pi) = 0$. *Тогда задача* Π_{2d} *имеет, и притом единственное, решение, устойчивое по* T^-

$$\|\delta u\|_{C(\mathcal{D})} = \max_{\mathcal{D}} |\delta u| \leq \text{const}\ \delta T^-,$$

где $\delta u = u_{T^- + \delta T^-}(x,y) - u_{T^-}(x,y)$ *и введено обозначение* $u_\tau(x,y)$ *для решения задачи* Π_{2d} *при* $T^- = \tau$.

Замечание 6. *К.Б. Сабитов рассмотрел случай* $\alpha = 0$ *(задача Дирихле) для более общего уравнения и показал некорректность задачи: для разрешимости необходимы дополнительные условия на функции* $f^-(x)$ *и* $f^+(x)$.

Замечание 7. *При условиях теоремы 9 аналогично устойчивости по* T^- *показывается, что задача* Π_{2d} *устойчива по* T^+.

Теорема 10. *Пусть* $|\alpha| > \sqrt{2}$ *и для функции* $f(x,y)$ *класса* $C^4([0,\pi] \times [0,\pi])$ *выполнены следующие условия при* $x \in [0,\pi]$ *и* $y \in [0,\pi]$

$f(0,y) = f(\pi,y) = f(x,0) = f(x,\pi) = 0,$

$f_{xx}(0,y) = f_{xx}(\pi,y) = f_{yy}(x,0) = f_{yy}(x,\pi) = 0.$

Тогда задача $\Pi_{3d,\infty}$ *имеет, и притом единственное, решение, устойчивое по* T

$$\|\delta u\|_{C(\mathcal{D})} = \max_{\mathcal{D}} |\delta u| \leq \mathrm{const} \cdot \delta T^{*}$$

где $\delta u = u_{T+\delta T}(x,y,t) - u_T(x,y,t)$ *и введено обозначение* $u_\tau(x,y,t)$ *для решения задачи* $\Pi_{3d,\infty}$ *при* $T = \tau$.

Замечание 8. *При* $|\alpha| \leq \sqrt{2}$ *для разрешимости может понадобиться счетное число условий ортогональности на функцию* $f(x,\ y)$.

Теорема 11. *Пусть* $|\alpha| > \sqrt{1 + \frac{1}{\mathrm{th}^2(\sqrt{2}T^+)}}$ *и для* $f^-(x,y)$ *класса* $C^4([0,\pi]\times[0,\pi])$ *и* $f^+(x,y)$ *класса* $C^1([0,\pi]\times[0,\pi])$ *выполнены следующие условия при* $x \in [0,\pi]$ *и* $y \in [0,\pi]$

$f^-(0,y) = f^-(\pi,y) = f^-(x,0) = f^-(x,\pi) = 0,$

$f^-_{xx}(0,y) = f^-_{xx}(\pi,y) = f^-_{yy}(x,0) = f^-_{yy}(x,\pi) = 0,$

$f^+(0,y) = f^+(\pi,y) = f^+(x,0) = f^+(x,\pi) = 0.$

Тогда задача Π_{3d} *имеет, и притом единственное, решение, устойчивое по* T^-

$$\|\delta u\|_{C(\mathcal{D})} = \max_{\mathcal{D}} |\delta u| \leq \mathrm{const} \cdot \delta T^-,$$

где $\delta u = u_{T^-+\delta T^-}(x,y,t) - u_{T^-}(x,y,t)$ *и введено обозначение* $u_\tau(x,y,t)$ *для решения задачи* Π_{3d} *при* $T^- = \tau$.

Замечание 9. *При условиях теоремы 11 аналогично устойчивости по* T^- *показывается, что задача* Π_{3d} *устойчива по* T^+.

Автор благодарен своему научному руководителю академику РАН Е.И. Моисееву за постановку задач, поддержку в работе и несомненно полезные советы.

Автор также выражает благодарность сотрудникам кафедры функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ за полезные обсуждения полученных результатов.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Моисеев Е.И., Лихоманенко Т.Н.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Доклады Академии наук, 2012, том 446, № 3, с. 256—258.
2. *Моисеев Е.И., Лихоманенко Т.Н.* О базисности одной тригонометрической системы, возникающей в задаче Франкля // Дифференциальные уравнения, 2013, том 49, № 3, с. 325—331.
3. *Моисеев Е.И., Лихоманенко Т.Н.* О базисности двухсерийной тригонометрической системы // Доклады Академии наук, 2016, том 469, № 1, с. 26–29.
4. *Моисеев Е.И., Лихоманенко Т.Н.* Собственные функции задачи Трикоми с наклонной линией изменения типа // Дифференциальные уравнения, 2016, том 52, № 10, с. 1375–1382.
5. *Moiseev E.I., Likhomanenko T.N.* Eigenfunctions of the Gellerstedt problem with an inclined-type change line // Integral Transforms and Special Functions, 2017, P. 1—8. doi:10.1080/10652469.2017.1288728.

Отпечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать17.04.2017 г.
Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 1,0. Тираж 120 экз. Заказ 092.
Издательство ООО "МАКС Пресс"
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8 495 939-3890/93. Тел./Факс 8 495 939-3891.