Савченко Андрій Васильович. Назва дисертаційної роботи: "АДАПТОВАНА T(q)-ВІРОГІДНА ОЦІНКА В НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЯХ РЕГРЕСІЇ З ПОХИБКАМИ У ЗМІННИХ"

Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Савченко Андрій Васильович

УДК 519.21

Адаптована T(q)-вірогідна оцінка

в нелінійних моделях регресії

з похибками у змінних

01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика

Дисертація

на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

 доктор фізико-математичних наук, професор

Кукуш Олександр Георгійович

Київ–2015

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

2

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ…………………………….4

ВСТУП………………………………………………………………………………..6

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ……………………………27

2 АДАПТОВАНА T(q)-ВІРОГІДНА ОЦІНКА В ЕКСПОНЕНЦІЙНІЙ СІМ’Ї

 ЩІЛЬНОСТЕЙ ТА В ЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ……………………………………..30

2.1 Загальний випадок, коли

q  0 ………………………………………………..30

2.1.1 Випадок, коли



відоме…………………………………………………….34

2.1.2 Випадок, коли



та



невідомі…………………………………………….45

2.2 Випадок

q  1

……………………………………………………………………51

2.2.1 Випадок

q 1, 

відоме.…….……………………………………………….52

2.2.2 Випадок

q 1, 

та



невідомі…….………………………………………..56

2.2.2.1 Випадок

q 1, 

та



невідомі, використовується перша оціночна

 функція для …………………………………………………………….....57

2.2.2.2 Випадок

q 1, 

та



невідомі, використовується друга оціночна

 функція для ……………………….………………………………………62

2.3 Лінійна модель………………………………………………………………….67

2.3.1 Лінійна модель з відомою дисперсією похибки відгуку…………………..68

2.3.2 Лінійна модель з невідомою дисперсією похибки відгуку………………. 71

2.4 Висновки до розділу 2………………………………………………………….74

3 ОЦІНЮВАННЯ В КОНКРЕТНИХ МОДЕЛЯХ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ…...76

3.1 Показникова модель……………………………………………………………76

3.1.1 Побудова оціночного рівняння……………………………………………...77

3.1.2 Консистентність та асимптотична нормальність оцінки…………………..80

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

3

3.1.3 Процедура урізання…………………………………………………………..94

3.2 Пуассонівська модель………………………………………………………… 95

3.2.1 Побудова оціночного рівняння…………………………………………… ..95

3.2.2 Консистентність та асимптотична нормальність оцінки…………………..98

3.3 Гамма-модель………………………………………………………………….103

3.4 Квадратична модель…………………………………………………………..106

3.4.1 Квадратична модель з відомою дисперсією похибки відгуку………….. 106

3.4.2 Квадратична модель з невідомою дисперсією похибки відгуку…………111

3.5 Висновки до розділу 3……………………………………………………… . 115

ВИСНОВКИ……………………………………………………………………….115

ДОДАТОК ………………………………………………………………………. 117

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ………………………………………. 123

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

4

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

CS оцінка – функціональна оцінка у моделі з похибками вимірювання,

отримана за допомогою виправленої оціночної функції методу максимальної

вірогідності (Corrected Score)

const  стала величина

 

! ! !

!

1 2 3

, , 1 2 3

m m m

m

C

m m m

m

мультиноміальні коефіцієнти

I  одинична матриця

  простір елементарних подій

P  ймовірнісна міра.

D дисперсія випадкових величин

Cov коваріаційна матриця випадкових векторів

E математичне сподівання випадкових величин, векторів або матриць;

E

розглядається як оператор, що діє на весь вираз до знака рівності.

Eb математичне сподівання, яке береться за умови, що

b  істинне значення

параметра моделі

E(y)  умовне математичне сподівання

y

відносно випадкової величини



T – верхній індекс з таким позначенням означає транспонування

0 – нуль-вектор в евклідовому просторі

1

( )

 



T T A A

для невиродженої квадратної матриці

A

L   P u1

  u 

2

, , ;

випадкова величина:

1  

2 Eu u – простір інтегрованих в

квадраті функцій з вагою

1 u

P– збіжність послідовності випадкових векторів чи величин за ймовірністю

P1– збіжність послідовності випадкових векторів чи величин майже напевно

d– збіжність послідовності випадкових векторів чи величин за розподілом

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

5

() 

1 C

простір неперервно-диференційованих векторних функцій, визначених

на деякій відкритій множині

U  

компактної множини



евклідового

простору

 n

 Op

(1)  послідовність

 n

: n 1

є стохастично обмеженою

n

 op

(1) послідовність

n

: n 1

така, що 0

P n

, n 

АКМ – асимптотична коваріаційна матриця

“зрештою”: для послідовності випадкових величин

Un

: n 1

послідовність

тверджень

( ) An Un

, які залежать від значень

Un

, виконується зрештою за

ймовірнісною мірою P, якщо існує випадкова подія

, 0   ( ) 1, P 0 

така що

для всіх

 0

існує випадковий номер

N  N()

, для якого при всіх

n  N

виконується

( ()) An Un

.

м.н. – майже напевно

ОМВ – оцінка максимальної вірогідності

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

6

ВСТУП

Актуальність теми. Впродовж останніх десятиліть активно досліджуються

моделі регресії з похибками у змінних. Вони застосовуються в економетриці,

задачах розпізнавання образів, при обробці біомедичної інформації .

 Розглянемо структурні моделі регресії з класичною адитивною похибкою

вимірювання, де ‒ відгук, ‒ сурогатне (тобто спотворене похибкою)

значення регресора. Л. Стефанські та Т. Накамура запропонували виправлену

(CS, Corrected Score) оціночну процедуру за невідомого розподілу прихованої

змінної. О. Кукуш та Г. Шнеєвайс довели, що при необтяжливих умовах ця

оціночна процедура дає консистентну оцінку. Але відомо, що CS оцінка не є

робастною. Ч.-Л. Ченг, Г. Шнеєвайс, М. Тамерус побудували модифікацію CS

оцінки для поліноміальної моделі з похибками вимірювання, що стійкіша при

малих і середніх обсягах вибірки і асимптотично еквівалентна CS оцінці, коли

обсяг вибірки прямує до нескінченності.

 У дисертаційній роботі використовується інша ідея модифікувати CS, а саме

вивчати виправлену T(q)-вірогідну оцінку за наявності похибок у змінних. При

q  1

даний метод оцінювання менш чутливий по відношенню до аномальних

спостережень, ніж метод максимальної вірогідності, оскільки аномальним

спостереженням відповідають малі значення

f (y, x,),

а вони входять з малим

ваговим множником

( , , )

1

f y x 

q

до складу оціночного рівняння

0.

ln ( , , )

( , , )

1

1

















i i

i i

n

i

q

f y x

f y x

Тут

  i i

y , x , 1 i  n, ‒ спостережувані незалежні пари випадкових величин,

f (y, x,) ‒це щільність відгуку

y

при заданому значенні регресора

x

та

параметра регресії

 . У випадку

q  1

всі спостереження отримують однакову

вагу.

 Вплив аномальних спостережень з великим

y

на виправлену T(q)-вірогідну

оцінку значно менший ніж аналогічний вплив на оцінку CS. Це і означатиме

робастність виправленої T(q)-вірогідної оцінки у порівнянні з оцінкою CS.

Таким чином, при

q  1

ми одержуємо робастну оцінку параметра



, проте

втрачаємо консистентність оцінки: справді, оціночна функція методу максимальної вірогідності











ln f (y, x, )

SML

є незсуненою, тобто

( , ,)  0, S y x E ML

але

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

7

для нової оціночної функції матимемо, взагалі кажучи,

0

ln ( , , )

( , , ) ( , , )

( ) 1















   

f y x

S y x f y x

q q E E

при

q  1

; тут важливо, що незсуненість оціночної функції є необхідною умовою консистентності відповідної

оцінки. Виходом з цієї ситуації є спроба зробити

q

залежним від обсягу вибірки

n : q  q(n) 1, n  ,

причому

q(n) 1, n 1.

Тоді нова оцінка буде одночасно і

робастною, і консистентною. Якщо додатково вимагати, щоб

n1 q(n)  0,

n  ,

то оцінка матиме таку ж асимптотичну ефективність, як і оцінка максимальної вірогідності, тобто обидві оцінки матимуть однакову асимптоттичну

коваріаційну матрицю.

 У роботах1, 2 Д. Ферарі та Ю. Янга, а також Н. Колева вивчались властивості

оцінки T(q)-вірогідності за відсутності похибок у змінних. Показано, що для

малих і середніх обсягів вибірки вибором q можна змінювати зсув оцінки

заради точності, що суттєво може зменшити середньо-квадратичне відхилення:

при q<1 це відхилення звужується, збільшуючи зсув і зменшуючи при цьому

роль аномальних спостережень; при q>1 більша роль надається областям, де

значення щільності близькі до нуля. Вдало підібраним q можна досягнути

балансу між збільшенням зсуву і зменшенням дисперсії оцінки, що в результаті

дає загальний виграш в точності, тобто зменшує середньо-квадратичну похибку

оцінки.

У згаданих вище роботах встановлено необхідну і достатню умову асимптотичної нормальності і ефективності оцінки, якщо q прямує до 1 та обсяг вибірки

є великим.

 У даній дисертаційній роботі досліджується консистентність та асимптотична нормальність виправленої оцінки T(q)-вірогідності за наявності класичних адитивних похибок у змінних. Розглядається широкий клас моделей, який

включає, зокрема, лінійну, квадратичну, показникову, пуассонівську, гаммамодель.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1

Ferrari D. Maximum Lq-likelihood Estimation / D. Ferrari, Y. Yang // Ann. Statist. – 2010. –

Vol. 38, № 2. – P.753 – 783.

2Kolev N. Maximum T(q)-likelihood Estimation: a New Method and its Application in Risk

Management / N. Kolev // 6th Conference in Actuarial Science & Finance, Samos, Greece, June

3 – 6, 2010: Abstracts. – Samos, 2010. – P. 22.

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

8

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна

робота виконана в рамках держбюджетних дослідницьких тем № 06БФ038-03

«Аналітичні та стохастичні методи дослідження динамічних систем» (номер

державної реєстрації 0106U005864) та № 11БФ-38-02 «Еволюційні системи:

дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних

закономірностей» (номер державної реєстрації 0111U006561) кафедри теорії

ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного

факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що

входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні

математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і завдання дослідження. Мета роботи полягає у вивченні властивостей

виправленої T(q)-вірогідної оцінки у моделях регресії з похибками у змінних.

Об’єкт дослідження ‒ моделі регресії з похибками у змінних.

Предмет дослідження ‒ виправлена T(q)-вірогідна оцінка в цих моделях.

 У роботі розглядаються такі задачі:

 Дослідження асимптотичних властивостей виправленої T(q)-вірогідної

оцінки в загальній нелінійній структурній моделі регресії з похибками у

змінних, в якій при фіксованому неспостережуваному випадковому

регресорі умовна щільність відгуку належить до експоненційної сім’ї,

причому відома дисперсія похибок вимірювання регресора у випадках

як відомого, так і невідомого параметра розсіяння, та знаходження

асимптотичної коваріаційної матриці виправленої T(q)-вірогідної оцінки

в обох випадках.

 Дослідження асимптотичних властивостей виправленої T(q)-вірогідної

оцінки у лінійній структурній моделі регресії з похибками у змінних, в

якій відома дисперсія похибок вимірювання регресора, у випадках як

відомої, так і невідомої дисперсії похибки у відгуку, знаходження

асимптотичної коваріаційної матриці виправленої T(q)-вірогідної оцінки

в обох випадках.

 Дослідження асимптотичних властивостей виправленої T(q)-вірогідної

оцінки в конкретних нелінійних моделях з похибками у змінних, а саме

в показниковій, квадратичній та пуассонівській моделях.

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

9

Методика дослідження. У дисертаційній роботі для розв’язання

сформульованих задач використовуються результати і методи теорії

ймовірностей та математичної статистики (зокрема, теорії оціночних рівнянь),

математичного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, які

визначають наукову новизну і виносяться на захист, є такі:

 Введено модифікацію оцінки T(q)-вірогідності для моделей з похибками

вимірювання.

 Наведено достатні умови для існування розв’язку оціночного рівняння,

для строгої консистентності та асимптотичної нормальності виправленої

T(q)-вірогідної оцінки, побудованої в загальній нелінійній структурній

моделі регресії з похибками у змінних за наявності експоненційної сім’ї

щільностей з відомим параметром розсіювання і нормально розподіленої

похибки вимірювання регресора з відомою дисперсією. Асимптотична

коваріаційна матриця не змінюється в порівнянні з випадком

q  1

(цей

випадок відповідає виправленій оцінці максимальної вірогідності). На

прикладі показникової моделі показано, що ці результати зберігаються і

у випадку, коли замість нескінченної суми при записі відповідної

оціночної функції розглядається урізана скінченна сума.

 Запропоновано два способи побудови і достатні умови строгої

консистентності та асимптотичної нормальності виправленої T(q)-

вірогідної оцінки, побудованої для експоненційної сім’ї щільностей з

невідомим параметром розсіювання і нормально розподіленої похибки

вимірювання регресора з відомою дисперсією.

 Знайдено явний вигляд оціночної функції, за допомогою якої можна

побудувати виправлену T(q)-вірогідну оцінку в лінійній, показниковій,

пуассонівській і квадратичній структурних моделях з похибками у

змінних, коли відома дисперсія похибок вимірювання регресора. Для

таких моделей доведено консистентність та асимптотичну нормальність

виправленої оцінки T(q)-вірогідності.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в дисертаційній

роботі результати мають теоретичне спрямування та є внеском у теорію

моделей регресії з похибками у змінних. Ці результати можуть знайти

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

10

практичне застосування у прикладних моделях економетрики та при аналізі

біомедичної інформації.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримані

здобувачем самостійно, вони опубліковані у 5 статтях в фахових журналах. Усі

роботи написані без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження

доповідалися й обговорювалися на:

 Міжнародній науковій конференції “Modern Stochastics: Theory and

Applications II” (Київ, 2010);

 Міжнародній науковій конференції молодих вчених, присвяченій 70-

річчю механіко-математичного факультету Київського національного

університету імені Тараса Шевченка (Київ, 2010);

 Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М.

Кравчука (Київ, 2012);

 Міжнародній науковій конференції “Modern Stochastics: Theory and

Applications III” (Київ, 2012);

 Третій міжуніверситетській науковій конференції молодих вчених з

математики та фізики (Київ, 2013);

 Міжнародній математичній конференції “Диференціальні рівняння,

обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи

механіки” (Київ, 2014)

 науковому семінарі “Асимптотичні методи статистики” під

керівництвом професорів Кукуша О.Г. та Майбороди Р.Є. (Київ,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механікоматематичний факультет, 2011);

 науковому семінарі “Исчисление Маллявена и его приложения” під

керівництвом професора Дороговцева А.А. (Київ, Інститут математики

НАН України, 2012);

 науковому семінару з теорії ймовірностей та математичної статистики

кафедри теорії ймовірностей, статистики, актуарної математики під

керівництвом професорів Мішури Ю.С. та Козаченка Ю.В. (Київ,

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

11

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механікоматематичний факультет, 2012, 2015).

Публікації. За результатами дисертації опубліковано 11 наукових робіт. З них

п’ять наукових статей у фахових виданнях [8, 10, 11, 12, 14] (з них 2 статті у

виданнях, що входять до наукометричних баз даних) та шість тез доповідей на

наукових конференціях [7, 9, 13, 33, 34, 35].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів,

розбитих на підрозділи, висновків, одного додатку та списку використаних

джерел, який містить 38 найменувань. Повний обсяг роботи становить 127

сторінок, з них список використаних джерел займає 5 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

 У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено

мету і завдання дослідження, висвітлено методи, наукову новизну, теоретичне

та практичне значення дослідження, особистий внесок здобувача, апробацію

отриманих результатів.

 Перший розділ містить огляд літератури за тематикою даної роботи та

спорідненими питаннями.

 Другий розділ присвячений побудові виправленої T(q)-вірогідної оцінки для

експоненційної сім’ї щільностей відгуку та для лінійній моделі. У першій

частині другого розділу розглянуто загальний випадок, коли

q  0

, у другій

частині – випадок

q  1

(тобто оцінку CS), а в третій – лінійну модель, коли

параметр розсіяння може бути відомим або невідомим.

 Поширеними є наступні нелінійні моделі регресії з класичними похибками

вимірювання:







 

 

,

( , ) ,

i i i

i i i

x

y

 

   

i 1,n, (1)

випадкова величина

i

y

називається відгуком, випадкова величина

i  ‒ регресором,

i

x ‒ сурогатною змінною; розподіл

i 

вважається невідомим. Випадкова

величина

i 

називається похибкою вимірювання. Вважаємо

,  i

,

i

 i 

незалежними,

,

i

 i 

центрованими. Дисперсія

2 D i

   ‒ відома,

 ,

причому

p   R ‒

відома параметрична множина,  : R  R ‒відома функція регресії. У

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

12

структурній моделі

 i незалежні однаково розподілені випадкові величини. У

гауссовому випадку на модель регресії накладається додаткова умова:

i

 ~ (0, )

2 N  

.

 Спостерігаються незалежні копії моделі

( , ), i i

y x i  1,n

. У випадку відомого

параметра

2  

оцінюється вектор

T

p

( ,..., )    0  1

, у випадку невідомого

параметра

2  

додається ще одне оціночне рівняння та оцінюється вектор

 

T

p

T T

s , ( ,..., , )

2

0 1

2

   

     

.

 Проте в дисертаційній роботі розглядається дещо інша нелінійна модель

регресії. Вважаємо, що за наявності експоненційної сім’ї щільностей відгук

y

при фіксованому канонічному параметрі



має умовну щільність розподілу

відносно деякої

 -скінченної міри на борелевій

 -алгебрі

B(R)

в

R

:

   



















 ( , )

( )

exp 



 

 c y

y C

f y (2)

Тут функція

C()

є відомою двічі неперервно диференційовною, заданою на

деякому відкритому проміжку

I  R, C()  0,   I

, параметр розсіяння

  0 ,

c(y,)

є відомою борелевою функцією, що не залежить від



. Припустимо, що

      0  1

r

, де функція

r(t), t  R , – відома неперервно диференційовна

функція,  – випадковий скалярний регресор з невідомим розподілом, причому

  const

майже напевно (м.н.).

 Спостерігаються незалежні копії моделі

( , ), i i

y x i  1,n . У випадку відомого

параметра



оцінюється вектор

T

( , )    0 1

; у випадку невідомого параметра



оцінюється вектор

T

s ( , , )   0 1  . Позначимо

f (y,,)  f y

, де

      0  1

r .

 Опишемо T(q)-вірогідну оцінку, тобто оцінку T(q)-вірогідності, для довільної

незалежної вибірки з невідомим параметром розподілу.

Означення 1. Нехай спостерігається вибірка незалежних однаково розподілених випадкових величин

   n

, ,..., 1 2

зі щільністю розподілу

f (x,b)

і невідомим

параметром розподілу

 ,...,  .  0 1 

T

b b bp

Оцінка T(q)-вірогідності вектора

b,

позначена як

,  n



задається рівнянням

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

13

 , ( , ) 0

1









n

i

i T q f  



,

де























ln , 1.

, 1,

1

1

( , )

1

u q

q

q

u

T q u

q

 Функція

Tq,



є перетворенням Бокса-Кокса. При

q  1

така оцінка збігається

з оцінкою максимальної вірогідності. Якщо

q 1

, тоді

T(q,u)  ln u .

T(q)-вірогідна оціночна функція для моделі регресії з експоненційною сім’єю

щільностей визначається як

( , , ) ( , ( , , ) ( , , ) ( , , ) ( , , ) ln ( , , ), ( ) 1

 



    



    



S y    T q f y f y f y f y f y

q q q



















 

і розглядаємо її при

0  q 1.

 При фіксованому

q  1

це зсунена оціночна функція, тобто

( , , ) ( , , ) ( , , ) ( ), ( )

S y b f y b f y b b

q

b

q

b

 



   







 E E

що необов’язково дорівнює

0 .

Відповідно при фіксованому

q  1

отримаємо неконсистентну оцінку, коли

n .

 При

q  1

функція

( , , )

( )

S y b

q



збігається з оціночною функцією методу

максимальної вірогідності і є незсуненою оціночною функцією, тоді отримаємо

консистентну оцінку.

 Для невипадкової послідовності

 1, q qn

n  ,

маємо











( , , ) ( , , ) ( , , )

( )

S y b f y b f y b

n qn

b

q

b C 



E  E  



 

( , , )

1

b

f f y  b



E





























 

( , , ) ( , , ) ( , , ) ( , , )

1

f y b f y b f y f y b

qn

b





  



E   0, n  ,

тобто

( , , )

( )

S y b

qn

C 

є асимптотично незсуненою оціночною функцією. Звідси за

певних умов випливає, що оцінка консистентна у випадку послідовності

 1, q qn n .

 Адаптуємо оціночну функцію

( , , )

( )

S y  

q

до похибок вимірювання за

допомогою методу виправленої оціночної функції (метод CS, Corrected Score),

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

14

побудувавши нову оціночну функцію

( , , )

( )

S y x 

q

C

таку, що для всіх

 

виконується м.н.

  ( , , ) ,  ( , , ). ( ) ( )

S y x  y  S y  

q q E C  (3)

Розглянемо рівняння деконволюції відносно

( , , )

( )

h y x 

q

C

, ( , , )

( )

z y x 

q

C

:

  ( , , ) ,  ( , , ) ,

( ) 1

     h y x y f y

q q

C

 E  (4)

  ( , , ) ,  ( , , ) ( ) .

( ) 1

    C  

z y x y f y

q q

C 



 E (5)

Тут

С()– функція з формули (2),

   

T

r    





  1;

0 1 

  





 .

Нехай кожне з рівнянь (4) і (5) має розв’язок, тоді розв’язок (3) зображується у

вигляді

 ( , , ) 

( )

S y x 

q

C

( , , ) ( , , )

( ) ( )

yh y x  z y x 

q

C

q

C  (6)

 При

q  1

отримуємо оціночну функцію

(1)

SC

методу CS:

( , ) ( , ),

( , )

( , )

(1)

2

1

 





h x h x

h x

h x



  C















( , ) ( , )

( , )

( , )

(1)

2

1

 





z x z x

z x

z x



  C















, ( , , ) ( , ) ( , )

(1)

SC

y x   yh x   z x  .

Припустимо, що параметр розсіяння



із експоненційної сім’ї щільностей (2)

відомий.

 Виправлена оцінка T(q)-вірогідності

(q)  n



визначається як випадковий

вектор, який задовольняє рівняння

 ( , , ) 0,

1

( )  



n

i

i i

q

C S y x  (7)

якщо його розв’язок існує; якщо ж не існує такого розв’язку, тоді

(q)  0.  n



 За певних технічних умов така оцінка є консистентною та асимптотично

нормальною, причому асимптотична коваріаційна матриця (АКМ) така ж, як і

при

q 1.

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

15

 Функція впливу3

оцінки CS задається виразом

( , ) ( , , )

1 (1)

IC y x  S  SC

y x b



, де

b

є

істинним значенням

 , ( , , )

(1)

y x b

S

S T

C

b





 E

. Крім того, їй відповідає умовна

функція впливу

  C C b

y IC y x y S y 



        

( , ): ( , ) , ( )

1 E .

При

q (0; 1)

функція впливу оцінки

(q)  n



дорівнює

   

( ) ( )

1 ( ) ( )

( , ) , ,

q q

C

q q

IC y x S S y x b





, де

( , , )

( )

( )

( ) q

T

q

C

b

q

y x b

S

S





 E .

Тут

(q)

b

є розв’язком рівняння

( , , ) 0

( )

S y x  

q Eb C

,  

. Умовна функція впливу

( , ):  ( , ) ,    ( , , )  ( )

1

1 ( ) ( ) ( )

q

b

q q q q

C

y IC y x y S f y y C







   

 

  E     . Нехай при всіх

 , 

справджується

lim ( , , )  0



f y  

y

і

q

достатньо близьке до 1, тоді виконується

0

( , )

( , )

lim

( )



  

 

y

y

C

q

C

y

, тобто вплив аномальних спостережень з великим

y

на оцінку

(q)  n



значно менший, ніж аналогічний вплив на оцінку CS.

Означення 2. Нижче “зрештою” означає наступне: для послідовності

випадкових величин

Un

: n 1

послідовність тверджень

( ) An Un

, які залежать

від значень

Un

, виконується зрештою за ймовірнісною мірою

P,

якщо існує

випадкова подія

, 0   ( ) 1, P 0 

така що для всіх

 0

існує випадковий

номер

N  N()

, для якого при всіх

n  N

виконується

( ()) An Un

.

 Сформулюємо теореми про властивості оцінки

(q)  n



для випадку, коли

      0  1

r , причому функція

r

і параметр розсіяння



відомі. У наступній

теоремі і далі неперервна диференційовність функцій на множині означає, що

функції визначені в деякому околі множини і неперервно диференційовні.

Теорема 1 (існування розв’язку оціночного рівняння). Нехай

 – обмежена

випадкова величина, D  0

та виконуються такі умови:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

3Хьюбер Дж.П. Робастность в статистике: пер. с англ. / Дж. П. Хьюбер – М.: Мир, 1984 –

304 с.

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

16

1) показник

q

залежить від обсягу вибірки, , q  qn

причому

0  1, qn n 1,

та

qn 1

при

n 

;

2) параметрична множина



є опуклою та компактною в

,

2 R

а істинне

значення

b

параметра



є внутрішньою точкою

 , параметр розсіяння



відомий;

3)

( , ) ( ), 1

hi

x  C  ( , ) ( )

1

zi

x  C 

м.н. та при кожному

  : Eb

yhi

(x,)   ,

E zi

(x,)  ,  







j

i

b

h x

y







( , )

E sup ,  







j

i

z x







( , )

Esup , i  1, 2, j  0, 1

;

4)

Eu1  , u1  

2 E , де

   

2

1 0 1 0 1 u  C

r(b  b )  r

(b  b )

;

r

(b0  b1)  0

м.н.;

5)

 





    q

h y x

y

q

C

q

( , , )

sup

( )

1,

~

1



 

E ,  





    q

z y x

q

C

q

( , , )

sup

( )

1,

~

1



 

E ,

 





   

T

q

C

q

h y x

y





 

( , , )

sup

( )

1,

~

1

E ,  





   

T

q

C

q

z y x





 

( , , )

sup

( )

1,

~

1

E

для фіксованого

(0,1)

~

  .

Тоді зрештою рівняння (7), (6) має розв’язок (q)  n



.

Теорема 2 (про консистентність оцінки). За умов теореми 1 та умови

r

(t)  0

при кожному

t  R , оцінка

(q)  n



є строго консистентною, тобто

 n

(q)  b



з

імовірністю 1 при

n  ,

де

b

є істинним значенням

.

Теорема 3 (про асимптотичну нормальність). Нехай виконуються умови

теореми 2, параметр розсіяння



відомий та додатково виконуються такі

умови:

1)

n(1 qn

)  0 , n 

;

2)

,

( , )

sup

2

 

 





j k

i

b

h x

y

 



E 

,

( , )

sup

2

 

 



 j k

i

z x

 





E i  1, 2, j, k  0, 1

;

3)

 ,  ,

2

E z x       

2

E h x, .

Тоді

n( (q)  b) N(0,), d

 n



n  ,

де

b

є істинним значенням

,

,

~ 1 ~ 1  V BV ,

~

2

1 1

1 1



















 



u u

u u

V

E E

E E

 ( )  ( ) ,

2

u1  C

r b0  b1  r

 b0  b1

 

T

B b SC

(y, x,b)

b SC

(y, x,b) SC

(y, x,b)

(1) (1) (1)

 Сov  E    ,

2

,

1



i j

Bij Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

Click to buy NOW!

PDF-XChange Viewer

www.docu-track.co m

17

  ( (  ))   ( (  ))  ( , ) 

2 2 Bii EC r b0 b1 C r b0 b1 Ehi

x b

2  ( ) ( , ) ( , ) ( , ), 2

 EC

r b0  b1

 Ehi

x b zi

x b Ezi

x b i 1,2,

  ( (  ))   ( (  ))  ( , ) ( , ) 

2

Bij EC r b0 b1 C r b0 b1 Ehi

x b hj

x b

 ( )  ( , ) ( , ) ( , ) ( , ) ( , ) ( , ), EC

r b0  b1

  Ehi

x b zj

x b Ehj

x b zi

x b Ezi

x b zj

x b i  j, i, j 1, 2 .

 Якщо, крім

 , потрібно ще оцінити параметр розсіяння



, то додається ще

одне оціночне рівняння, що містить



та

.

Тоді виправлена

T(q)  вірогідна

оцінка

  

T

C

T

 C  n q 



 

 ( ) ,

визначається як випадковий вектор, який задовольняє

рівняння

 0

( , , )

( , , )

1

( )

( )





















n

i C i i

i i

q

C

S y x

S y x







,   

T T

 , , (8)

якщо його розв’язок існує; якщо ж не існує такого розв’язку, тоді

 C  0



.

Тут

( , , )

( )

S y x 

q

C

задається формулою (6), а в якості функції

( , , )

( )





S y x C

вибирається або

 ( , , ) ( , ) ( , )

( ) 2

   



S y x y yu x g x C    , (9)

або

 ( , , ) 2 ( , ) ( , ) ( , )

2

( ) 2

    



S y x y yu x f x g x C     , (10)

причому функції

u(x,), g(x,) , ( , ) f

2

x 

задовольняють наступні рівняння

деконволюції:

 ( , )   ( ), E u x    C

r  0  1  ( , )   ( ) E g x    C

r  0  1 ,

 ( , )  ( ) ( ( )) 0 1

2 E f

2

x    C

r    

м.н.

 У випадку оціночної функції (9) сформулюємо відповідні теореми про

асимптотичні властивості оцінки

 C



.

ВИСНОВКИ

Дисертаційнароботаприсвяченадослідженнюоцінкивірогідностів

нелінійнихмоделяхрегресіїзпохибкамивимірюваньРозглядаються

структурнімоделівякихрегресоривипадковіпохибкавимірювання

нормальнорозподіленазвідомоюдисперсією

Урозділіпобудованаоцінкапараметріврегресіїдляекспоненційноїсім’ї

щільностейувідгукутадлялінійноїмоделіУвипадкуневідомогопараметра

розсіяннядодаєтьсящеоднеоціночнерівнянняпричомууроботірозглянуто

дваваріантивиборутакогорівнянняНаведенодостатніумовистрогої

консистентностітаасимптотичноїнормальностіоцінкивірогіднаоцінка

маєтакужасимптотичнуковаріаційнуматрицюякіоцінкапобудована

методомвиправленоїоціночноїфункціїтобтопри















Урозділівірогіднаоцінкапобудованавконкретнихмоделях

показниковійпуассонівськійквадратичнійтагаммамоделіУмовистрогої

консистентностітаасимптотичноїнормальностіоцінкизначноспрощуютьсяв

цихмоделях