

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Левин Андрей Михайлович

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПОЛИЛОГАРИФМЫ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Резюме диссертации на соискание ученой степени
доктора математических наук

Москва
2020

Введение.

Понятие эллиптической кривой было оформлено в XIX веке. Одновременно мультипликативная группа была проинтерпретирована как множество гладких точек особого слоя в семействе эллиптических кривых. Более того, многие естественные геометрические объекты на мультипликативной группе оказываются регуляризованными ограничениями некоторых объектов на эллиптических семействах. Мы применяем эту идеологию к случаю полилогарифмов.

Последние были предметом интенсивных исследований во все том же XIX веке.

Мы строим набор функций на $\mathbb{H} \times \mathbb{C} \setminus \{\tau, \mathbb{Z}\tau \oplus Z\}$ посредством взвешенного усреднения классических полилогарифмов и применением к этим расходящимся рядам процедуры ζ регуляризации. Полученные так аналитические функции мы называем эллиптическими полилогарифмами.

Мы исследуем свойства этих функций в той же степени общности что и известные свойства классических полилогарифмов

В частности, мы показываем, что эллиптические полилогарифмы, также как и классические полилогарифмы, могут быть интерпретированы как периоды некоторого ходжева пучка. Этот факт дает возможность определить соответствующий ходжев пучок используя чисто кохомологическую технику, а последнее позволяет определить полилогарифмы в более широком контексте, как, например, для других теорий кохомологий или /и размерностей торов. Более того, понятие эллиптических полилогарифмов проясняет некоторые конструкции в теории классических полилогарифмов.

Обобщения полилогарифмов оказываются весьма полезным инструментом в геометрических доказательствах некоторых известных результатов, таких как теоремы Клиберна-Зигеля о значениях дзета функции или Манина-Дринфельда о периодах рядов Эйзенштейна.

1 Эллиптические полилогарифмы.[7]

1.1 Полилогарифмы Дебая.

Полилогарифмы впервые были определены Леонардом Эйлером как (аналитические продолжения) сходящихся в единичном диске рядов

$$Li_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^n}.$$

Они изучались такими крупнейшими математиками прошлого как Абель, Лобачевский, Куммер и Рамануджан. В отличие от других высших трансцендентных функций Эйлера, полилогарифмы были практически забыты на долгое время. Лишь недавно они стали играть важную роль в различных областях математики и математической физики, например, в описании кохомологий алгебраических групп или в теории кластерных многообразий.

По техническим причинам нам удобнее оперировать с вариантом полилогарифмов, известным как полилогарифмы Дебая.

Определение 1.1 *n -ый полилогарифм Дебая $\Lambda_n(\xi)$ это многозначная аналитическая функция на $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ заданная интегралом:*

$$\Lambda_n(\xi) = \int_{\xi}^{i\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{dt}{\exp(-2\pi it) - 1}.$$

Легко проверить что:

$$\begin{aligned} a) \quad \Lambda_n(\xi) &= \sum_{k=1}^n \frac{\xi^{n-k}}{(n-k)!} (-2\pi i)^{-k} Li_k(z); \\ b) \quad Li_n(z) &= (-2\pi i)^n \sum_{k=1}^n \frac{(-\xi)^{n-k}}{(n-k)!} \Lambda_k(\xi), \end{aligned}$$

где $z = \exp(2\pi i \xi)$

Полезно ввести производящую функцию

$$\Lambda(\xi; K) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n(\xi) K^{n-1} = \int_{\xi}^{i\infty} \frac{\exp(Kt) dt}{\exp(-2\pi it) - 1}.$$

При $\Im(\xi) > 0$ выделена естественная ветвь этого объекта, для $\Im(\xi) < 0$ зафиксируем две ветви $\Lambda^{\pm}$ посредством выбора пути интегрирования пересекающим вещественную ось внутри интервала $(0, \pm 1)$.

Предложение 1.1 *Производящая функция $\Lambda(\xi; K)$ ковариантна по отношению к сдвигам и заменам знака:*

$$\Lambda(\xi + j; K) = \exp(jK) \Lambda(\xi; K), \text{ при } \Im(\xi) > 0$$

$$\Lambda^+(\xi + j; K) = \Lambda^-(-\xi; -K) + \frac{\exp(\xi K)}{K} - \frac{\exp(K)}{\exp(K) - 1}$$

Более того, прямой образ этой функции под действием умножения на натуральное число совпадает с ней самой:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-jK}{N}\right) \Lambda\left(\xi + \frac{j}{N}; K\right) = \Lambda\left(N\xi; \frac{K}{N}\right)$$

1.2 Определение и первые свойства эллиптических полилогарифмов.

Эллиптические полилогарифмы являются многозначными аналитическими функциями на проколотой эллиптической кривой. Мы реализуем эллиптическую кривую как фактор $\mathbf{C}$ по решетке $L = \mathbf{Z}\tau \oplus \mathbf{Z}$. Таким образом, эти функции описываются как функции на $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}\tau \oplus \mathbf{Z}$

Определение 1.2 Эллиптический полилогарифм (Дебая) $\Lambda_{m,n}(\xi, \tau)$ с индексами (m, n) это многозначная функция на $(\mathbf{C} \times \mathbf{H}) \setminus L$, определенная рядом

$$\begin{aligned} \Lambda_{m,n}(\xi, \tau) &= \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} j^m \Lambda_n^+(\xi + j\tau) + (-1)^{m+n+1} \sum_{j=1}^{\infty} j^m \Lambda_n^-(-\xi + j\tau) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \frac{\xi^{n-k} \tau^k}{(n-k)! k!} \frac{B_{m+k+1}}{m+k+1} + (-1)^{n+1} \frac{B_n B_{m+1}}{n!(m+1)} \right). \end{aligned}$$

Замечание 1.1 Мотивация этого определения такова. Наивное взвешенное усреднение

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \frac{j^m}{m!} \Lambda_n^+(\xi + j\tau)$$

расходится при $j \rightarrow -\infty$. Перейдем к производящим функциям. Рассмотрим ряд производящих функций

$$\underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{jX} \Lambda^+(\xi + j\tau; -Y)$$

Он сходится в области $\{0 < \Re X, \quad 0 < \Re(-Y\tau + X) < 2\pi \Im \tau\}$ и имеет полюс первого порядка при $X = 0$ и $-Y\tau + X = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &\underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y) = \\ &= \sum_{m \geq 0, n \geq 1} \Lambda_{m,n}(\xi, \tau) (-Y)^{n-1} X^m + \frac{\exp(-Y\xi)}{(-Y)(-Y\tau + X)} + \frac{1}{(\exp Y - 1)X}. \end{aligned}$$

$$\underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y) = \sum_{m \geq 0, n > 0} \Lambda_{m,n}(\xi, \tau) X^m (-Y)^{n-1}$$

Замечание 1.2 Однозначная версия эллиптического полилогарифма была введена Спенсером Блохом [B] для $m + n = 3$ и Загье [Z2][Prop.2(ii),(iii)] для произвольных m, n (см. также Теорему 4.2).

Теорема 1.1 Модифицированная производящая функция $\underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y)$ ковариантна при сдвигах на решетку $\mathbf{Z}\tau \oplus \mathbf{Z}$:

$$\underline{\Lambda}(\xi + 1, \tau; X, Y) = \exp(-Y) \left(\underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y) + \frac{1}{\exp(X) - 1} \right) \text{ if } 0 < \Im \xi < \Im \tau,$$

$$\underline{\Lambda}(\xi + \tau, \tau; X, Y) = \exp(-X) \underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y) \text{ if } 0 < \Re \xi \Im \tau - \Im \xi \Re \tau < \Im \tau.$$

Более того, прямой образ этой функции под действием умножения на натуральное число совпадает с ней самой:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(\frac{jY}{N}\right) \underline{\Lambda}\left(\xi + \frac{j}{N}, \tau; X, Y\right) = \underline{\Lambda}\left(N\xi, N\tau; X, \frac{Y}{N}\right) \text{ if } 0 < \Im \xi < \Im \tau.$$

С очевидностью $\Lambda_{0,1}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \log(\theta(\xi, \tau)/\eta(\tau))$,

$$\theta(\xi, \tau) = iq^{\frac{1}{8}}(z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}) \prod_{j=1}^{\infty} ((1 - q^j z)(1 - q^j z^{-1})(1 - q^j)), \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)$$

1.3 Ряды Эйзенштейна-Кронекера и эллиптические полилогарифмы.

Напомним классические результаты Кронекера [W] : Обозначим через L решетку порожденную 1 и τ . Любое число $\eta \in \mathbb{C}$ определяет характер χ_η решетки L

$$\chi_\eta(\xi) = \exp(2\pi i \frac{\xi \bar{\eta} - \bar{\xi} \eta}{\tau - \bar{\tau}}).$$

Тогда [W, Z1] ряд Эйзенштейна-Кронекера веса 1 задается как

$$K_1(\xi, \eta, 1) = \sum_{w \in L}^e \frac{\chi_\eta(w)}{w + \xi}$$

(где $\sum_e$ обозначает суммирование по Эйзенштейну [W]) выражается как

$$K_1(\xi, \eta, 1) = 2\pi i \exp(2\pi i \xi \frac{\eta - \bar{\eta}}{\tau - \bar{\tau}}) F(\xi, \eta, \tau), \quad (1)$$

$$F(\xi, \eta, \tau) = 1 - \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-w} - \sum_{m,n=1}^{\infty} (z^m w^n - z^{-m} w^{-n}) q^{mn}$$

$\Im \tau > 0, \Im \xi > 0, \Im \tau > \Im \xi > 0$

Кроме того

$$F(\xi, \eta, \tau) = \frac{\theta'(0, \tau) \theta(\xi + \eta, \tau)}{\theta(\xi, \tau) \theta(\eta, \tau)}. \quad (2)$$

Трансформационные свойства $F(\xi, \eta, \tau)$ весьма просты:

$$F(\xi + 1, \eta, \tau) = F(\xi, \eta, \tau); \quad (3)$$

$$F(\xi + \tau, \eta, \tau) = \exp(-2\pi i \eta) F(\xi, \eta, \tau); \quad (4)$$

$$F(\frac{\xi}{c\tau + d}, \frac{\eta}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = (c\tau + d) \exp(2\pi i \frac{c\xi\eta}{c\tau + d}) F(\xi, \eta, \tau). \quad (5)$$

$F(\xi, \eta, \tau)$ может быть представлена как экспонента производящая функция функций Эйзенштейна $E_k(\xi, \tau) = \sum_{w \in L}^e \frac{1}{(w + \xi)^k}$ и рядов Эйзенштейна

$$e_k(\tau) = \sum_{w \in L}'^e \frac{1}{(w)^k} :$$

$$F(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{\eta} \exp(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\eta)^k}{k} (E_k(\xi, \tau) - e_k(\tau))). \quad (6)$$

Это легко следует из "логарифмической формулы" Загье для $F(\xi, \eta, \tau)$ [Z1, Section 3, Theorem(viii)] степенного ряда для E_n [W, Chapter III, formula(10)].

Для неголоморфных рядов Эйзенштейна

$$e_{k,l}(\eta, \tau) = \sum'_{w \in L} e \frac{\chi_\eta(w)}{w^k \bar{w}^l}$$

модифицированная производящая функция по отношению к переменным $\eta, \bar{\eta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} K_0(\eta, \xi, 1) &= \sum_{w \in L} e \frac{\chi_\xi(w)}{|w + \eta|^2} \\ \sum_{w \in L} e \frac{\chi_\xi(w)}{|w + \eta|^2} &= \frac{1}{|\eta|^2} + \sum'_{w \in L} e \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\eta)^k (-\bar{\eta})^l \frac{\chi_\xi(w)}{w^{k+1} \bar{w}^{l+1}} \\ &= \frac{1}{|\eta|^2} + \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\eta)^k (-\bar{\eta})^l \sum'_{w \in L} e \frac{\chi_\xi(w)}{w^{k+1} \bar{w}^{l+1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 1.2

$$a) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y) = e^{-Y\xi} F(\xi, \frac{-Y\tau + X}{2\pi i}, \tau); \quad (8)$$

$$b) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y) = e^{-Y\xi} \frac{\partial}{\partial X} F(\xi, \frac{-Y\tau + X}{2\pi i}, \tau). \quad (9)$$

Теорема 1.3 Мнимая часть подкрученной производящей функции эллиптических полилогарифмов

$$\exp \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{\tau - \bar{\tau}} X + \frac{\tau \bar{\xi} - \bar{\tau} \xi}{\tau - \bar{\tau}} Y \right) \underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y)$$

равна $-\frac{\tau - \bar{\tau}}{(2\pi i)^2} K_0(\eta, \xi, 1)$

Замечание 1.3 Утверждение предыдущей теоремы означает что эллиптические аналоги полилогарифмов Блоха-Вигнера-Загье являются неголоморфными рядами Эйзенштейна.

1.4 Модулярные свойства эллиптических полилогарифмов.

Из выражения дифференциала производящей функции эллиптических полилогарифмов через функцию Кронекера F и модулярных свойств последней можно получить, что производящая функция эллиптических полилогарифмов модулярна с точностью до аддитивной константы – периода по ξ и τ степенного ряда от X и Y .

Поскольку модулярная группа сплетает действие решетки сдвигами, эти степенные ряды могут быть явно вычислены и оказываются рядами с рациональными коэффициентами. Сформулируем утверждение в точности:

Теорема 1.4 Модифицированная производящая функция $\underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y)$ ковариантна по отношению к действию модулярной группы:

$$\underline{\Lambda}\left(\frac{\xi}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}; aX+bY, cX+dY\right) = \underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y) + C_M(X, Y),$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$$

C_M является рядом Лорана от X и Y с рациональными коэффициентами,

$$C \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (X, Y) = \frac{1}{\exp(Y) - 1} \left(\frac{1}{\exp(X+Y) - 1} - \frac{1}{\exp(Y) - 1} \right),$$

$$C \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (X, Y) = - \left(\frac{1}{\exp(X) - 1} \right) \left(\frac{1}{\exp(Y) - 1} \right)$$

Более того, прямой образ этой функции под действием изогении совпадает с ней самой с точностью до прибавления ряда Лорана от переменных X and Y с рациональными коэффициентами:

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{K}} e^{\langle \kappa, (X, Y) \rangle} \underline{\Lambda}(\xi + \kappa, \tau; X, Y) = \underline{\Lambda}\left(N \frac{\xi}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{aX+bY}{N}, \frac{cX+dY}{N}\right) + C_M(X, Y),$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{Z}), N = \det M, \mathcal{K} = \mathrm{Ker}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2 \xrightarrow{M} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2,$$

for $\kappa = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ we put $\langle \kappa, (X, Y) \rangle = rY - sX$, C_M является рядом Лорана от X и Y с рациональными коэффициентами,

Вторая часть теоремы следует из первой и разложения любой изогении в композицию модулярных преобразований и умножений на натуральные числа. Точка N -кручения на универсальной эллиптической кривой является модулярной кривой уровня N и ограничение дифференциала модифицированной производящей функции $\underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y)$ эллиптических полилогарифмов совпадает с модифицированной производящей функцией рядов Эйзенштейна этого уровня. Из этого и рациональности периодов модифицированной производящей функции $\underline{\Lambda}(\xi, \tau; X, Y)$ выводится новое доказательство следующей теоремы Ю.Манина и В.Дринфельда

Теорема 1.5 Периоды рядов Эйзенштейна любого уровня и веса большего чем 2 рациональны.

1.5 Ходжева интерпретация эллиптических полилогарифмов. Абстрактно когомологический подход к эллиптическим полилогарифмам[6]

Данные $\{\mathbf{Q}X \oplus \mathbf{Q}Y \subset \mathbf{C}X \oplus \mathbf{C}Y \supset \mathbf{C}(X - \tau Y)\}$ являются структурой Ходжа на группе первых гомологий $\mathcal{H}$ эллиптической кривой. Действия генераторов $+1$ and $+\tau$ фундаментальной группы кривой заданные как умножения на $\exp(-Y)$ и $\exp(-Y)$ соответственно на кольце $\mathbf{Q}[[X, Y]]$ формальных степенных рядов от X и Y определяет фильтрованную локальную (про)систему на эллиптической кривой. Комплексификация этой локальной системы снабжается голоморфной фильтрацией Ходжа по правилу $F^{-p} = \langle (X - \tau Y)^q Y^p \exp(-\xi Y) \rangle_{\mathbf{C}}$ для любого натурального q и, тем самым, дает ходжев пучок $\mathcal{L}$ на кривой. Рассмотрим расширение $\mathcal{P}$ постоянной локальной системы $\mathcal{H}$ (с образующими X' and Y') посредством $\mathcal{L}$ над проколотой кривой задаваемое представлением

$$\begin{aligned}
 +1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\exp(-Y)X}{\exp(X)-1} & \frac{\exp(-Y)Y}{\exp(X)-1} - \frac{1-\exp(-Y)}{X} & \exp(-Y) \end{pmatrix}, \\
 +\tau &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1-\exp(-X)}{X} & \exp(-X) \end{pmatrix}, \\
 \text{so} & \\
 \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ f(X, Y) \end{pmatrix} &\xrightarrow{+1} \begin{pmatrix} X' + \frac{\exp(-Y)X}{\exp(X)-1} \\ Y' + \frac{\exp(-Y)Y}{\exp(X)-1} - \frac{1-\exp(-Y)}{X} \\ \exp(-Y)f(X, Y) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ f(X, Y) \end{pmatrix} &\xrightarrow{+\tau} \begin{pmatrix} X' \\ Y' - \frac{1-\exp(-X)}{X} \\ \exp(-Y)f(X, Y) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

определим фильтрацию F^0 on $\mathcal{P}$, порожденную $F^0(\mathcal{L})$ и $-Y'\tau + X + (-Y\tau + X)\underline{\Delta}(\xi, \tau; X, Y) - \frac{\tau}{X}$. Заметим, что второе слагаемое является формальным степенным рядом от X и Y , знаменатели вида Y и $-Y\tau + X$ сокращаются. Свойства $\underline{\Delta}(\xi, \tau; X, Y)$ влекут то, что полученная фильтрация определяет ходжеву структуру на локальной системе $\mathcal{P}$. Этот ходжев пучок является расширением постоянного пучка $\mathcal{H}$ посредством $\mathcal{L}$ над проколотой эллиптической кривой. Этот пучок также называется эллиптическим полилогарифмифмом. Это расширение может быть обобщено для любой "разумной" теории когомологий

Рассмотрим эллиптическую кривую E с нейтральным элементом $\tilde{0}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ постоянный пучок на E , чьи слои совпадают с первыми гомологиями кривой. обозначим через $\mathcal{L}$ Группоид Пуанкаре путей из нейтрального элемента $\tilde{0}$ в переменную точку. Определено отображение *аугментации* from $\mathcal{L}$ в тривиальный пучок отвечающее взятию гомологического класса пути.

Теорема 1.6 *Существует нетривиальное расширение $\mathcal{H}$ посредством $\mathcal{L}$ на проколотой кривой $E \setminus \tilde{0}$. Подобное расширение однозначно определяется расширением $\mathcal{H}$ тривиальным пучком, полученным применением отображения аугментации.*

В доказательстве используются следующие рассуждения:

1) Группы когомологий E с коэффициентами в $\mathcal{L}$ тривиальны за исключением старшей и последняя изоморфна старшей группе когомологий кривой с тривиальными коэффициентами посредством отображения аугментации.

2) Для вычисления групп когомологий проколотой кривой $E \setminus \tilde{0}$ применима последовательность Майера-Вьеториса покрытия $\{ \text{формальная окрестность } \tilde{0}, E \setminus \tilde{0} \}$.

2 Полилогарифмические формы на торах.

Понятие полилогарифмов может быть обобщено для более общей ситуации. В этой секции мы предъявим два примера.

2.1 Полилогарифмы на семействах метризованных торов[1]

. Рассмотрим d -мерный тор $T = V/H$, где H свободная абелева группа ранга d , $V = H_{\mathbb{R}} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Обозначим через $\tilde{0}$ нейтральный элемент $T = \text{образ } 0 \in V$. Фундаментальная группа $\pi_1(T, \tilde{0})$ с очевидностью равна H . Обозначим $R = \mathbb{Q}[H]$ групповую алгебру H и через $I \subset R$ идеал аугментации, положим $\tilde{R}$ - унитарное пополнение R .

Подрешетка $H' \subset H$ конечного индекса определяет изогенный тор $T' = V/H'$, $H/H' \rightarrow T' \xrightarrow{\phi} T$. Имеются канонические вложения $\mathbb{Q}[H'] \rightarrow \mathbb{Q}[H]$ и $\tilde{R}' \rightarrow \tilde{R}$.

Пополненное регулярное представление H на $\tilde{R}$ определяет локальную систему $\mathcal{L}$ на T . Имеется каноническое отображение прямого образа $\phi_* \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$.

Группы когомологий T с коэффициентами в $\mathcal{L}$ равны группам когомологий H с коэффициентами в регулярном представлении R , и потому они тривиальны за исключением старших, а эта последняя равна $\mathbb{Q}$.

Последовательность Майера-Вьеториса для покрытия $\{ \text{формальная окрестность } \tilde{0}, T \setminus \tilde{0} \}$ показывает, что $H^{<d-1}(T \setminus \tilde{0}, \mathcal{L}) = 0$ и $H^{d-1}(T \setminus \tilde{0}, \mathcal{L}) = I$.

Имеется естественное вложение $H_{\mathbb{Q}} \rightarrow I$, поэтому существует выделенный $\text{SL}(H)$ инвариантный класс в $H^{d-1}(T \setminus \tilde{0}, \text{Hom}(H, \mathcal{L}))$. Этот класс совместим с прямыми образами при изогениях T .

Этот класс может быть реализован следующим образом. Введем в рассмотрение стягиваемую область B_H положительно определенных метрик на V . Группа $\text{SL}(H)$ действует на $B \times (T \setminus \tilde{0})$ и на локальной системе $\text{Hom}(H, \mathcal{L})$, поднятой со второго сомножителя. Рассматриваемый класс когомологий

представляется замкнутой $\text{Hom}(H, \mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ -значной дифференциальной $(d-1)$ формой P на факторе $(B \times (T \setminus \tilde{0}))/\text{SL}(H)$ в смысле орбиобразия.

Эта форма представляется суммой двух слагаемых. Второе слагаемое имеет достаточно элементарный вид. Первое есть умножение на $\mathcal{L}$ -значную $(d-1)$ -форму g . Форма g является функцией Грина дифференциала $d : d(g) = \delta_{\tilde{0}} - \text{vol}$, где vol обозначает форму объема на торе. Поэтому g легко строится как ряд Фурье по $H \setminus 0$.

Эта форма ковариантна по отношению к прямому образу при изогениях тора.

По построению класс этой формы рационален, стало быть ее периоды рациональны.

2.2 Рациональность дзета значений для вполне вещественных полей.[1]

Мы применим конструкцию предыдущей подсекции к подрешеткам кольца целых алгебраических чисел вполне вещественного поля, точнее к идеалам максимального порядка.

Пусть $\mathcal{O}$ – максимальный вполне вещественный порядок ранга d . Тогда $\mathcal{O} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\oplus d}$ является координатным векторным пространством. Рассмотрим область B_{diag} положительно определенных диагональных метрик объема 1 на $\mathcal{O} \otimes \mathbb{R}$. Группа единиц $\mathcal{O}^*$ действует на B_{diag} ; и фактор $B_{\text{diag}}/\mathcal{O}^*$ является тором размерности $d-1$. Группа $\mathcal{O}^*$ вложена в $\text{SL}(\mathcal{O})$. Стал быть $B_{\text{diag}}/\mathcal{O}^*$ может быть интерпретировано как $d-1$ цикл Z_{diag} в $B_{\mathcal{O}}/\text{SL}(\mathcal{O})$.

Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в $\mathcal{O}$. Он и будет рассматриваемой решеткой. Полиномиальная функция (Norm^k) на $\mathfrak{a}$ задает отображение $\tilde{R} \rightarrow \mathbb{Q}$, обозначим через $\tilde{N}^{(k)} : \text{Hom}(H, \mathcal{L}) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ отображение индуцированное $\mathfrak{a}$ значной функцией $\text{Norm}^k \text{Id}_{\mathfrak{a}}$ на $\mathfrak{a}$. Тем самым имеются формы $\tilde{z}_k = \text{tr}(\tilde{N}^{(k)}(P))$ на $(B \times (T \setminus \tilde{0}))/\text{SL}(H)$. При $k > 0$ эти формы гладко продолжаются в нулевое сечение $\tilde{0}$. Обозначим через z_k ограничение этих форм $\tilde{z}_k$ на нулевое сечение $\tilde{0}$.

Теорема 2.1 *Интеграл $(d-1)$ формы z_k по $(d-1)$ циклу Z_{diag} рационально пропорционален значению частичной ζ -функции класса идеалов идеала $\mathfrak{s}$ в точке $1-k$.*

В сочетании с рациональностью класса P мы получаем

Теорема 2.2 *(Klinberger-Siegel) Для вполне вещественного поля значения частичной ζ -функции класса идеалов в отрицательных целых рационально.*

По нецелому алгебраическому числу $\alpha \in \mathcal{O} \otimes \mathbb{Q} \setminus \mathcal{O}$ можно определить $d-1$ цикл $Z_{\alpha, \text{diag}}$ in $(B \times (T \setminus \tilde{0}))/\text{SL}(H)$ как образ $(B_{\text{diag}}, \alpha)$ Интеграл z_k по $Z_{\alpha, \text{diag}}$ связан со значением дзета функции класса лучей.

Введение разумной целочисленной структуры на локальных системах выше позволяет получить условия сравнения для значений дзета функций.

2.3 Полилогарифмы на абелевых многообразиях.[4]

Понятие полилогарифма на абелевых многообразиях или, более общо, на смешанных многообразиях Шимуров было введено Вильдесхаусом (Joerg Wildeshaus). Мы предъявим соответствующие дифференциальные формы.

Абелево многообразие над $\mathbb{C}$ может быть описано следующим образом. Пусть H свободная абелева группа четного ранга $d = 2n$. Разложим $H_{\mathbb{C}}$ в прямую сумму $H_{\mathbb{C}} = H^{(0,-1)} \oplus H^{(-1,0)}$ так что $\overline{H^{(0,-1)}} = H^{(-1,0)}$. Тогда $A_H = H_{\mathbb{C}}/(H + H^{0,-1})$ будет тором с комплексной структурой. Таким образом, как C^{∞} многообразие A может быть описано способом из предыдущей подсекции с $V = H^{(-1,0)}$. мы будем использовать обозначения из этой подсекции.

Мы построим дифференциальную форму P_{Hodge} на семействе абелевых многообразий совместимых с разложением Ходжа:

$$(P'_{\text{Hodge}}, P''_{\text{Hodge}}) \in \text{Hom}(H^{0,-1}, \mathcal{L}) \otimes \mathcal{A}^{d,d-1} \oplus \text{Hom}(H^{-1,0}, \mathcal{L}) \otimes \mathcal{A}^{d-1,d},$$

таких, что $\overline{P'_{\text{Hodge}}} = P''_{\text{Hodge}}$ и $\text{Hodge}' - P''_{\text{Hodge}} = dG$ для некоторой $(d-1, d-1)$ формы G .

Эта конструкция позволяет построить набор примеров зигелевых форм с рациональными периодами.

3 Эллиптические 1-2-3-логарифмы.

3.1 Группа абстрактных 1-логарифмов.[5]

Определение абстрактных 1-логарифмов основано на конструкции Делиня спаривания обратимых пучков на кривой. По конструкции 1-логарифмы порождают абелеву группу, являющуюся расширением симметрического квадрата группы точек на кривой посредством мультипликативной группы поля.

Определение 3.1 Спариванием Делиня $[L_1, L_2]$ обратимых пучков L_1 и L_2 на кривой X над полем k называется k^* -торсор, заданный следующим образом: рациональные сечения s_i пучков L_i с не пересекающимися дивизорами определяют элемент $\langle s_1, s_2 \rangle \in [L_1, L_2]$ и для любой рациональной функции f $\langle f s_1, s_2 \rangle = f(\langle s_1 \rangle) \langle s_1, s_2 \rangle$, и аналогично для второго аргумента.

Теорема 3.1 Спаривание $[L_1, L_2]$ билинейно и симметрично.

Для общих сечений s_i of L_i можно определить элемент $\langle s_1, s_2 \rangle$ торсора $[L_1, L_2]$ подкрученного на подходящую степень проколотого касательного пространства в точке пересечения носителей дивизоров (s_i) этих s_i . Для эллиптической кривой касательные пространства в различных точках канонически изоморфны посредством сдвига, так как эллиптическая кривая является абелевой группой as elliptic curve is abelian group.

для точки a эллиптической кривой X обозначим через L_a обратимый пучок $\mathcal{O}(a - \bar{0})$ где $\bar{0}$ обозначает нейтральный элемент эллиптической кривой, s_a - каноническое мероморфное сечение этого пучка.

"Квадрат" $< s_a, s_a >$ этого канонического сечения s_a принадлежит $[L_a, L_a] \otimes T_0^2$, T_0 обозначает проколотое касательное пространство в нейтральном элементе. Двенадцатая степень T_0^{12} тора T_0 тривиализуется дискриминантом Δ .

Наивно абстрактный 1-логарифм это логарифм абстрактной тэта-функции, что означает не более чем замену операции с "умножения" на "сложение".

Определение 3.2 Абстрактный 1-логарифм $Li_1^{el}(a)$ от a определен как противоположный к половине логарифма нормализованного корня из $< s_a, s_a >$:

$$\exp(Li_1^{el}(a)) = \Delta^{\frac{1}{12}} < s_a, s_a >^{-\frac{1}{2}} \in [L_a, L_a]^{-\otimes \frac{1}{2}}$$

По билинейности спаривания Ву $[L_1, L_2]$ произведение $\otimes [L_a, L_a]^{\otimes n_a}$ является тривиальным торсом, если $\sum n_a a^2 = 0$. Таким образом, для группы A k -точек X имеется отображение из ядра отображения $\mathbb{Q}[A] \rightarrow \text{Sym}^2 A \otimes \mathbb{Q}$ в k^* .

Предложение 3.1 Для любой конечнопорожденной абелевой группы A ядро отображения $\mathbb{Q}[A] \rightarrow \text{Sym}^2 A \otimes \mathbb{Q}$ из групповой алгебры в симметрический квадрат $[a] \rightarrow a^2$ порождено элементами вида $[a+b] + [a-b] - 2[a] - 2[b]$

Предложение 3.2 Для точек a и b эллиптической кривой $[a+b] + [a-b] - 2[a] - 2[b] \in \mathbb{Q}[A]$ отображается в $\wp(a) - \wp(b) \in k^*$.

Обозначим ядро последнего отображения через $\mathcal{R}_1$

Определение 3.3 Группой абстрактных 1-логарифмов называется фактор $\Theta_1(X) = \mathbb{Q}[A]/\mathcal{R}_1$.

3.2 Эллиптический дилогарифм и значения L-функций эллиптической кривой.[5]

Напомним что для поля F вторая K -группа определяется как $K_2(F) = \bigwedge^2 F^*/(a \wedge (1-a))$, Для локального поля F с полем вычетов k ручным символом называется отображение $\tau : K_2(F) \rightarrow k^*$, $\tau(f \wedge g) = (-1)^{\text{ord}(f)\text{ord}(g)} g^{\text{ord}(f)} / f^{\text{ord}(g)}$; Для кривой X ее K -группа состоит из элементов второй K -группы поля функций с тривиальными ручными символами во всех точках кривой.

Для компактной комплексной кривой X поставим в соответствие $f \wedge g$ ее выражение $\beta(f \wedge g) = \log |g|(\partial - \bar{\partial}) \log |f| - \log |f|(\partial - \bar{\partial}) \log |g|$. Это гладкая форма на дополнении к носителю дивизоров функций и поток на компактной кривой, так как особенности в окрестностях особых точек интегрируемы. Образ $a \wedge (1-a)$ точен, он является дифференциалом дилогарифма Блоха-Вигнера. Дифференциал потока $\beta(f \wedge g)$ согласован с ручным символом: $d\beta(f \wedge g) = \sum_{p \in X} 2\pi i \log |\tau_p(f \wedge g)| \delta_p$. поэтому β отображает K_2 кривой в

замкнутые потоки. Класс когомологий этого потока называется регулятором Блоха. Обычно он распознается интегрированием его произведения с голоморфной формой.

В своей краеугольной работе С.Блох исследовал регулятор на эллиптической кривой. Он разложил эллиптическую функцию в произведение тэта-функций и применил к логарифму модуля тэта-функции классическую предельную формулу Кронекера. В результате интеграл выражается как линейная комбинация значений не голоморфных рядов Эйзенштейна (интерпретируемые как однозначные эллиптические дилогарифмы) в разностях точек дивизоров функций.

Известно, что для эллиптической кривой E над $\mathbb{Q}$ Это значение с точностью до рационального множителя равно значению L -функции этой эллиптической кривой в $s = 2$

В духе идеологии гипотез Загие было бы естественно описать условия на аргументы эллиптических дилогарифмов.

Теорема 3.2 *Для любой эллиптической кривой E над $\mathbb{Q}$ значение $L(E, 2)$ ее L -функции в 2 с точностью до π рационального множителя равно значению однозначного эллиптического дилогарифма в дивизоре $P = \sum n_i P_i$ таком, что $\sum n_i P_i^3 = 0$. Более того, Этот дивизор удовлетворяет дополнительным кубическим соотношениям, включающим локальные высоты, кроме того, выполняются условия целостности для простых чисел в которых кривая имеет расщепляющуюся мультипликативную редукцию.*

Доказательство основано на понятии абстрактного 1-логарифма, введенного в предыдущей подсекции. Разложим логарифм эллиптической функции в алгебраическую комбинацию эллиптических 1-логарифмов. В результате ручной символ пары функций выражается как набор алгебраических комбинаций значений 1-логарифмов сконцентрированных в точках кривой. после факторизации по руным символам с постоянными функциями получаем комбинацию элементов $\Theta_1(X) \otimes \text{Jac}(X)$ вида $[a - b] \otimes (a - b)$, где a и b означают точки дивизоров функций. Таким образом, зануление ручного символа оказывается кубическим соотношением.

3.3 Эллиптический трилогарифм в СМ-точке и классический дилогарифм в алгебраических числах.[3]

Эта подсекция, как и предыдущая лежит в русле подхода Загие к значениям L -функций. Мы будем обсуждать значения ζ -функции Дедекинда гильбертовых полей классов мнимо-квадратичных полей. Кронекер показал что эти поля порождаются сингулярными значениями модулярного инварианта, а группа единиц порождена отношениями сингулярных значений дискриминанта. Это связано с явным выражением регулятора Дирихле, то есть асимптотики ζ -функции Дедекинда в 1, через логарифмы единиц. Значения ζ -функции Дедекинда в 2 непосредственно выражается через значения некоторых не голоморфных рядов Эйзенштейна, отвечающих эллиптическому трилогарифму. Согласно (доказанной для $s = 2$) гипотезе Загье, эти

значения выражаются через значения дилогарифма Блоха-Вигнера в алгебраических числах. В связи с этим, естественно ожидать, что значения эллиптического трилогарифма в СМ-точке равно алгебраической комбинации значений дилогарифма Блоха-Вигнера в конкретных алгебраических числах. Мы докажем следующий точный результат:

Теорема 3.3 *Значение "средней" компоненты однозначного эллиптического трилогарифма в СМ-точке точно до элементарного мультипликативного множителя равно алгебраической комбинации значений дилогарифма Блоха-Вигнера от отношений значений функций Вейерштрасса в точках кручения.*

Доказательство инспирировано явными формулами Гончарова для регулятора Блоха-Белинсона на символической части K -теории. Как следствие этих формул, Гончаров предъявил интегральное представление дилогарифма Блоха-Вигнера. Областью интегрирования здесь является проективная прямая, а интегрантом результат применения регуляторной формулы к однозначным 1-логарифмам.

Основным трюком доказательства является аналогичное интегральное представление эллиптического трилогарифма интегралом по квадрату эллиптической кривой от применения регуляторной формулы к эллиптическим 1-логарифмам. Кроме того, мы вводим в рассмотрение дополнительную функцию – эллиптический $(1, 1)$ -логарифм как аналогичный интеграл по эллиптической кривой.

Эллиптический $(1, 1)$ -логарифм связан с дилогарифмом Блоха-Вигнера посредством двойного накрытия эллиптической кривой проективной прямой. С другой стороны, СМ-кривая вкладывается в свой квадрат как график комплексного умножения и интеграл по кривой реализуется как интеграл по квадрату.

4 Дифференциальные формы на степенях эллиптической кривой.[2]

В этой секции мы обсуждаем результаты, не столь близкие в основной теме диссертации, основным техническим средством является дифференциал производящей функции эллиптических полилогарифмов.

4.1 Группы когомологий конфигурационных пространств.

Фиксируем целое число N . Обозначим через $\mathcal{X}$ N -ую степень кривой X^N .

Для $n < N$ рассмотрим n различных точек $\tilde{\mathbf{z}} = \{\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n\}$ на X принадлежащих из точек $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_n\}$ на $\mathbb{C}$.

Определение 4.1 Дискриминантный набор $\tilde{C}_{\mathbf{z}}$ это набор дивизоров H_{jk} – jk диагонали и H_{ja} вида $X^{j-1} \times \tilde{z}_j \times X^{N-j}$

дополнение к этому набору это конфигурационное пространство $\tilde{M}_{\tilde{\mathbf{z}}}$ N точек на $X \setminus \bigcap \tilde{z}_a$.

Фундаментальная группа $\mathcal{X}$ равна $\bigoplus_{j=1}^N (\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z})$ как прямая сумма фундаментальных групп $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ эллиптических кривых X .

Стало быть, данные $\mathbf{w} = \{w_i\}$ N комплексных чисел определяют одномерную локальную систему $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ задаваемую представлением $\rho : \{(l_j\tau + m_j)\} \rightarrow \exp(2\pi i \sum l_j w_j)$

Определение 4.2 Набор $\mathbf{w} = \{w_i\}$ называется дискриминантально удобным если для любого подмножества $I \subset \{1, \dots, N\}$ сумма $\sum_{j \in I} w_j$ не принадлежит решетке $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$.

Теорема 4.1 Для дискриминантально удобного набора $\mathbf{w} = \{w_i\}$ группы когомологий $H^j(\tilde{M}_{\tilde{\mathbf{z}}}, \mathcal{L}_{\mathbf{w}})$ зануляются $0 \leq j < N$ и совпадают с группой $H^N(M_{\mathbf{z}}, \mathbb{C})$ для аффинного набора $M_{\mathbf{z}}$ для $j = N$.

Доказательство основано на рассмотрении спектральной последовательности дополнения к дивизору. Ее вырождение во втором члене следует из явной конструкции требуемых дифференциальных форм с логарифмическими особенностями. Эти формы определяются как произведения функций

$K_1(*, *, 1)$ из подсекции 1.3 первым аргументом этих функций являются либо уравнения диагоналей либо уравнения задающие точки $t z_j$, вторым аргументом – частичные суммы w_j .

4.2 Эллиптические наборы.

Как и в предыдущей подсекции мы обозначаем через $\mathcal{X}$ нулю степень X^N кривой X . для $k < N$ целочисленная $N \times k$ -матрица Q ранга k определяет сюръективное отображение $\mathcal{X} = \mathcal{X}^N$ onto X^k .

Определение 4.3 Эллиптическая $N-k$ -плоскость определяется как прообраз некой точки X^k ; стало быть, эллиптическая гиперплоскость H_α задается примитивной целочисленной строкой длины N и точкой X .

Набор l гиперплоскостей задатся $(N+1) \times l$ матрицей, строки этой матрицы отвечают уравнениям гиперплоскостей.

Определение 4.4 Гиперплоскости пересекаются трансверсально если ранг вышеприведенной матрицы равен l .

Данные $\mathbf{w} = \{w_i\}$ определяет локальную систему $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ как в предыдущей подсекции.

Определение 4.5 Данные $\mathbf{w}$ удобны для трансверсального набора $A\mathbf{t} = \mathbf{p}$ of N если для некоторого целочисленного решения $\mathbf{l} = \{l_1 \dots l_N\}$ уравнения $\mathbf{l}A = 0$ сумма $\sum l_j w_j$ не лежит в решетке $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$.

Определение 4.6 *Данные удобны для произвольного набора, если они удобны для всех удобны для всех трансверсальных поднаборов*

Для удобных данных имеется комбинаторное описание когомологий дополнения набора с коэффициентами в локальной системе [?, Theorem 5.1].

Теорема 4.2 *Для удобных данных $\mathbf{w}$ когомологии дополнения к набору за-нуляются во всемерностях, кроме старшей, старшая группа равна прямой сумме локальных алгебр Орлика-Соломона для каждого пересечения нулевой размерности. Более того, представляющие эти классы формы могут быть явно описаны аналогично случаю дискриминантального набора*

5 Список публикаций

На защиту выносятся перечисленные ниже 7 статей.

1. Beilinson Alexander; Kings Guido; Levin Andrey Topological polylogarithms and p-adic interpolation of L-values of totally real fields. Math. Ann. 371 (2018), no. 3-4, 1449–1495.
2. Levin Andrey; Varchenko Alexander Cohomology of the complement to an elliptic arrangement. Configuration spaces, 373–388, CRM Series, 14, Ed. Norm., Pisa, 2012.
3. Levin Andrey Kronecker double series and the dilogarithm. Number theory and algebraic geometry, 177–201, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 303, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
4. Levin Andrey Polylogarithmic currents on abelian varieties. Regulators in analysis, geometry and number theory, 207–229, Progr. Math., 171, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.
5. Goncharov, A. B.; Levin, A. M. Zagier’s conjecture on $L(E, 2)$. Invent. Math. 132 (1998), no. 2, 393–432.
6. Levin Andrey Elliptic polylogarithms: an analytic theory. Compositio Math. 106 (1997), no. 3, 267–282.
7. Beilinson A.; Levin A. The elliptic polylogarithm. Motives (Seattle, WA, 1991), 123–190, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence

6 Основные результаты.

Сформулируем основные конструкции и утверждения данной диссертации.

Я ввожу в рассмотрение новый набор функций – эллиптические полилогарифмы, которые одновременно обобщают как классические эйлеровы полилогарифмы, так и модулярные формы.

Конструкция основана на процедуре дзета-регуляризации полиномиально расходящихся рядов.

Я установил связи между этими новыми объектами и хорошо известными ранее рядами Эйзенштейна, точнее, ряды Эйзенштейна являются производными эллиптических полилогарифмов.

Опираясь на описанную выше связь, мы исследуем модулярные свойства эллиптических полилогарифмов

Я реализовал перечисленные выше аналитические свойства как условия на периоды расширений ходжевых пучков.

Мы определили подобные расширения для широкого класса теорий когомологий.

Предложено чисто алгебраическое определение 1-логарифма в терминах спаривания Делиня обратимых пучков на кривой.

Описаны условия на аргументы эллиптического дилогарифма для выражения значения L -функции в 2.

Представлен набор чисел из поля классов лучей мнимоквадратичного поля, таких что через значения дилогарифма Блоха-Вигнера в них выражается значение частичной дзета-функции класса идеалов гильбертова поля классов

Вычислена старшая группа когомологий дополнения до эллиптического набора для общей системы коэффициентов.

Список литературы

- [B] Spencer Bloch, “Higher regulators, algebraic K -theory and zeta-functions of elliptic curves”, *Lecture Notes*, U.C.Irvine, 1977
[AMS, Providence, RI]
- [T] John Tate, Appendix to the book S.Lang *Elliptic functions*, Addison-Wesley Publishing Co.,Inc.,Reading,Mass.–London–Amsterdam, 1973.
- [W] Andre Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, [Springer–Verlag, Berlin–New York 1976].
- [Z1] Don Zagier, “Periods of modular forms and Jacobi theta functions”, *Invent. Math.*, vol. 104(1991), pp. 449–465.
- [Z2] Don Zagier, “The Bloch-Wigner-Ramakrishnan polylogarithm function” *Math. Ann.*, vol. 286(1990), no. 1–3, pp. 613–624.