На правах рукописи

Булыгин Алексей Иванович

ГЕОМЕТРИЯ ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ $\mathbb{R}$-ДЕРЕВЬЕВ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Специальность 01.01.04 —
«Геометрия и топология»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Архангельск — 2021

Работа выполнена на кафедре высшей математики Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем ФГАОУ ВО "Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова".

Научный руководитель: **Никоноров Юрий Геннадьевич,**
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Смоленцев Николай Константинович,**
доктор физико-математических наук,
профессор,
ФГБОУ ВО "Кемеровский государственный университет",
профессор кафедры фундаментальной математики

Оскорбин Дмитрий Николаевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент,
ФГБОУ ВО "Алтайский государственный университет",
доцент кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий

Ведущая организация: Белорусский государственный университет, Республика Беларусь, г. Минск

Защита состоится " 17 " февраля 2022 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета КФУ.01.05 при ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет". Электронная версия диссертации размещена на сайте К(П)ФУ (http://kpfu.ru).

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610, ученому секретарю диссертационного совета КФУ.01.05.

Автореферат разослан "____" ___________ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
КФУ.01.05,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Насибуллин Р.Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Объектом исследования данной диссертационной работы являются частные случаи подобно однородных неоднородных пространств с внутренней метрикой, а именно некоторые $\mathbb{R}$-деревья.

Однородные пространства с внутренней метрикой подробно изучаются в работах [8–10], монографиях [6; 11] и книге [39]. В статье [10] исследованы подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой, простейшим примером которых является открытая евклидова полупрямая $\mathbb{R}_+$. Свойства локально полных пространств с внутренней метрикой также рассматривались в работах [23; 24]. Группы подобий для пространств с внутренней метрикой изучены в статьях [34; 48], а также в работах [21; 46]. Строение подобно однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой рассматривалось в работах [18–20].

Прямо или косвенно вопросами геометрии $\mathbb{R}$-деревьев математики занимаются с середины XX века, но только в 2002 году, в статье [32], было положено начало их систематическому изучению. Несмотря на многолетние исследования, на данный момент остаются нерешёнными задачи классификации и удобной практической верификации $\mathbb{R}$-деревьев, а также отсутствуют примеры построения подобно однородных вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев и не достаточно подробно изучены их свойства.

Цель работы. Первая цель работы — рассмотреть геометрию строго вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев и произвести их классификацию. **Вторая цель** — показать существование вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев, не являющихся строго вертикальными, и изучить их свойства.

Основные результаты.

1. Рассмотрена геометрия строго вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев и произведена их классификация.
2. Рассмотрены отображения $\mathbb{R}$-деревьев, сохраняющие расстояние один, не являющиеся изометрией.
3. Показано, что число ветвления вертикального, но не строго вертикального $\mathbb{R}$-дерева как минимум континуально.
4. Доказана теорема о существовании вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев, не являющихся строго вертикальными, и исследованы их свойства.

Методы исследований. Используются методы метрической геометрии и классические теоремы из теории топологических групп. Применяются теоремы об однородных пространствах с внутренней метрикой, так как каждому подобно однородному пространству с внутренней метрикой каноническим образом сопоставляется однородное пространство с внутренней метрикой. Также, при решении поставленных задач, применяются конструкции, разработанные в ходе проведения научного исследования.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и снабжены строгими доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в рамках диссертационного исследования, имеют теоретический характер и могут быть использованы при дальнейшем исследовании пространств с внутренней метрикой. Примеры применения $\mathbb{R}$-деревьев приведены в статьях [29;32]. Полезный критерий $\mathbb{R}$-дерева в терминах метрических полурешёток показан в статье [4].

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на следующих научных конференциях и семинарах: Всероссийская молодёжная школа-конференция "Лобачевские чтения – 2018", Казанский федеральный университет, г. Казань, 23 – 28 ноября 2018 г.; Международная конференция "Классическая и современная геометрия", Московский педагогический государственный университет, г. Москва, 22 – 25 апреля 2019 г.; Международная научная конференция "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования", с. Цей, Республика Северная Осетия-Алания, 15 – 20 июля 2019 г.; Международная конференция "Современная геометрия и ее приложения – 2019", Казанский федеральный университет, г. Казань, 4 – 7 сентября 2019 г.; Международная конференция по геометрическому анализу в честь 90-летия академика Ю.Г. Решетняка, Институт математики им. С.Л. Соболева, г. Новосибирск, 22 – 28 сентября 2019 г.; Всероссийская молодёжная школа-конференция "Лобачевские чтения – 2019", Казанский федеральный университет, г. Казань, 25 – 30 ноября 2019 г.; Научно-практическая конференция "Ломоносовские научные чтения", Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, г. Архангельск, 2017 – 2019 гг.; Научный семинар кафедры математического анализа алгебры и геометрии, ВШИТАС САФУ им. М.В. Ломоносова, г. Архангельск, 2017 – 2019 гг.; Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии 2021, Казанский федеральный университет, г. Казань, 23 – 27 августа 2021 г.

Публикации. Всего автором опубликовано 11 работ по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех научных статьях (в журналах, рекомендованных ВАК) [50–52]. Восемь публикаций в материалах конференций [53–60] (имеющих индексацию в РИНЦ).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Нумерация определений, гипотез и теорем состоит из двух чисел: номера главы и порядкового номера в главе. Список литературы содержит **60** наименований и приведен в алфавитном порядке, за исключением публикаций автора по теме исследования, которые выделены в отдельную часть. Общий объём работы составляет **80** страниц машинописного текста.

Содержание работы

Введение содержит информацию об объекте исследования, целях и задачах работы, а также об основных результатах.

Первая глава разбита на два параграфа. Так, в первом (вспомогательном), изложены основные определения и теоремы, а также обсуждаются некоторые конструкции и специфические свойства, характерные для рассматриваемых видов пространств. Во втором параграфе первой главы приведен обзор работ других авторов по теме исследования и сформулированы задачи, подлежащие рассмотрению в рамках диссертации.

Определение 1.9. (см. [10]) Метрическое пространство (X, d) называется *локально полным*, если для любой точки $x \in X$ определено число $r > 0$, такое что замкнутый шар $B(x, r)$ полон в метрике d. Точная верхняя грань радиусов r, для которых шар $B(x, r)$ полон, называется *радиусом полноты* в точке x. Для радиуса полноты используется обозначение $c(x)$.

В дальнейшем, для краткости, метрическое пространство (X, d) иногда будет обозначаться X.

Теорема 1.11. (см. [10]) *Локально полное подобно однородное пространство* (X, d) *однородно тогда и только тогда, когда оно полно.*

В работе рассматриваются исключительно подобно однородные пространства, не являющиеся однородными. Неоднородность пространств означает, что группа всех изометрий действует нетранзитивно.

Определение 1.16. Нетривиальное (содержащее более одной точки) геодезическое пространство (X, d) называется $\mathbb{R}$-*деревом*, если объединение любых двух отрезков $[xy]$ и $[yz]$ в X, пересечение которых есть их общий конец y, является вновь отрезком $[xz]$. Иначе говоря, X является $\mathbb{R}$-деревом, если любая сторона произвольного треугольника $\triangle xyz$ в X содержится в объединении двух других сторон: $[xz] \subset [xy] \cup [yz]$.

Вторая глава диссертации посвящена рассмотрению геометрии строго вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев.

В начале приводится характеризация $\mathbb{R}$-дерева, как геодезического пространства со структурой полулинейной метрической полурешётки, что было частично раскрыто в статье Андреева П.Д. [4]. Основные факты теории решёток и частично упорядоченных множеств можно найти в книгах [13; 37].

Далее вводятся понятия вертикального и строго вертикального $\mathbb{R}$-дерева.

Определение 2.6. Непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *пилообразной*, если:

1. f не является постоянной ни на каком интервале $(c, d) \subset [a, b]$;
2. из того, что f монотонна на интервале $(c, d) \subset [a, b]$ следует, что $f|_{(c,d)}$ — линейная функция с угловым коэффициентом ± 1.

Определение 2.7. Пусть (X, d) — локально полное подобно однородное неоднородное $\mathbb{R}$-дерево и $c : X \to \mathbb{R}_+$ соответствующая функция радиуса полноты. Оно называется *вертикальным*, если на каждом отрезке $[xy]$, параметризованном натуральной параметризацией $\gamma : [a, b] \to X$ так, что $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$, функция радиуса полноты $c(\gamma(t))$ является пилообразной.

Определение 2.8. Вертикальное $\mathbb{R}$-дерево X называется *строго вертикальным*, если на каждом отрезке $[xy] \subset X$ имеется не более одной внутренней точки, которая является точкой локального экстремума радиуса полноты.

Лемма 2.9. Пусть X — строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево. Если на некотором отрезке $[xy] \subset X$ имеется внутренняя точка z, являющаяся локальным минимумом (соответственно, локальным максимумом) радиуса полноты, то всякая точка локального экстремума радиуса полноты на произвольном отрезке является локальным минимумом (соответственно, локальным максимумом).

Поэтому, очевидно, что строго вертикальные $\mathbb{R}$-деревья различаются по типу ветвления.

Определение 2.10. Пусть (X, d) — строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево, отличное от $\mathbb{R}_+$. Будем говорить, что X имеет *ветвление кверху* (соответственно, *ветвление книзу*), если всякая точка локального экстремума радиуса полноты является точкой минимума (соответственно, максимума).

В третьем параграфе второй главы показано, что можно зафиксировать “стандартные” строго вертикальные $\mathbb{R}$-деревья, которые будем называть *модельными*.

Пусть задано некоторое множество G, в котором выделен элемент $e \in G$. Для произвольного $a > 0$ функция $\varphi : [0, a) \to G$ называется *кусочно-постоянной справа*, если для любого $t \in [0, a)$ функция φ постоянна на $[t, t + \varepsilon) \subset [0, a)$ при некотором $\varepsilon > 0$, зависящем от t и φ.

Пусть $X_+(G)$ множество всех пар вида (φ, a), где $a > 0$ произвольна, а $\varphi : [0, a) \to G$ — кусочно-постоянная справа функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = e$. Определим на $X_+(G)$ бинарное отношение $\nearrow$: для функций $(\varphi, a), (\psi, a') \in X_+(G)$ выполняется отношение $\varphi \nearrow \psi$, если $D(\varphi) \subseteq D(\psi)$ и $\psi|_{D(\varphi)} = \varphi$.

Далее определим на множестве $X_+(G)$ метрику $d(\varphi, \psi) = |a - a'|$, если $\varphi \nearrow \psi$ или $\psi \nearrow \varphi$, $D(\varphi) = [0, a)$ и $D(\psi) = [0, a')$. В противном случае, если φ и ψ несовместимы, то метрика определяется $d(\varphi, \psi) = d(\varphi, \varphi \wedge \psi) + d(\varphi \wedge \psi, \psi)$.

Получена следующая

Теорема 2.21. Пространство $X_+(G)$ — подобно однородное неоднородное строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево с ветвлением кверху и числом ветвления $|G|$, где $|G|$ — мощность множества G.

$\mathbb{R}$-дерево $X_+(G)$ называется *модельным $\mathbb{R}$-деревом с ветвлением кверху.* Аналогично определяется модельное строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево с ветвлением книзу.

В четвертом параграфе доказано, что всякое строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево изометрично одному из модельных $\mathbb{R}$-деревьев и выводится следующая классификационная

Теорема 2.27. Пусть T — строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево с числом ветвления $\mathfrak{B}(T)$. Если T имеет тип ветвления кверху, то оно изометрично $X_+(G)$, где G — группа с количеством элементов $|G| = \mathfrak{B}(T)$.

Также в данном параграфе показано, что существует изометрия между $\mathbb{R}$-деревьями с разным типом ветвления.

Определение 2.28. Пусть $(X, d), (X', d')$ — два локально полных подобно однородных неоднородных пространства с внутренней метрикой. Будем говорить, что данные пространства *инверсны* друг другу, если существует гомеоморфизм $I : X \to X'$, называемый инверсией X на X' с коэффициентом $R > 0$, при котором для радиуса полноты $c(x)$ произвольной точки $x \in X$ и радиуса $c(x')$ её образа $x' = I(x)$ выполняется равенство $c(x) \cdot c(x') = R^2$.

Теорема 2.30. Пусть (Y, d) — строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево с ветвлением книзу. Тогда оно инверсно некоторому строго вертикальному $\mathbb{R}$-дереву (Y', d') с ветвлением кверху с тем же числом ветвления.

После чего, на основании Теорем 2.27 и 2.30, получена

Теорема 2.31. Всякое строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево с ветвлением книзу изометрично модельному $\mathbb{R}$-дереву $X_-(G)$ для некоторой группы G.

Отдельно, в пятом параграфе второй главы, рассматриваются общая проблема характеризации метрических пространств А.Д. Александрова. Доказаны следующие предложения:

Предложение 2.35. Пусть X — полное симплициальное дерево, для которого все расстояния между вершинами являются рациональными числами и представляются дробями, знаменатели которых равномерно ограничены. Тогда X допускает биективное отображение на себя, сохраняющее расстояние один и не являющееся изометрией.

Предложение 2.37. Пусть $\mathbb{R}$-дерево X допускает нетривиальную изометрию, а множество попарных расстояний между его точками ветвления не более чем счётно. Тогда X допускает биективное отображение на себя, сохраняющее расстояние один и не являющееся изометрией.

Третья глава посвящена изучению геометрии вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев, не являющихся строго вертикальными, при этом структурно глава разбивается на три параграфа.

В начале рассмотрены особенности ветвления вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев. Показано, что каждая точка может быть как точкой локального максимума, так и точкой локального минимума для функции c на различных отрезках, проходящих через неё. Также доказывается, что число ветвления вертикального $\mathbb{R}$-дерева, не являющегося строго вертикальным, как минимум континуально.

Определение 3.1 Пусть заданы функции $f : [0, a] \to A$ и $g : [0, b] \to A$, где $a, b > 0$ и A — произвольное множество. Будем говорить, что f и g *принадлежат одному ростку*, если существует $\delta > 0$, при котором $f|_{[0,\delta]} = g|_{[0,\delta]}$.

Понятно, что на множестве функций указанного вида отношение принадлежности одному ростку является отношением эквивалентности. Класс функций, эквивалентных заданной функции f, называется её ростком. Росток функции f в нуле обозначается $[f]_0$.

Далее классифицируем особые точки пилообразных функций и их ростков. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — произвольная пилообразная функция. Точка $t \in (a, b)$ называется *неособой*, если f монотонна в её окрестности $(t - \delta, t + \delta) \subset (a, b)$ при некотором $\delta > 0$. Изолированные точки локального экстремума будем называть *особыми точками первого уровня*. Предположим, что для некоторого порядкового числа λ могут быть корректно определены особые точки пилообразных функций уровней меньше λ. Тогда для пилообразной функции $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ точка $t \in [0, a]$ будет считаться *особой точкой уровня* λ, если:

1. она не является неособой или особой точкой уровня меньше λ и
2. остальные точки в некоторой её окрестности $(t - \delta, t + \delta) \subset [0, a]$ уже определены как неособые либо как особые, уровня меньше λ;
3. для любого порядкового числа $\kappa < \lambda$ и любого $\delta > 0$ существует точка $s \in (t-\delta, t+\delta) \subset [0, a]$, которая яляется особой точкой уровня меньше κ.

Определение 3.3 Пилообразная функция $f : [0, a] \to \mathbb{R}_+$ называется *симметричной* в точке $t \in (0, a)$, если $f(t - \tau) = f(t + \tau)$ для всех положительных $\tau < \delta$ и некоторого $\delta > 0$, такого что $(t - \delta, t + \delta) \subset [0, a]$. Если t — особая точка уровня $\lambda > 1$ и f симметрична в ней, то будем считать, что t — симметричная особенность высокого уровня.

Доказана следующая

Теорема 3.4. Пусть Y — вертикальное, но не строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево, $x \in Y$. Тогда для любой пилообразной функции $f : [0, a] \to \mathbb{R}_+$, принимающей в нуле значение $f(0) = c(x)$, росток которой $[f]_0$ не содержит симметричных особенностей высокого уровня, имеется ветвь B $\mathbb{R}$-дерева Y с корнем x, соответствующая ростку $[f]_0$.

Далее, основываясь на рассмотренных особенностях ветвления вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев, во втором параграфе вводятся необходимые определения и конструкции, которые понадобятся при доказательстве теоремы о существовании.

Вертикальное $\mathbb{R}$-дерево X представим в виде лабиринта, который имеет единственный вход и бесконечно много выходов. При этом каждая точка в X отождествляется с маршрутом, ведущим в неё из входа.

Определение 3.5 Пусть задана группа G с единицей e. Рассмотрим пары функций (f, φ), для которых выполнены следующие условия.

1. Функция $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ — пилообразная, причём:
   (1a) $f(0) = 0$ и $f(t) > 0$ при $t \in (0, a]$;
   (1b) существует такое $\delta > 0$, что $f(t) = t$ при всех $t \in [0, \delta]$.
2. Функция φ определена на открытом (в топологии полуинтервала $[0, a)$) подмножестве $A \subset [0, a)$ полной меры Лебега, то есть $\mu_L([0, a) \setminus A) = 0$, и действует на G, причём:
   (2a) φ постоянна на связных подмножествах, то есть если $[\alpha, \beta] \subset A$, то $\varphi|_{[\alpha,\beta]} = \mathrm{const}$;
   (2b) $0 \in A$ и $\varphi(0) = e$. Следовательно $[0, \sigma) \subset A$ для некоторого $\sigma > 0$ и $\varphi(t) = e$ для всех $t \in [0, \sigma)$. Далее будем считать, что выполняется равенство $\sigma = \delta$.

Всякая такая пара функций является *маршрутом* на базе группы G. Число a при этом — длина маршрута. Если задан маршрут $M = (f, \varphi)$ длины a, то функции f и φ называются его первой и второй компонентой, соответственно.

В одну и ту же точку лабиринта ведут несколько разных маршрутов. Если маршрут ведёт в какую-то точку лабиринта, то существует *экзит-маршрут*, который ведёт к одному из выходов. Маршрутом он не является, но обладает многими важными свойствами.

Далее в качестве основного множества X принимается множество всевозможных маршрутов на базе G. Первая задача состоит в том, чтобы ввести на X некоторое отношение эквивалентности τ так, чтобы маршруты, ведущие в одну и ту же точку лабиринта, были бы эквивалентны. Метрику искомого $\mathbb{R}$-дерева будем задавать на фактор-множестве $X^* = X/\tau$. Для определения отношения τ введём следующие понятия.

Определение 3.6. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a, функция φ определена на множестве $A \subset [0, a)$. Точка $s \in [0, a) \setminus A$ называется ***дырой***, если $\varphi|_{(s-\varepsilon, s+\varepsilon)\cap A} = \mathrm{const}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Заметим, что дыра может быть изолированной, то есть обладать окрестностью, в которой нет других дыр, или быть точкой накопления дыр.

Определение 3.7. Пусть заданы два маршрута одной и той же длины a: $M = (f, \varphi)$ и $\widehat{M} = (f, \hat{\varphi})$, причём функция φ определена на множестве

$A \subset [0, a)$, а $\hat{\varphi}$ — на множестве $\hat{A}$ и $A \subseteq \hat{A}$. Первые компоненты маршрутов M и $\widehat{M}$ совпадают. Будем говорить, что маршрут $\widehat{M}$ получен из M заполнением дыр, если $\hat{\varphi}|_A = \varphi$. В этом случае M получен из $\widehat{M}$ прокалыванием дыр.

Лемма 3.8. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a. Тогда существует единственный маршрут $\widehat{M} = (f, \hat{\varphi})$ без дыр, полученный из M заполнением дыр.

Определение 3.9. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a. Будем говорить, что он имеет *возвращение* на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h] \subset [0, a]$, если для любого $s \in (0, h)$ выполняются условия:

1. $f(t_0 - s) = f(t_0 + s)$;
2. $\varphi(t_0 - s) = (\varphi(t_0 + s))^{-1}$.

Возвращение называется *элементарным*, если на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ f имеет единственный локальный экстремум в точке t_0, а φ постоянна на интервале $(t_0 - h, t_0)$ (а следовательно и на интервале $(t_0, t_0 + h)$). Если M не имеет возвращения ни на одном отрезке в $[0, a]$, то принимаем, что M — маршрут без возвращений.

Далее доказывается

Теорема 3.16. Для любого маршрута M существует единственный маршрут $\bar{M}$ без дыр и возвращений, который совпадает с M или получен из M выполнением удаляющей процедуры.

Под *удаляющей процедурой* для множества P понимается конечная или счётная последовательность операций, состоящих в заполнении дыр или удалении возвращений, в результате которой все внутренние точки P оказываются удалёнными.

Определение 3.17. Для маршрутов $M_1 = (f_1, \varphi_1)$ и $M_2 = (f_2, \varphi_2)$ выполнено отношение $M_1 \tau M_2$, если существует маршрут $M = (f, \varphi)$ без дыр и без возвращений, который можно получить удаляющими процедурами как из M_1, так и из M_2.

Из Леммы 3.8 и Теоремы 3.16 следует, что отношение τ транзитивно. Его рефлексивность и симметричность очевидны, следовательно τ — отношение эквивалентности, и корректно определено пространство $X^* = X/\tau$.

В дальнейшем, для удобства, маршрутами определяются элементы пространства X^*, а само это пространство обозначено X, не различая в нём эквивалентные маршруты.

В третьем параграфе третьей главы, доказывается теорема о существовании вертикальных, но не строго вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев, которые являются локально полными подобно однородными неоднородными пространствами, а также рассматриваются их свойства. Для этого выполнено построение примера вертикального $\mathbb{R}$-дерева X, не являющегося строго вертикальным.

В первую очередь на пространстве X определяется частичный порядок. Маршрут $\widehat{M} = (\hat{f}, \hat{\varphi})$ длины $\hat{a}$ предшествует маршруту $M = (f, \varphi)$ длины a и обозначается $\widehat{M} \preceq M$, если $\hat{a} \le a$, $f|_{[0,\hat{a}]} = \hat{f}$, функции φ и $\hat{\varphi}$ определены на множествах A и $\hat{A}$ соответственно, причём $\hat{A} \subset A$ и $\varphi|_{\hat{A}} = \hat{\varphi}$. На языке лабиринта отношение $\widehat{M} \preceq M$ означает, что любой маршрут от входа до точки M обязательно пройдёт через точку $\widehat{M}$.

Далее доказывается

Теорема 3.18. Частично упорядоченное множество $(X, \preceq)$ является нижне-полулинейной $\wedge$-полурешёткой.

Определим на множестве X метрику d. Если маршруты $M_1, M_2 \in X$ связаны отношением $M_1 \preceq M_2$, то полагаем $d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1) = a_2 - a_1$, где a_i — длина маршрута M_i. Для произвольных маршрутов $M_1, M_2 \in X$ расстояние $d(M_1, M_2) = d(M_1, M_1 \wedge M_2) + d(M_1 \wedge M_2, M_2)$.

Доказано, что

Лемма 3.19. Пространство (X, d) является геодезическим.

Полученные теоремы и лемма влекут следующий результат.

Следствие 3.20. Пространство (X, d) является $\mathbb{R}$-деревом.

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы показать, что $\mathbb{R}$-дерево X является локально полным и подобно однородным.

Теорема 3.21. $\mathbb{R}$-дерево X локально полно, причём радиус полноты в точке, задаваемой маршрутом $M = (f, \varphi)$ длины a, равен $c(M) = f(a)$.

Далее изучается группа $\mathrm{Sim}(X)$ подобий пространства X и её подгруппа $\mathrm{Isom}(X)$ движений с тем, чтобы показать подобную однородность X. После чего задается операция $\oplus$ — конкатенации над маршрутами и доказывается

Теорема 3.23. Множество $X_1 = c^{-1}(1) \subset X$ по отношению к операции $\oplus$ является группой.

После чего показано, что группа $\mathrm{Isom}(X)$ действует на $X_1 \subset X$ транзитивно, и получен основной результат работы:

Теорема 3.24. Пространство X является локально полным подобно однородным неоднородным $\mathbb{R}$-деревом. При этом X вертикально, но не строго вертикально.

Если при рассмотрении пространства X, вместо пилообразных функций рассматривать более обширный подкласс класса 1-липшицевых функций, то получается следующая теорема существования.

Теорема 3.25. Существует локально полное подобно однородное неоднородное $\mathbb{R}$-дерево X, не являющееся вертикальным.

Заключение содержит краткое изложение результатов диссертации.

Литература

1. Александров А.Д., *Отображения семейств множеств* // ДАН СССР. — 1970. — Т. 190, № 3. — С. 502–505.
2. Алексеевский Д.В., $\mathbb{S}^n$ *и* $\mathbb{E}^n$ *— единственные римановы пространства, допускающие существенное конформное преобразование* // УМН. — 1973. — Т. 28. — № 5(173). — С. 225–226.
3. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н., *Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий* // Матем. заметки — 1978. — Т. 24. — № 1. — С. 103–110.
4. Андреев П.Д., *Полулинейные метрические полурешётки на* $\mathbb{R}$*-деревьях* // Изв. вузов. Матем. — 2007. — № 6. — С. 3–13.
5. Андреев П.Д., Берестовский В.Н., *Размерности* $\mathbb{R}$*-деревьев и самоподобные фрактальные пространства неположительной кривизны* // Мат. Труды. — 2006. — 9(2). — С. 3–22.
6. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В., *Однородные пространства: теория и приложения* // Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.
7. Берестовский В.Н., *Об* $\mathbb{R}$*-дереве Урысона* // Сиб. матем. журн. — 2019. — **60**:1 — С. 10–19.
8. Берестовский В.Н., *Однородные пространства с внутренней метрикой* // ДАН СССР. — 1998. — Т. 301 — № 2. — С. 268–271.
9. Берестовский В.Н., *Однородные пространства с внутренней метрикой* // Докт. дисс., Ин.-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1990. — 269 с.
10. Берестовский В.Н., *Подобно однородные локально полные пространтва с врутренней метрикой* // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 11. — С. 3–22.
11. Берестовский В.Н., Никоноров Ю.Г., *Римановы многообразия и однородные геодезические* // Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.
12. Берестовский В.Н., *Субметрии пространственных форм неотрицательной кривизны* // Сиб. матем. журн. — 1987. — Т. 35. — № 4. — С. 44–56.
13. Биркгоф Г., *Теория решёток* // М.: Наука, 1984.
14. Богатый С.А., Фролкина О.Д., *Изометричность отображений, сохраняющих периметр* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2004. — № 1. — С. 3–11.
15. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В., *Курс метрической геометрии*, М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
16. Гретцер Г., *Общая теория решеток* // М.: Мир, 1982.
17. Гундырев И.А., *Подобно однородные пространства с внутренней метрикой* // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат. наук. — Омск. — 2015.

18. Гундырев И.А., *О подобно однородных локально-компактных пространствах с внутренней метрикой* // Изв. вузов. Матем. — 2008. — № 4. — С. 28–42.
19. Гундырев И.А., *Строение подобно однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой* // Матем. тр. — **17**:2 (2014) — С. 132–141.
20. Гундырев И.А., *Строение подобно однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой. II* // Матем. тр. — **18**:1 (2015) — С. 15–26.
21. Егоров И.П., *Движения и гомотетии в пространствах Финслера и их обобщениях* // М.: ВИНИТИ Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1984. — № 16. — С. 81–126.
22. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., *Элементы теории функций и функционального анализа* // М.: Наука, 1976.
23. Сосов Е.Н., *О конечной компактности и полноте некоторых пространств отображений с метрикой Буземана* // Изв. вузов. Математика. — 1993. — № 11. — С. 62–68.
24. Сосов Е.Н., *Об одном одуле в геометрии Гильберта* // Изв. вузов. Математика. — 1995. — № 5. — С. 78–82.
25. Урысон П.С., *Пример метрического пространства, нигде не удовлетворяющего второй аксиоме счетности* // П.С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики. Т. II. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. С. 778–780.
26. Шилов Г.Е., *Математический анализ. Специальный курс* // М.: Наука, 1961. — 436 с.
27. Alexandrov A.D., *On a generalization of Riemannian geometry* // Berlin: Jahresber. Humb. Univ., 1955.
28. Berestovskii V.N., Guijarro L., *Metric Characterization of Riemannian Submersions* // Ann. Global Anal. Geom. — 2000. — V. 18. — № 6. — P. 577–588.
29. Berestovskiĭ V.N., Plaut C., *Covering $\mathbb{R}$-trees, $\mathbb{R}$-free groups and dendrites* // Adv. Math. — 2010. — 224 (5). — P. 1765–1783.
30. Berestovskiĭ V.N., Plaut C., *Homogeneneous Spaces of Curvature Bounded Below* // J. Geom. Anal. — 1999. — V. 9. — № 2. — P. 203–219.
31. Berestovskii V.N., *Pathologies in Aleksandrov spaces of curvature bounded above* // Siber. Adv. Math. — 2002. — V. 12, № 4. — P. 1–18.
32. Bestvina M., *$\mathbb{R}$-trees in topology, geometry and group theory* // Handbook of geometric topology, edited by R.J.Daverman, R.B.Sher. — Elsevier Science. — North-Holland, Amsterdam, London, New York. — 2002. — P. 55–91.
33. Bridson M., Haefliger A., *Metric spaces of non-positive curvature*, Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

34. Busemann H., *Similarities and differentiability* // Tohoku Math. J. — 1957. — V. 9. — № 1. — P. 56–67.
35. Buyalo S., Schroeder V., *Embedding of hyperbolic spaces in the product of trees* // Geom. Dedicata 113, 75-93 (2005).
36. Buyalo S., *Lectures on spaces of curvature bounded above* // University of Illinois, Urbana-Champaign, spring semester 1994–1995 a.y., parts I–III.
37. Crawley P., Dilworth R., *Algebraic Theory of Lattices* // Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1973.
38. Chiswell I., *Introduction to* Λ*-trees* // Queen Mary & Westfield College, University of London, UK, 2001, 328 p.
39. Deng S., *Homogeneous Finsler Spaces* // Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2012.
40. Druţu C., Sapir M., *Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups (with an appendix by Denis Osin and Mark Sapir)* // Topology, **44**, 5 (2005), 959-1058.
41. Dyubina A., Polterovich I., *Explicit constructions of universal* $\mathbb{R}$*-trees and asymptotic geometry of hyperbolic spaces* // Bull. Lond. Math. Soc. — 2001. — V. 33. — № 6. — P. 727–734.
42. Gromov M., *Hyperbolic groups* // Essays in Group theory (S.M. Gersten ed.), MSRI-publications 8, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, 1987, P. 75–264.
43. Gromov M., *Asymptotic invariants of infinite groups* // Geometric group theory (G. Niblo and M. Roller eds.), LMS Lecture Notes 182, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
44. Papadopoulos A., *Metric spaces, convexity and nonpositive curvature*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Phisics, 6. EMS, 2005.
45. Rips E., Sela Z., *On systems of equations in free groups. I* // Geom. Funct. Anal. 4, No. 3, 337-371 (1994).
46. Rodionov E.D., Slavskii V.V., *Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces* // Comment. Math. Univ. Carolinae — 2002. — V. 43. — № 2. — P. 271–282.
47. Tits J., *A "theorem of Lie-Kolchin" for trees* // Contributions to Algebra, Academic Press, New York, 1977, P. 377–388.
48. Lovas R., Szilasi J., *Homotheties of Finsler manifolds* // SUT J. Math. 46, No. 1, 23-34 (2010).
49. Urysohn P.S., *Beispiel eines nirgends separablen metrischen Raumes* // Fund. Math. — 1927. — V. 9. — P. 119–121

Список публикаций автора по теме диссертации

50. Andreev P.D., Bulygin A.I., *On the Vertical Similarly Homogeneous* $\mathbb{R}$*-Trees* // Lobachevskii J. Math. — 2019. — 40 (2). — P. 127–139.

51. Андреев П.Д., Булыгин А.И., *О геометрии подобно однородных* $\mathbb{R}$*-деревьев* // Изв. вузов. Матем. — 2020. — № 4 — С. 3–15.
52. Булыгин А.И., *О некоторых свойствах подобно однородных* $\mathbb{R}$*-деревьев* // Владикавказский математический журнал. — 2020. — Том 22.— С. 33–42.

Тезисы конференций

53. Андреев П.Д., Булыгин А.И., *Вертикальные* $\mathbb{R}$*-деревья* // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского "Лобачевские чтения – 2018" — т. 56 — 2018. — С. 21–24.
54. Булыгин А.И., *О границе строго вертикального* $\mathbb{R}$*-дерева* // Ломоносовские научные чтения студентов, аспирантов и молодых учёных – 2018: сборник материалов конференции [Электронный ресурс]; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. — Электронные текстовые данные. — Архангельск: ИД САФУ, 2018. — С. 157–160.
55. Булыгин А.И., *О подобно однородных* $\mathbb{R}$*-деревьях* // Классическая и современная геометрия: Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева (Москва, 22-25 апреля 2019 г.) — Москва: МПГУ, 2019. — С. 65–66.
56. Булыгин А.И., *О применении критериев порядка при построении вертикального* $\mathbb{R}$*-дерева* // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV Международной научной конференции (с. Цей, 15-20 июля 2019 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2019. — С. 63–64.
57. Булыгин А.И., *Геометрия подобно однородных* $\mathbb{R}$*-деревьев* // Международная конференция “Современная геометрия и её приложения – 2019”: сборник трудов. — Казань: Издательство Казанского университета, 2019. — С. 42–46.
58. Bulygin A.I., *On the vertical similarly homogeneous* $\mathbb{R}$*-trees* // International Conference on Geometric Analysis in honor of 90th anniversary of academician Yu.G. Reshetnyak, 22-28 of September 2019: Abstracts / ed. by S.G. Basalaev; Novosibirsk State University. — Novosibirsk: PPC NSU, 2019. — P. 36–38.
59. Булыгин А.И., *Об отображениях* $\mathbb{R}$*-деревьев, сохраняющих расстояние один* // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского “Лобачевские чтения – 2019” — т. 56 — 2019. — С. 38–40.
60. Булыгин А.И., *Геометрия подобно однородных* $\mathbb{R}$*-деревьев* // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 60 // Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии 2021 — Казань: Изд-во Академии наук РТ — 2021. — Т. 60. — С. 374.

Булыгин Алексей Иванович

ГЕОМЕТРИЯ ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ $\mathbb{R}$-ДЕРЕВЬЕВ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 08.12.2021. Заказ № 7833.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография “Издательский дом им. В.Н. Булатова”.