

На правах рукописи

Ф. 204

Гайсин Рашит Ахтярович

**КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ КЛАССОВ
КАРЛЕМАНА НА КОНТИНУУМАХ
КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ**

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

17 АПР 2019



008702319

Ростов-на-Дону – 2019

Работа выполнена на кафедре программирования и экономической информатики ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Юлмухаметов Ринад Салаватович

Официальные оппоненты: Малютин Константин Геннадьевич,
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Курский
государственный университет»,
профессор кафедры математического
анализа и прикладной математики

Брайчев Георгий Генрихович,
доктор физико-математических наук,
доцент, ФГБОУ ВО «Московский
педагогический государственный
университет», профессор кафедры
математического анализа

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский
государственный университет»,
г. Санкт-Петербург

Защита состоится «14» мая 2019 г. в 17.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, улица Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, улица Р. Зорге, 21-ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу: <https://hub.sfedu.ru/diss/announcement/f9e63a38-3736-4403-a991-7227adb5f758/>

Автореферат разослан «6» апреля 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



В.Д. Кряквин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Обобщением класса вещественно-аналитических функций, как известно, являются квазианалитические классы функций на отрезке. Они с самого начала стали объектом многочисленных исследований, которые к середине прошлого века были подытожены в известных монографиях С. Мандельброята (см. [1], [2]). Однако до сих пор остаются открытыми многие вопросы, связанные с квазианалитичностью классов бесконечно дифференцируемых функций на различных множествах комплексной плоскости.

Кратко остановимся на истории вопроса и сформулируем исследуемые в диссертации задачи.

Пусть $\{M_n\}$ — положительная последовательность, I — отрезок вещественной оси. Классом $C_I(M_n)$ называется множество всех бесконечно дифференцируемых на отрезке I функций f , удовлетворяющих условию

$$\max_I |f^{(n)}(x)| \leq C_I^n M_n \quad (n \geq 0).$$

Отметим, что при $M_n = n!$ класс $C_I(M_n)$ совпадает с множеством аналитических на I функций.

В 1912 году Ж. Адамар поставил проблему: «Указать такие условия, которым должны быть подчинены M_n , чтобы всякая функция класса $C_I(M_n)$, обращающаяся в нуль вместе со всеми производными в некоторой точке из I , была тождественно равна нулю». Такой класс был назван квазианалитическим.

Данная проблема вызвала широкий интерес — появились ряд статей А. Данжуа и Э. Бореля. Так, А. Данжуа дал достаточное условие того, чтобы класс $C_I(M_n)$ был квазианалитическим. Т. Карлеман полностью решил проблему Адамара, указав необходимые и достаточные условия квазианалитичности. Позже А. Островским (1930), С. Мандельброятом (1942) и независимо Т. Бангом (1946) в различных терминах были получены эквивалентные условия квазианалитичности класса $C_I(M_n)$. Обычно под теоремой Данжуа-Карлемана и принято понимать теорему об эквивалентных условиях (Карлемана, Островского, Мандельброята-Банга) квазианалитичности класса $C_I(M_n)$ (см. [2]).

Классическая проблема квазианалитичности в дальнейшем обобщалась в разных направлениях. В работах М. М. Джрбашяна и его учеников разработана теория α -квазианалитичности, которая при $\alpha = 0$ совпадает с обычной квазианалитичностью (см. [3]). Дальнейшее развитие теории функций,

а именно комплексного анализа, естественно привелю к новой и актуальной задаче — проблеме квазианалитичности на произвольных континуумах комплексной плоскости. Особый интерес представляют вопросы «аналитической квазианалитичности» — квазианалитичности классов Карлемана в замыканиях областей, а также аналогичные задачи для дуг γ . Последнее, например, вызвано тем, что проблема квазианалитичности класса $C_\gamma(M_n)$ в специальном случае теснейшим образом связана с проблемой полноты соответствующей системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ в пространстве $C(\gamma)$ непрерывных на γ функций (см. [4]–[6]).

Пусть G — некоторая область в $\mathbb{C}$. Через $H(G, M_n)$ обозначим класс функций f , аналитических в области G и удовлетворяющих оценкам

$$|f^{(n)}(z)| \leq c_f A^n M_n, \quad z \in G \quad (n \geq 0).$$

Предположим, что область G обладает тем свойством, что все производные $f^{(n)}$ ($n \geq 0$) функции $f \in H(G, M_n)$ непрерывно продолжаются до границы ∂G . В этом случае класс $H(G, M_n)$ называется квазианалитическим в точке $z_0 \in \partial G$, если из того, что $f \in H(G, M_n)$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ ($n \geq 0$) следует, что $f(z) \equiv 0$.

Как известно, задача о квазианалитичности класса $H(\Delta_\gamma, M_n)$ для угла

$$\Delta_\gamma = \{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\} \quad (1 < \gamma < \infty)$$

впервые была поставлена и решена Р. Салинасом в 1955 г. (см. [7]): класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ является квазианалитическим в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие¹

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{\gamma}{1+\gamma}}} dr = +\infty,$$

где $T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ — функция следа последовательности $\{M_n\}$.

Задача о квазианалитичности класса $H(K, M_n)$, где K — круг, в свое время была решена Б. И. Корнблюмом [8]. Им доказано следующее утверждение: класс $H(K, M_n)$ квазианалитичен в граничной точке тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{3}{2}}} dr = +\infty.$$

¹В 1966 г. этот результат был доказан Б. И. Корнблюмом и для значений γ , $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ (см. в: Корнблум Б. И. Условия нестривальности некоторых классов функций, аналитических в угле и проблемы квазианалитичности // Доклады АН СССР. 1966. Т. 166. № 5. С. 1046–1049).

Условие, необходимое и достаточное для квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в граничной точке произвольной выпуклой ограниченной области D , установлено Р. С. Юлмухаметовым в [9]. В формулировке этого результата фигурирует некоторая функция, достаточно сложно определяемая через опорную функцию (см. [9]).

В терминах функции следа $T(r)$ и более простых геометрических характеристик выпуклой, но не обязательно ограниченной области D критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ доказан в [10].

В последние годы в ряде работ было получено описание классов Карлемана для ограниченных односвязных областей со спрямляемой жордановой границей (см. в [11]). Однако установленные в них критерии квазианалитичности не сформулированы в терминах последовательности $\{M_n\}$.

В связи с этим возникает задача: для каких областей достаточно общего вида (необязательно ограниченных, выпуклых и односвязных) верна теорема типа Данжуа-Карлемана? Выяснение этого вопроса — одна из основных задач, рассматриваемых в настоящей диссертации. Актуальность постановки проблемы квазианалитичности именно в таком виде не только для областей, но и для дуг (вообще для континуумов из C) вызвана, прежде всего, приложениями теории квазианалитических функций.

Так, в работах А. Бёрлинга, Дж. Бреннана, В. Мацаева и М. Содина и других исследованиях обнаружена тесная связь квазианалитичности с задачами аналитического продолжения и аппроксимации полиномами в различных весовых пространствах. А. А. Гончар исследовал задачи, связанные с понятием квазианалитического продолжения через жорданову дугу. Полученные результаты им были применены к исследованию особенностей и единственности представления функций рядами вида $\sum_n A_n(z - a_n)^{-1}$.

Вопросам квазианалитической продолжаемости или непродолжаемости функций, представляемых рядами Дирихле или рядами экспонент посвящены работы А. Ф. Леонтьева (см. [12]–[13]). В [14] А. И. Павловым был приведен пример функции, которая квазианалитически продолжается через прямую голоморфизма на всюду плотном множестве.

Особую актуальность вопросы квазианалитичности классов Карлемана приобретают в связи с задачами аппроксимации системами экспонент на тех или иных континуумах (например, на дугах) комплексной плоскости. Так, в [15] (см. также в [16], [17]) А. Ф. Леонтьевым была доказана теорема о полноте системы экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}$ на кусочно-гладкой кривой γ в метрике $C(\gamma)$. Данная теорема основана на «теореме о стирании особенностей» (см. в [15]),

доказательство которой сводится к обоснованию квазианалитичности класса Карлемана $C_\gamma(M_n)$, где

$$M_n = \sup_{r>0} \frac{r^n}{M(r)}, \quad M(r) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Используя те же соображения квазианалитичности класса $C_\gamma(M_n)$, а именно теорему Банга, R. Zeinstra перенес эти результаты на случай кривых ограниченного наклона. Отметим также, что ранее А. Ф. Леонтьевым для кусочно-гладких дуг γ было показано, что условия Карлемана, Островского, Мандельброта и Банга достаточны для того, чтобы класс $C_\gamma(M_n)$ был квазианалитическим (см. в [15]).

В настоящей диссертации ставится цель в классе дуг ограниченного наклона получить обобщение и усиление указанных выше результатов Банга и А. Ф. Леонтьева.

До сих пор в литературе в должной мере не изучались вопросы регуляризации для общих множеств, отличных от отрезка (не было теории, согласно которой каждый класс Карлемана совпадал бы с регуляризованным классом). Поскольку представляется важным исследование не только так называемых регулярных классов Карлемана (см. в [18]), то ставится также задача: ввести понятие регуляризации в смысле Е. М. Дынькина и в различных терминах получить критерии существования нетривиальных классов Карлемана на произвольных континуумах комплексной плоскости.

Объект исследования. Классы Карлемана на замыканиях жордановых областей и дугах комплексной плоскости.

Степень разработанности темы. Теория квазианалитичности для произвольных континуумов, даже для замыканий жордановых областей и дуг, до сих пор недостаточно разработана. В частности, отсутствует теория регуляризации для общих множеств, отличных от отрезка. Поэтому в общем случае известные в научной литературе основные критерии квазианалитичности ранее были получены только для регулярных классов Карлемана, причем не в терминах классической теоремы Данжуа-Карлемана (см. в [11], [18]).

Цель работы. Доказать теорему типа Данжуа-Карлемана для таких континуумов комплексной плоскости, как замыкания жордановых областей, квазигладких дуг, а для регулярных классов Карлемана — равносильный критерий типа Левинсона-Щеберга. Например, ставится задача получить критерий квазианалитичности в граничной точке жордановой области, если в окрестности данной точки область в определенном смысле близка к углу; выяснить вопрос о совпадении классов Сиддики (см. в [6]) — подклассов Карлемана

(регуляризованного и нерегуляризованного), состоящих из функций, обращающихся в ноль со всеми своими производными в двух точках квазигладкой дуги. Тем самым в данной ситуации ставится цель получить более общий вариант теоремы Банга. А в классе дуг Липшица ставится цель доказать теорему, являющуюся полным аналогом теоремы Банга (достаточность условий Карлемана-Островского и Мандельброта-Банга) для отрезка.

Одной из важнейших задач является вопрос о возможности регуляризации последовательностей (классов Карлемана) в смысле Е. М. Дынькина.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Методика исследования. В работе применяются как классические, так и современные методы вещественного и комплексного анализа. При доказательстве основной теоремы об оценке промежуточных производных использован модифицированный метод доказательства теоремы А. Горного для отрезка и теория интеграла типа Коши. Обобщение теоремы Банга в классе дуг ограниченного наклона основано на «комплексном подходе» в сочетании с «вещественными рассуждениями», предполагающими применение свойств интеграла Лебега. Доказательство основного критерия существования регулярной миноранты неквазианалитичности существенно опирается на свойства преобразования Лежандра.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные в ней выводы и разработанная методика могут быть полезны не только в теории квазианалитических классов функций, но и в теории аппроксимации в комплексной плоскости, целых функций, рядов экспонент, а также в гармоническом анализе, дифференциальных уравнениях и спектральной теории. Они могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте имени В. А. Стеклова, Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В. А. Стеклова, Институте математики с ВЦ Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Южном федеральном университете, Московском, Башкирском университетах, Казанском федеральном университете.

Положения, выносимые на защиту:

1. Критерий квазианалитичности в граничной точке жордановой области (необязательно выпуклой и односвязной), если вблизи рассматриваемой точки область в некотором смысле близка к углу или сравнима с ним.

2. Результаты об оценке промежуточных производных на квазигладкой дуге — комплексные варианты соответствующей теоремы А. Горного для от-

резка.

3. Утверждения о классах Карлемана $C_\gamma(M_n)$ на дугах γ : теорема о совпадении классов Сиддики $C_{00}(M_n; \gamma)$ и $C_{00}(M_n^c; \gamma)$ для квазигладкой дуги γ ($\{M_n^c\}$ — последовательность, полученная из $\{M_n\}$ путем выпуклой регуляризации посредством логарифмов); теорема типа Банга для класса $C_{00}(M_n; \gamma)$ на квазигладкой дуге γ в случае произвольных $M_n > 0$, но подчиненным естественным условиям.

4. Утверждение, обобщающее в классе дуг ограниченного наклона теорему Банга и усиливающее соответствующий результат А. Ф. Леонтьева для кусочно-гладких дуг.

5. Критерии существования регулярной в смысле Е. М. Дынькина миноранты неквазианалитичности для заданной последовательности.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на Международных школах-конференциях для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2012, 2013, 2014); на Международных конференциях «Нелинейные уравнения и комплексный анализ» (оз.Яктыкуль (Южный Урал), 2013, 2014, 2018); на Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки и образования» (Уфа, 2013); на Международной конференции «Нелинейный анализ и спектральные задачи» (Уфа, 2013); на Международной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (Уфа, 2014); на конференции «24th St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis and a Summer School for Young Scientists» (Санкт-Петербург, 2015); на Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2016); на Уфимской математической конференции с международным участием (Уфа, 2016); на Международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию чл.-корр. АН СССР А. Ф. Леонтьева (Уфа, 2017); на Международной конференции «Комплексный анализ и геометрия» (Уфа, 2018).

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались также на Городском семинаре по теории функций имени А. Ф. Леонтьева (Башкирский государственный университет), на семинаре «Комплексный и гармонический анализ» (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 15 печатных работах, из них 3 — в рецензируемых изданиях из списка ВАК, входящих в базы данных Scopus и Web of Science. Список публикаций приводится в конце автореферата.

Личный вклад автора. Результаты диссертации получены лично соис-

кателем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на восемь параграфов, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 114 страниц. Библиография включает 57 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении приведены необходимые сведения, изложена история вопроса, сформулированы постановки задач и основные результаты работы.

В Главе I доказаны различные критерии квазианалитичности для жордановых областей специального вида. Эти результаты являются комплексным аналогом теоремы Данжуа-Карлемана для отрезка $[0, 1]$. Для регулярных классов Карлемана они допускают переформулировку и в терминах билогарфического условия Левинсона.

В § 1 приведены необходимые факты и основные понятия: квазиконформная область (квазикруг), равномерная область¹, регулярный класс Карлемана. Здесь вводится также понятие слабо равномерной области. При этом любая выпуклая область оказывается слабо равномерной.

Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность положительных чисел, $H(D, M_n)$ — класс функций, введенный выше.

В § 1 показано, что если область D слабо равномерна, а $f \in H(D, M_n)$, то все производные $f^{(n)}$ ($n \geq 0$) продолжаются до непрерывных в $\bar{D}$ функций. Доказан следующий аналог теоремы Данжуа-Карлемана для угла Δ_γ .

Теорема 1.1. *Для того, чтобы класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ был квазианалитическим в точке $z = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из эквивалентных условий:*

- 1) $\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\gamma}}} dr = \infty$, где $T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ (критерий Р. Салинаса);
- 2) $\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} = \infty$;
- 3) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\beta_n^{\frac{1}{1+\gamma}}} = \infty$, где $\beta_n = \inf_{k \geq n} M_k^{\frac{1}{k}}$.

Оказывается, если класс Карлемана $H(\Delta_\gamma, M_n^{\frac{1}{1+\gamma}})$ является регулярным, то предыдущая теорема может быть записана в другом виде.

¹Жорданова область является квазикругом тогда и только тогда, когда она — равномерная область (см. в: Андриевский В. В., Белый В. И., Дзядык В. К. Конформные инварианты в конструктивной теории функций комплексного переменного. Киев: Наукова думка, 1998. — 224 с.).

Теорема 1.2. Пусть последовательность $\{M_n\}$ ($n \geq 0$) такова, что измененная последовательность $\{M_n^*\}$, $M_n^* = M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$ ($1 < \gamma < \infty$) является регулярной. Тогда класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^d \ln \ln h_*(r) dr = +\infty,$$

где

$$h_*(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} r^n}, \quad 1 < \gamma < \infty.$$

В § 2 получен аналог теорем Салинаса-Коренблюма для выпуклых областей, граничные точки которых удовлетворяют дополнительному условию.

Теорема 1.3. Пусть D — выпуклая, но необязательно ограниченная область, $z_0 \in \partial D$, а

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности $\{M_n\}$. Через $\beta(z_0, s)$ обозначим величину угла между касательными к границе D , проведенными в точках, удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s . Предположим, что в точке z_0 выполняется условие: при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\sup_s \int_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx < \infty, \quad \pi\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} \beta(z_0, s) \quad (0 < \alpha \leq 1). \quad (I)$$

Тогда класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке z_0 тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = +\infty. \quad (C-K)$$

Отметим, что условие (I) будет выполнено, если, например, при $s \rightarrow 0$

$$\pi\alpha - \beta(z_0, s) = O(s^\gamma) \quad (\gamma > 0),$$

или

$$\pi\alpha - \beta(z_0, s) = O\left(\frac{1}{|\ln s|^\gamma}\right) \quad (\gamma > 1).$$

Приводится и геометрическая интерпретация интегрального условия (I).

Показано, что для угла Δ_γ ($0 < \gamma < 1$) и круга $K = \{z : |z + R| < R\}$ интегральное условие (I) выполнено в любой граничной точке. При $\alpha = \frac{1}{\gamma}$

условие (С-К) совпадает с критерием Салинаса для Δ_γ . Таким образом, теорема 1.3 обобщает теорему Салинаса для угла Δ_γ ($0 < \gamma < 1$) и Коренблума — для круга K (или для полуплоскости Δ_1).

В § 3 аналогичные вопросы рассматриваются для более общих жордановых областей. Для этого, следуя [19], вводятся в рассмотрение области специального вида — двуугольники K^α (пересечение внешностей или внутренностей двух кругов одинакового радиуса $\rho > 0$, окружности которых проходят через начало координат и пересекаются под углом раствора $\pi\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). При этом под K^1 понимается либо внешность, либо внутренность окружности, проходящей через точку O). Показано, что для выпуклого двуугольника K^α интегральное условие (I) выполнено всюду на границе. В силу теоремы 1.3, критерий квазианалитичности для этого двуугольника совпадает с критерием (С-К).

Основным в § 3 является следующий результат (см. теорему 1.4):

Пусть G — жорданова область, $\infty \notin G$. Предположим, что граница $C = \partial G$ состоит из конечного числа кусочно-гладких простых замкнутых кривых, каждая из которых состоит из конечного числа гладких дуг с непрерывной кривизной, образующих в точках стыка внешние углы $\beta\pi$ ($1 < \beta < 2$). Тогда все внутренние (относительно G) углы отличны от 0 и π . Пусть $\pi\alpha(z)$ ($0 < \alpha(z) < 1$) — внутренний угол между односторонними касательными к C в точке z , $\alpha = \inf_{z \in C} \alpha(z)$. По предположению, $\alpha > 0$.

Пусть, далее, $K_1^{\alpha(z)}$ — выпуклый двуугольник, образованный пересечением внутренностей, а $K_2^{\alpha(z)}$ — двуугольник, образованный пересечением внешностей двух кругов одинакового, но достаточно малого радиуса, окружности которых проходят через точку z .

Если последовательность $\{M_n\}$ регулярная, то все три класса $H(G, M_n)$, $H(K_1^{\alpha(z)}, M_n)$, $H(K_2^{\alpha(z)}, M_n)$ квазианалитичны в точке $z \in C$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (С-К)¹:

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha(z)+2}{\alpha(z)+1}}} dr = +\infty.$$

Здесь $T(r)$ — функция следа последовательности $\{M_n\}$.

Для точки гладкости $z \in C$ имеем $\alpha(z) = 1$. Поэтому в данной точке критерий квазианалитичности (С-К) класса $H(G, M_n)$ совпадает с критерием Коренблума.

В Главе II изучаются классы Карлемана $C_\gamma(M_n)$ на дугах γ .

¹То, что критерием квазианалитичности класса $H(K_1^{\alpha(z)}, M_n)$ является условие (С-К), другим способом установлено также в [19].

В § 1 приводятся необходимые сведения и формулируются задачи.

А § 2 посвящен оценке промежуточных производных функций φ из класса $C^k(L)$ на квазигладкой дуге L в предположении, что $\varphi^{(i)}(a) = \varphi^{(i)}(b) = 0$, $0 \leq i \leq n$ ($n \leq k-1$), где a, b — концы дуги². Вначале доказаны леммы 2.1, 2.2 о свойствах спрямляемых дуг. Потом, пользуясь свойствами интеграла Лебега-Стилтьеса и применяя эти леммы, получена формула Тейлора на спрямляемой дуге.

Теорема 2.1. Пусть функция f непрерывна и имеет непрерывные производные $f^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) на спрямляемой дуге L . Тогда для всех $a, b \in L$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n,$$

где

$$R_n = \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt,$$

интегрирование происходит по дуге L от точки a до точки b .

Для кусочно-гладкой дуги теорема установлена А. Ф. Леонтьевым [15].

Далее дано обоснование обоснована справедливости формул Сохоцкого в случае кусочно-квазигладких дуг, имеющих, например, лишь конечное число угловых точек, в том числе — точек возврата. После этого изучаются предельные значения производных интеграла типа Коши по квазигладкой дуге, и доказана основная

Лемма 2.3. Пусть L — квазигладкая дуга с концами в точках a, b , в каждой точке которой существуют обе односторонние касательные (на концах — по одной), φ — плотность интеграла типа Коши по дуге L , $\varphi \in C^k(L)$, причем для некоторого n ($0 \leq n \leq k-1$)

$$\max_{t \in L} |\varphi^{(s)}(t)| \leq C^s M_s \quad (s = n, n+1),$$

и

$$\varphi^{(i)}(a) = \varphi^{(i)}(b) = 0 \quad (0 \leq i \leq n).$$

Тогда

$$\max_{t \in L} \left| \left[\Phi^{(n)}(t) \right]^{\pm} \right| \leq C^n M_n + c(3d + |L|) C^{n+1} M_{n+1},$$

где $c \geq 1$ — постоянная из условия квазигладкости дуги, d — диаметр, $|L|$ — длина дуги L .

²Жорданова дуга L называется квазигладкой, если при некотором $c = c(L) \geq 1$ для любых $z, \xi \in L$ выполняется оценка: $|L(z, \xi)| \leq c|z - \xi|$, где $|L(z, \xi)|$ — длина части дуги между точками z и ξ .

Наконец, получены оценки промежуточных производных на квазигладкой дуге. Соответствующий результат для отрезка ранее был получен А. Горным (см. в [2]).

Теорема 2.2. Пусть L — квазигладкая дуга, заданная уравнением $x = g(y)$ ($A \leq y \leq B$), в каждой точке которой существуют обе односторонние касательные (в концах a и b — только по одной). Предположим, что функция f дифференцируема $n + 2$ раза на дуге L , причем:

- 1) $|f(z)| \leq M_0$, $|f'(z)| \leq M_1$; $|f^{(n+1)}(z)| \leq M_{n+1}$, $|f^{(n+2)}(z)| \leq M_{n+2}$ ($z \in L$);
- 2) $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, n$.

Тогда для всех k , $1 \leq k \leq n$, верны оценки:

$$\max_{z \in L} |f^{(k)}(z)| \leq 8N(2e)^k (M_0 + M_1)^{1 - \frac{k}{n+1}} (M_{n+1} + M_{n+2})^{\frac{k}{n+1}},$$

где $N = c(3d + |L| + 1)$.

Если последовательность $\{M_n\}$ возрастающая и

$$M_{n+1} \leq C^n M_n \quad (n \geq 0), \quad (1)$$

то оценки для промежуточных производных можно записать в виде

$$|f^{(k)}(\xi)| \leq 16N (2C^2 e)^k M_0^{1 - \frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \quad (1 \leq k \leq n), \quad \xi \in L.$$

§ 3 посвящен применению теоремы 2.2, а именно различным обобщениям (в различных подклассах спрямляемых дуг) анонсированной Бангом в [20] теоремы: пусть γ спрямляемая жорданова дуга или локально-спрямляемая простая кривая. Предположим, что последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла, и выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty.$$

Тогда класс

$$C_\gamma(M_n) = \left\{ f \in C^\infty(\gamma) : \sup_{z \in \gamma} |f^{(n)}(z)| \leq K_\gamma^n M_n \quad (n \geq 0) \right\}$$

является квазианалитическим.

Полное доказательство этой теоремы приведено в [21], которое опирается на один результат из [22]. Для квазигладкой дуги утверждение доказано в [23]. Здесь речь идет о теоремах типа Банга для произвольных, вообще говоря, не логарифмически выпуклых и возрастающих $M_n > 0$.

В первом пункте доказана теорема о совпадении классов Сиддики $C_{00}(M_n; \gamma)$ и $C_{00}(M_n^c; \gamma)$, где, например (см. в [4]),

$$C_{00}(M_n; \gamma) = \{f \in C_\gamma(M_n) : f^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\beta) = 0 \ (n \geq 0)\},$$

γ — некоторая квазигладкая дуга с концами α и β .

Так как $M_n^c \leq M_n$, то $C_{00}(M_n^c; \gamma) \subset C_{00}(M_n; \gamma)$ (предполагается, что $C_{00}(M_n; \gamma) \neq \{0\}$). Возникает вопрос: верно ли обратное включение?

Если $\gamma = I$ — отрезок, то это верно, причем $C_{00}(M_n; I) \neq \{0\}$ только в том случае, когда класс $C_I(M_n)$ не является квазианалитическим [1]. Ответом на поставленный вопрос в случае квазигладких дуг является

Теорема 2.3. Пусть $\{M_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям: $M_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и выполняется условие (1). Если γ — квазигладкая дуга, заданная уравнением $y = g(x)$ ($a \leq x \leq b$) и удовлетворяющая условиям теоремы 2.2, то для любой функции $f \in C_{00}(M_n; \gamma)$ верны оценки:

$$\|f^{(n)}\|_\gamma \leq MD_f^n M_n^c \quad (n \geq 0).$$

В качестве применения данной теоремы в п.3.2 доказана

Теорема 2.4. Пусть γ — квазигладкая дуга из теоремы 2.2. Если последовательность $\{M_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} = \infty,$$

то класс $C_{00}(M_n; \gamma)$ является тривиальным.

Это утверждение является аналогом теоремы Банга для класса Сиддики $C_{00}(M_n; \gamma)$ на квазигладкой дуге¹. Важно отметить, что в теореме 2.4 последовательность $\{M_n\}$ не предполагается логарифмически выпуклой.

Теорема 2.5. Пусть Γ — кривая, составленная из конечного числа дуг, каждая из которых в соответствующей системе координат является дугой ограниченного наклона. Если выполняется условие Мандельброт-Банга, то класс $C_\Gamma(M_n)$ является квазианалитическим.

Доказательство теоремы опирается на леммы 2.5, 2.6, основанные на свойствах интеграла Лебега. Это утверждение обобщает результат А. Ф. Леонтьева для кусочно-гладких дуг (см. [15]), а в классе дуг ограниченного наклона усиливает и теорему Банга из [20].

¹ Содержательность предположения $C_{00}(M_n; \gamma) \neq \{0\}$ следует из статьи [5].

В Главе III речь идет о регуляризации последовательностей в смысле Е. М. Дынькина: § 1 данной главы содержит необходимые сведения и направляющие соображения о сути проблемы; здесь же доказаны леммы 3.1 и 3.2 о свойствах слабо регулярных последовательностей; в § 2 вводятся понятия сильной регуляризации и регуляризации по Е. М. Дынькину, а также доказаны две теоремы.

Теорема 3.1. Пусть $M_n > 0$, $(\frac{M_n}{n!})^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для того, чтобы существовала регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что

$$M_n^* \leq M_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty, \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась положительная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $r = r(t)$, $tr(t) \downarrow 0$, $t^2r(t) \uparrow$ при $t \rightarrow \infty$ такая, что

$$1) \frac{1}{M_n^*} \leq r(n) \quad (n \geq 1); \quad 2) \int_1^{\infty} r(t) dt < \infty.$$

В следующей теореме доказан основной критерий существования регулярной (в смысле Е. М. Дынькина) миноранты неквазианалитичности.

Теорема 3.2. Пусть $M_n > 0$, $(\frac{M_n}{n!})^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для того, чтобы существовала регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, удовлетворяющая условиям (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^{\infty} \frac{\omega_T(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Здесь $\omega_T = \omega_T(r)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln T(r)$.

Доказательство данной теоремы существенно опирается на свойства преобразования Лежандра.

Все результаты диссертации получены под непосредственным руководством профессора Р. С. Юлмухаметова, которому выражаю глубокую признательность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В диссертационной работе доказаны теоремы типа Данжуа-Карлемана для жордановых областей достаточно общего вида, а также для квазигладких дуг.

- Впервые рассмотрен и получен ответ на вопрос о совпадении классов Карлемана-Сиддики на квазигладкой дуге и указаны конкретные приложения в теоремах типа Банга-Леонтьева.
- Получены критерии регуляризуемости классов Карлемана в смысле Е. М. Дынькина.

Полученные в работе результаты и разработанные методы будут использованы в дальнейшем в исследованиях, связанных с проблемой полноты систем экспонент на дугах, в интерполяционных задачах, а также в теории асимптотических значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Мандельброт С. Квазианалитические классы функций. М.-Л.: 1937. – 108 с.
- [2]. Мандельброт С. Примающиеся ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М.: ИЛ, 1955. – 268 с.
- [3]. Джрбашян М. М. Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана // ДАН СССР. 1976. Т. 180. № 4. С. 782-785.
- [4]. Siddiqi J. A. Non-spanning sequences of exponentials on rectifiable plane arcs // Linear and complex analysis. Problem book. 1984. 1043. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. NewYork. Tokyo. P. 555-556.
- [5]. Гайсин А. М., Кинзябулатов И. Г. Теорема типа Левинсона - Щёберга. Применения // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 7. С. 41-62.
- [6]. Гайсин А. М., Гайсин Р. А. Неполные системы экспонент на дугах и неквазианалитические классы Карлемана. II // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 1. С. 49-73¹.
- [7]. Salinas R. B. Functions with null moments // Rev. Acad. Ciencias. Madrid. 1955. P. 331-368.
- [8]. Коренблум Б. И. Квазианалитические классы функций в круге // Доклады АН СССР. 1965. Т. 164. № 1. С. 36-39.
- [9]. Юлмухаметов Р. С. Квазианалитические классы функций в выпуклых областях // Матем. сб. 1986. Т. 130(172). С. 500-519.
- [10]. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций и применения. Дисс. ... докт. физ.-мат наук. Уфа: 1986. – 197 с.
- [11]. Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С. Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 2.

¹Результаты данной статьи не включены в диссертацию.

С. 178–217.

[12]. Леонтьев А. Ф. О неквазианалитической продолжаемости функции, представляемой рядом экспонент // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 2. С. 185–193.

[13]. Леонтьев А. Ф. О неквазианалитической продолжаемости функции, заданной рядом экспонент // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1987. Т. 51. № 2. С. 270–286.

[14]. Павлов А. И. Квазианалитическое продолжение и диофантовы приближения // Analysis Math. 1975. Т. 1, № 1. Р. 63–73.

[15]. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.

[16]. Леонтьев А. Ф. О полноте системы экспонент на кривой // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 15. № 5. С. 1103–1114.

[17]. Korevaar J. Approximation on curves by linear combinations of exponentials // Approximation theory. New York, London: Acad. press, 1973. P. 387–399.

[18]. Дынькин Е. М. Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория функций и функциональный анализ (Труды VII Зимней школы. Дрогобыч) М.: АН СССР. Центральный экономико-математический институт, 1976. С. 40–73.

[19]. Прилипо Т. И. Квазианалитические классы функций в комплексной области // Укр. матем. журнал. 1967. Т. 19. № 2. С. 127–134.

[20]. Bang T. Om quasi-analytiske funktioner. Thesis. Univ. of Copenhagen, 1946.

[21]. Zeinstra R. L. Müntz-Szász approximation on curves and area problems for zero sets. Thesis. Univ. Amsterdam, 1985. P. 1–100.

[22]. Cohen P. J. A simple proof of the Denjoy-Carleman theorem // Amer. Math. Monthly. 1968. V. 75. P. 26–31.

[23]. Dales H. G. and Davie A. M. Quasianalytic Banach function algebras // Journal of functional analysis. 1973. V. 13. № 1. P. 28–50.

Публикации по теме диссертации в изданиях из перечня ВАК

1. Гайсин Р. А. Критерии квазианалитичности типа Салинаса-Коренблума для областей общего вида // Уфимский матем. журнал. 2013. Т. 5. № 3. С. 28–40.

2. Гайсин Р. А. Оценка промежуточных производных и теоремы типа Банга. I // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 1. С. 23–48.

3. Гайсин Р. А. Регуляризация последовательностей в смысле Е.М. Дынькина // Уфимский матем. журнал. 2015. Т. 7. № 2. С. 66–72.

Публикации в других изданиях

4. Гайсин Р. А. Эквивалентные критерии квазианалитичности класса Карлемана в угле // Сборник трудов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Том I. Математика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. С.69–76.

5. Гайсин Р. А. Критерий существования регулярной миноранты, не подчиненной условию Банга // Сборник трудов VI Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Том I. Математика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. С. 48–56.

6. Гайсин Р. А. Критерии квазианалитичности классов Карлемана для слабо равномерных областей. Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посв. юбилеям выдающихся проф. Казанского университета, П. А. и А. П. Широковых. Казань: Казанский университет; изд-во Академии наук РТ, 2016. С. 135–136.

Тезисы конференций

7. Гайсин Р. А. Теорема типа Салинаса для областей специального вида. I. Тезисы докладов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. С. 189.

8. Гайсин Р. А. Теорема типа Салинаса для областей специального вида. II. Тезисы докладов Международной конференции «Нелинейные уравнения и комплексный анализ». Уфа, 2013. С. 18–19.

9. Гайсин Р. А. Эквивалентные критерии неквазианалитичности регулярных классов Карлемана на дугах Липшица. Тезисы Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки и образования». Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. С. 106–107.

10. Гайсин Р. А. Критерии существования регулярной миноранты неквазианалитичности классов Карлемана. Тезисы Международной научной конференции «Нелинейный анализ и спектральные задачи». Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. С. 44–46.

11. Гайсин Р. А. Об условии квазианалитичности класса Карлемана для

слабо равномерных областей. Тезисы докладов VI Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. С. 260.

12. Гайсин Р. А. Совпадение классов Карлемана на дугах и теорема Банга. Тезисы докладов Международной конференции памяти академика А. М. Ильина «Нелинейные уравнения и комплексный анализ». Уфа, 2014. С. 17.

13. Гайсин Р. А. Оценка промежуточных производных на квазигладкой дуге. Тезисы Международной научной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ». Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. С. 30-31.

14. Гайсин Р. А. Точные оценки верхних граней производных на кусочно-квазигладких дугах. Тезисы докладов VII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. С. 259.

15. Gaisin R. A. The Denjoy-Carleman theorem for Jordan domains / 24th St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis and a Summer School for Young Scientists. St. Petersburg: Euler International Math. Institute, 2015. P. 28.

Гайсин Рашит Ахтярович

**КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ КЛАССОВ
КАРЛЕМАНА НА КОНТИНУУМАХ
КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ**

**01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ**

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

*Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать 20.02.2019 г. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 1,15. Уч.-изд. л. 1,2.

Тираж 100 экз. Заказ 28.

*Редакционно-издательский центр
Балихирского государственного университета
450074, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди. 32.*

*Отпечатано на множительном участке
Балихирского государственного университета
450074, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди. 32.*