

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный Исследовательский Университет
«Высшая Школа Экономики»

Факультет математики

на правах рукописи

Константин Валерьевич Логинов

Расслоения на поверхности дель Пеццо

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор Ю. Г. Прохоров

Москва – 2020

Введение

Основными объектами изучения в алгебраической геометрии являются алгебраические многообразия. Их можно классифицировать либо с точностью до бирегулярной эквивалентности (т.е. с точностью до изоморфизма), либо с точностью до более слабого отношения эквивалентности, называемого бирациональным изоморфизмом. В последнем случае необходимо изучить бирациональные свойства многообразий. Это задача бирациональной геометрии.

Хорошо известно, что в размерности один бирациональная эквивалентность совпадает с бирегулярной, поэтому этот случай не очень интересен с точки зрения бирациональной геометрии. С другой стороны, бирациональная геометрия поверхностей является очень богатой теорией. Изначально она была развита представителями итальянской школы алгебраической геометрии: Фано, Энриквесом, Кастельнуово и другими.

В высших размерностях одним из главных методов бирациональной геометрии является программа минимальных моделей (ПММ, см. [Ma02], [KMM87])). Она возникла в работах Шигефуми Мори [Mo82], [Mo88] и сейчас является областью активных исследований [BCHM09], [B10], [HM05]. Минимальная категория, в которой работает ПММ — это категория $\mathcal{C}$ проективных многообразий с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями. Результатом применения ПММ к проективному многообразию является либо минимальная модель, то есть многообразие $X \in \mathcal{C}$ с численно эффективным каноническим классом K_X , либо расслоение Мори, то есть многообразие $X \in \mathcal{C}$, допускающее стягивание $\pi: X \rightarrow B$ со слоями положительной размерности, относительно обильным антиканоническим классом $-K_X$ и такое, что относительное число Пикара $\rho(X/B)$ равняется единице.

В этой работе мы сосредоточимся на трехмерном случае. Тогда база B расслоения Мори $\pi: X \rightarrow B$ может иметь размерность 0, 1 или 2. Если $\dim B = 0$, то X является (быть может, особым) многообразием Фано. Известно, что многообразия Фано с ограниченными особенностями в каждой размерности образуют ограниченные, то есть лежат в конечном числе алгебраических семейств, см. [B16]. Тем не менее их классификация известна лишь в гладком случае и в размерностях не выше трех, см. [Is77], [Is78], [MM83] и [IP99]. В особом случае для трехмерных многообразий Фано имеются частичные классификационные результаты, см., например, [Pr16a]. Также имеется база данных [GRDB] возможных значений численных инвариантов многообразий Фано с терминальными особенностями. См. также [BKR12].

Если $\dim B = 2$, то общий слой π является гладкой рациональной кривой. В этом случае, $\pi: X \rightarrow B$ называется $\mathbb{Q}$ -расслоением на коники, см. [MP08-2]. Для такого расслоения можно построить стандартную модель, то есть такое $\mathbb{Q}$ -расслоение на коники $\pi': X' \rightarrow B'$, что X' и B' являются гладкими, X' бирационально X , B' бирационально B и $\rho(X'/B') = 1$ (см. [Sa82]).

Наконец, если $\dim B = 1$, то общий слой π является гладкой поверхностью дель Пеццо.

В этом случае $\pi: X \longrightarrow B$ называется $\mathbb{Q}$ -расслоением на поверхности дель Пеццо. Основным инвариант такого расслоения — степень общего слоя $K_{X_\eta}^2$. Так как общий слой гладок, то $1 \leq K_{X_\eta}^2 \leq 9$. Иногда мы будем называть π расслоением на поверхности дель Пеццо даже в том случае, когда X не является горенштейновым.

Наши исследования имеют несколько направлений.

1 Стандартные модели

Мы решаем задачу о существовании «хорошей» модели для расслоений на поверхности дель Пеццо над кривой. Более точно, мы ищем расслоение, бирационально изоморфное над базой данному и имеющее ограниченные особенности (например, горенштейновы). В литературе такие модели называются стандартными. Вопрос об их существовании рассматривался в работе А. Corti [Co96], см. также [Ko97]. Более точно, Корти построил модель с терминальными горенштейновыми особенностями в случае степени общего слоя $K_{X_\eta}^2 \geq 3$, а также терминальную 2-горенштейнову модель в случае $K_{X_\eta}^2 = 2$. См. также [Kr18] для анализа бирациональной жесткости расслоений на поверхности дель Пеццо.

Для приложений к классификации конечных подгрупп группы Кремоны (см., например, [PrSh16]), а также к классификации многообразий над алгебраически незамкнутыми полями необходимо работать в другой категории. Мы будем рассматривать многообразия, определенные над произвольным полем характеристики 0, допускающие действие конечной группы G . В этом случае мы можем применить G -эквивариантную программу минимальных моделей (G -ПММ, см. [KM-1998, 2.18, 2.19], [Mo88, 0.3.14]). Результатом применения этой программы является либо G -минимальная модель, либо G -расслоение Мори. Для трехмерного G -расслоения Мори $\pi: X \longrightarrow B$, так же как и в «классической» ситуации, имеются 3 возможности:

- Многообразие $G\mathbb{Q}$ -Фано. В целом этот класс изучен недостаточно. Частичные результаты см. в работах [Pr15], [Pr16], [Pr16a], [PrSh16].
- $G\mathbb{Q}$ -расслоения на коники. В этом случае существовании стандартной модели следует из работы [Av14].
- $G\mathbb{Q}$ -расслоение на поверхности дель Пеццо. Мы строим стандартную модель таких расслоений для степени общего слоя, равной единице.

Следующие теоремы являются основными результатами в этом разделе:

Теорема А. Пусть X — проективное трехмерное G -многообразие и пусть C — G -кривая. Пусть $\pi: X \longrightarrow C$ — собственный G -морфизм, общим слоем которого является поверхность

дель Пеццо X_η степени 1, и пусть $\text{Pic}^G(X/C)$ порожден $-K_X$ и G -компонентами слоев морфизма π . Тогда существует горенштейнова модель, то есть

(i) коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & Y \\ \downarrow \pi & & \downarrow \sigma \\ C & \dashrightarrow & C' \end{array}$$

где χ — бирациональное G -эквивариантное отображение, а σ — обобщенное G -расслоение на поверхности дель Пеццо

(ii) Y имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные канонические горенштейновы особенности,

(iii) C' гладкая и проективная,

(iv) χ индуцирует изоморфизм между X_η и $Y_{\eta'}$, где $Y_{\eta'}$ — общий слой σ ,

(v) каждый слой σ приведен и неприводим.

Следствие В. Пусть $\pi : X \rightarrow C$ является $G\mathbb{Q}$ -расслоением на поверхности дель Пеццо степени 1. Тогда оно имеет модель с $\mathbb{Q}$ -факториальными каноническими горенштейновыми особенностями, приведенными и неприводимыми слоями и тем же общим слоем, что и π .

Теорема С. Пусть $\sigma : Y \rightarrow C$ является обобщенным G -расслоением на поверхности дель Пеццо степени 1, и пусть Y имеет только канонические горенштейновы особенности. Тогда Y допускает вложение над C в относительно взвешенное проективное пространство

$$Y \hookrightarrow \mathbb{P}_C(1, 1, 2, 3).$$

На каждом слое это вложение совпадает с «антиканоническим» вложением поверхности дель Пеццо степени 1 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$.

Теоремы А, В and С позволяют изучать особые слои в построенных моделях, являющиеся горенштейновыми поверхностями дель Пеццо.

Мы доказываем эти результаты следующим образом. Сначала мы изучаем свойства жесткости поверхностей и расслоений на поверхности дель Пеццо степени 1. Затем, начиная с расслоения на поверхности дель Пеццо степени 1 как в теореме А, мы показываем, что X является G -бirationальным над C некоторому $G\mathbb{Q}$ -расслоению на поверхности дель Пеццо степени 1. Далее мы строим каноническую модель X , то есть расслоение $\bar{\pi} : \bar{X} \rightarrow C$, G -бirationальное X над C и такое, что пара $(\bar{X}, | -K_{\bar{X}} + \bar{\pi}^* \bar{D}|)$ канонична для некоторого $\bar{D}$. После этого

мы строим горенштейнову модель, доказывая тем самым теорему А. Мы вспоминаем некоторые факты об антиканонической алгебре поверхности дель Пеццо степени 1. Наконец, мы вкладываем горенштейново G -расслоение Y в $\mathbb{P}_C(1, 1, 2, 3)$, доказывая тем самым теорему С.

2 Нерациональные слои

Следующее направление нашего исследования — изучение особых слоев расслоений на поверхности дель Пеццо (и более общим образом, расслоений Мори). Мы работаем над полем комплексных чисел. Вопрос локален по базе расслоения, поэтому в качестве базы мы рассматриваем росток гладкой кривой. Слой над выделенной точкой базы мы называем специальным. Будем говорить, что специальный слой является вырождением общего слоя, который мы предполагаем гладким. Вырождениям поверхностей дель Пеццо посвящено много работ, см., например, [HW81], [F95]. В этом разделе мы рассматриваем нерациональные вырождения. Начнем с формулировки более общей проблемы рациональности для слоев трехмерных расслоений Мори.

Проблема рациональности для (особых) трехмерных многообразий Фано далека от полного решения. Однако многое известно в гладком случае, см. [IP99, Chapter 12]. Если морфизм π является $\mathbb{Q}$ -расслоением на коники, то его слои являются деревьями рациональных кривых, поэтому вопрос рациональности слоев в этом случае тривиален.

Мы рассматриваем случай расслоений на поверхности дель Пеццо. Как отмечалось выше, «классическая» программа минимальных моделей работает в терминальной категории. В трехмерном случае из этого следует, что особенности тотального пространства изолированы. Поэтому общий слой является гладкой поверхностью дель Пеццо. В частности, общий слой рационален. Но специальный слой может быть бирационально расслоен над кривой C рода $g(C) > 0$.

Простейшим примером такого вырождения является конус над плоской эллиптической кривой в трехмерном проективном пространстве. Легко показать, что гладкая кубика дель Пеццо может вырождаться в такой конус в семействе, имеющем гладкое тотальное пространство. Мы изучаем, при каких условиях поверхность дель Пеццо может вырождаться в нерациональную поверхность в «достаточно хорошем» семействе. Под этим мы подразумеваем расслоения на поверхности дель Пеццо, возникающие в программе минимальных моделей.

Мы показываем, что геометрия нерационального специального слоя (например, значение рода $g(C)$, введенного выше) зависит от степени общего слоя $K_{X_\eta}^2$ и от особенностей тотального пространства X . Мы доказываем, что если X гладко (соответственно, терминально горенштейново), то $K_{X_\eta}^2 \leq 3$ (соответственно, ≤ 4) и нерациональный слой является обобщенным

конусом над эллиптической кривой. Этот факт является несложным следствием из классификации горенштейновых поверхностей дель Пеццо [HW81]. В терминальном горенштейновом случае любой слой расслоения на поверхности дель Пеццо в смысле ПММ приведен и неприводим, а нерациональный слой нормален. С другой стороны, в терминальном негоренштейновом случае возможны кратные слои. Тем не менее, их кратность не превосходит 6, см. [MP08].

В теореме D мы используем конструкцию замены базы чтобы показать, что в случае гладкого тотального пространства расслоения на поверхности дель Пеццо с нерациональным центральным слоем находятся в биективном соответствии с гладкими $\mathbb{P}_n$ -расслоениями на поверхности дель Пеццо с некоторыми свойствами. Здесь $\mathbb{P}_n$ — циклическая группа из n элементов. Это показывает, что в этом случае нерациональные вырождения образуют достаточно ограниченный класс.

Теорема D. Пусть $\pi : X \rightarrow B \ni o$ является расслоением на поверхности дель Пеццо, причем X гладко и специальный слой $F = \pi^{-1}(o)$ нерационален. Тогда имеется биективное соответствие между такими π и гладкими $\mathbb{P}_n$ -расслоениями на поверхности дель Пеццо $\pi_V : V \rightarrow B \ni o$ со следующими свойствами:

- специальный слой $E_V = \pi_V^{-1}(o)$ является гладкой $\mathbb{P}_n$ -минимальной поверхностью дель Пеццо степени d ,
- locus неподвижных точек действия $\mathbb{P}_n$ — гладкая эллиптическая кривая $C \subset E_V$,
- действие $\mathbb{P}_n$ на $\mathbb{P}(N_{C/V})$ тривиально.

Более того, имеются в точности три возможности (здесь $d = K_F^2$):

- (i) $d = 3, n = 3$,
 $E_V \simeq (w^3 = q_3(x, y, z)) \subset \mathbb{P}^3$,
 $\mathbb{P}_3 : w \mapsto \zeta_3 w$,
 $F \simeq (0 = q_3(x, y, z)) \subset \mathbb{P}^3$;
- (ii) $d = 2, n = 4$,
 $E_V \simeq (w^2 = q_4(x, y) + z^4) \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$,
 $\mathbb{P}_4 : z \mapsto \sqrt{-1}z$,
 $F \simeq (w^2 = q_4(x, y)) \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$;
- (iii) $d = 1, n = 6$,
 $E_V \simeq (w^2 = z^3 + \alpha x^4 z + \beta x^6 + y^6) \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$,
 $\mathbb{P}_6 : y \mapsto \zeta_6 y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
 $F \simeq (w^2 = z^3 + \alpha x^4 z + \beta x^6) \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$.

С другой стороны, если X имеет лог терминальные особенности, легко показать, что значение $g(C)$ неограниченно. Также мы даем примеры расслоения с терминальными особенностями тотального пространства и $g(C) = 2, 3, 4$. Неизвестно, можно ли получить $g(C) > 4$ при этих условиях.

Затем мы рассматриваем расслоения с тотальным пространством, имеющим обыкновенные двойные точки в качестве особенностей. Используя замену базы мы строим биективное соответствие таких расслоений и некоторых $\mathbb{P}_n$ -расслоений на поверхности дель Пеццо. Оказывается, в этом случае $K_{X_\eta}^2 = 1$ либо 4.

Теорема Е. Пусть $\pi : X \rightarrow B \ni o$ является расслоением на поверхности дель Пеццо, причем X имеет обыкновенные двойные точки в качестве особенностей. Предположим, что специальный слой $F = \pi^{-1}(o)$ иррационален и что X имеет особую точку на F . Тогда имеется биективное соответствие между такими π и (слабыми аналитическими в случае (ii) ниже) $\mathbb{P}_n$ -расслоениями на поверхности дель Пеццо $\pi_V : V \rightarrow B \ni o$ со следующими свойствами:

- специальный слой $E_V = \pi_V^{-1}(o)$ является гладкой (слабой в случае (ii) ниже) поверхностью дель Пеццо степени d с $\rho^{\mathbb{P}_n}(E_V) = 2$,
- одномерный локус неподвижных точек действия $\mathbb{P}_n$ является гладкой эллиптической кривой $C \subset E_V$,
- действие $\mathbb{P}_n$ на $\mathbb{P}(N_{C/V})$ тривиально

Имеется две возможности (здесь $d = K_F^2$):

- (i) $d = 4$, $n = 2$, E_V имеет две структуры $\mathbb{P}_2$ -расслоения на коники,
- (ii) $d = 1$, $n = 4$, E_V имеет одну $\mathbb{P}_4$ -инвариантную (-1) -кривую. Имеется одна $\mathbb{P}_4$ -неподвижная точка.

Другие результаты о специализации рациональности см. в работах [KT17], [T16], [P17].

3 Полустабильные вырождения многообразий Фано

Мы рассматриваем полустабильные семейства поверхностей дель Пеццо и, более общим образом, многообразий Фано произвольной размерности. Полустабильным семейством называется семейство проективных алгебраических многообразий над ростком кривой с гладким тотальным пространством и такое, что его специальный слой приведен и имеет простые нормальные пересечения.

Теорема о полустабильной редукции [KKMS73] утверждает, что любое семейство с гладким общим слоем бирационально полустабильному семейству с точностью до конечной замены базы. Мы будем говорить, что специальный слой полустабильного семейства является *полустабильным вырождением* общего слоя.

Важным инвариантом полустабильного вырождения является его *двойственный комплекс*. Его топология отражает некоторые геометрические свойства общего слоя. Например, известная теорема Куликова [Ku77] утверждает, что двойственный комплекс полустабильного вырождения поверхностей КЗ может иметь в точности один из трех типов, и что максимальному вырождению (т. е. обладающему двойственным комплексом максимальной размерности) соответствует триангуляция двумерной сферы. Три случая из теоремы Куликова различаются в терминах монодромии вокруг особого слоя. В частности, если монодромия тривиальна, то каждый слой семейства гладок. Мы будем называть такое семейство *гладким*.

Естественно задать вопрос о классификации полустабильных вырождений поверхностей дель Пеццо. В работе [Fu90] Фуджита получил такую классификацию. Затем, Качи в [Ka07] при помощи теории деформаций показал, что все случаи в списке Фуджиты реализуются. Тем не менее, эта классификация не содержала информации о монодромии. Мы даем новое доказательство теоремы Фуджиты-Качи, из которого следует, что монодромия тривиальна во всех случаях. Для других результатов про полустабильные вырождения поверхностей см., например, [Per77]. Также имеется понятие двойственного комплекса особенности, см., например, [St08].

В высших размерностях де Ферне, Коллар и Сю доказали, что если общий слой полустабильного семейства рационально связан, то двойственный комплекс специального слоя стягиваем, см. [dFKX12, Theorem 4]. Основная теорема этой части работы дает более специальный результат в случае полустабильных вырождений многообразий Фано.

Теорема F. Пусть $\pi : X \rightarrow B$ является полустабильным семейством n -мерных многообразий Фано. Тогда двойственный комплекс специального слоя $F = \pi^{-1}(o)$ является симплексом Δ^k размерности $k \leq n$. В размерности $n \leq 3$ максимальное вырождение (такое, что $k = n$) единственно и имеет тривиальную монодрию. Более того, оно может быть получено раздутием флага подпространств

$$\{\text{pt}\} = \mathbb{P}^0 \subset \dots \subset \mathbb{P}^{n-1}$$

в центральном слое гладкого семейства с общим слоем, изоморфным $\mathbb{P}^n$. В этом случае каждая из $n+1$ компонент специального слоя для $n = 1, 2, 3$ изоморфна раздутию $\mathbb{P}^n$ в флаге подпространств

$$\{\text{pt}\} = \mathbb{P}^0 \subset \dots \subset \mathbb{P}^{n-2}.$$

В работе [Hu06] показано, что для любого $n \geq 1$ любое $k \leq n$ может являться размерностью симплекса для некоторого вырождения с общим слоем $\mathbb{P}^n$. Для $1 \leq n \leq 3$ эта конструкция совпадает с максимальным вырождением, описанным в теореме F.

Известно, что специальный слой полустабильного семейства удовлетворяет условию d -полустабильности, введенному Фридманом в работе [Fr83]. Мы используем это условие и программу минимальных моделей, чтобы передоказать результат Фуджиты [Fu90], то есть, чтобы получить классификацию полустабильных вырождений поверхностей дель Пеццо. Это дает случай $n = 2$ теоремы F (случай $n = 1$ тривиален).

Канонический класс дивизоров может быть определен для приводимых многообразий с простыми нормальными пересечениями. Мы говорим, что такое многообразие F является многообразием Фано, если $-K_F$ обилен. Это условие эквивалентно следующему: каждая компонента F_j является многообразием лог Фано с границей D_j , являющейся пересечением F_j с другими компонентами F . В работе [Tz15] Циолас показал, что любое d -полустабильное многообразие Фано с простыми нормальными пересечениями может быть сглажено, то есть является специальным слоем в полустабильном семействе. Поэтому классификация полустабильных вырождений многообразий Фано эквивалентна классификации d -полустабильных многообразий Фано с простыми нормальными пересечениями.

С этой точки зрения важно изучать многообразия лог Фано. Мы рассматриваем гладкие многообразия с целой границей. Тогда в размерности 1 классификация тривиальна: единственным одномерным многообразием лог Фано является проективная прямая. С другой стороны, уже в размерности два имеется бесконечно много неизоморфных многообразий лог Фано (они называются поверхностями лог дель Пеццо). Например, подходит любая поверхность Хирцебруха с отрицательным сечением в качестве границы. Классификация лог поверхностей дель Пеццо и трехмерных многообразий лог Фано изложена в работе [Ma83]. Мы используем эту классификацию и условие d -полустабильности, чтобы доказать теорему F в размерности 3.

4 Апробация результатов

Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Сибирская летняя школа по геометрии. Сентябрь 2019, Новосибирск. Доклад «Semistable degenerations of Fano varieties» («Полустабильные вырождения многообразий Фано»).
- Конференция «Géométrie Algébrique en Liberté XXVII», июнь 2019, Бухарест. Постер «Semistable degenerations of Fano varieties» («Полустабильные вырождения многообразий Фано»).

- Конференция «Birational geometry, Kähler-Einstein metrics and degenerations», Июнь 2019, Шанхай. Доклад «Semistable degenerations of Fano varieties» («Полустабильные вырождения многообразий Фано»).
- Воркшоп по бирациональной геометрии, октябрь 2018, Москва. Доклад «Non-rational fibers in del Pezzo fibrations» («Нерациональные слои в расслоениях на поверхности дель Пеццо»).
- Сибирская летняя школа по геометрии. Сентябрь 2018, Новосибирск. Доклад «Нерациональные слои в расслоениях на поверхности дель Пеццо».
- Конференция «Группы и алгебры Ли». Август 2018, Самара. Доклад «Нерациональные слои в расслоениях на поверхности дель Пеццо».
- Воркшоп по бирациональной геометрии, ноябрь 2017, Москва. Доклад «Standard models of degree 1 del Pezzo fibrations» («Стандартные модели расслоений на поверхности дель Пеццо степени 1»).
- VII Конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу. Август 2017, Коряжма, Архангельская область. Доклад «Стандартные модели расслоений на поверхности дель Пеццо».
- Инаугурационная конференция Лаборатории зеркальной симметрии и автоморфных форм. Июль 2017, Санкт-Петербург. Доклад «Стандартные модели расслоений на поверхности дель Пеццо».

Результаты диссертации были изложены на следующих семинарах:

- Доклад «Semistable degenerations of Fano varieties» («Полустабильные вырождения многообразий Фано»), Университет Лафборо, Семинар Математическая физика и геометрия, октябрь 2019.
- Доклад «Semistable degenerations of Fano varieties» («Полустабильные вырождения многообразий Фано»), Университет Бристоля, Семинар Алгебра и геометрия, октябрь 2019.
- Доклад «Semistable degenerations of Fano varieties» («Полустабильные вырождения многообразий Фано»), Эдинбургский геометрический семинар (EDGE), октябрь 2019.
- Доклад «Полустабильные вырождения многообразий Фано», Лаборатория алгебраической геометрии и гомологической алгебры, МФТИ, Долгопрудный, сентябрь 2019.

- Доклад «Полустабильные вырождения многообразий Фано», семинар Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений, НИУ ВШЭ, Москва, сентябрь 2019.
- Доклад «Сnc вырождения многообразий Фано», семинар Исковских, МИРАН, апрель 2019.
- Доклад «Нерациональные слои в расслоениях на поверхности дель Пеццо», семинар Исковских, МИРАН, октябрь 2018.
- Доклад «Стандартные модели расслоений на поверхности дель Пеццо», семинар Исковских, МИРАН, ноябрь 2017.

Результаты диссертации опубликованы в двух статьях и одном препринте.

- Standard models of degree 1 del Pezzo fibrations.
Moscow Mathematical Journal, 18 (4), 2018, 721–737.
- О нерациональных слоях в расслоениях на поверхности дель Пеццо.
Математические заметки, 106 (6), 2019, 881–893.
- On semistable degenerations of Fano varieties.
<https://arxiv.org/abs/1909.08319>, 2019.

Литература

- [Av14] A. Avilov *Existence of standard models of conic fibrations over non-algebraically-closed fields*. Mat. Sb., 205:12 (2014), 3–16.
- [B10] C. Birkar. *On existence of log minimal models*. Compositio Mathematica, 146, 4 (2010), 919–928.
- [B16] C. Birkar. *Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties*. arXiv:math/1609.05543.
- [BCHM09] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan. *Existence of minimal models for varieties of log general type*. Journal of the American Mathematical Society, 23, 2 (2006), 405–468.
- [BKR12] G. Brown, M. Kerber, M. Reid. *Fano 3-folds in codimension 4, Tom and Jerry. Part I*. Compositio Mathematica, 148, 4 (2012), 1171–1194.
- [GRDB] G. Brown, A.M. Kasprzyk and others. *Graded Ring Database*. <http://grdb.lboro.ac.uk>.
- [Co96] A. Corti. *Del Pezzo Surfaces over Dedekind Schemes*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 144, No. 3 (Nov., 1996), pp. 641–683.
- [dFKX12] T. de Fernex, J. Kollár, and C. Xu, *The dual complex of singularities*, arXiv:1212.1675.
- [Fr83] R. Friedman, *Global smoothings of varieties with normal crossings*, Ann. of Math. 118, 1983, 75–114.
- [F95] T. Fujisawa. *On non-rational numerical del Pezzo surfaces*. Osaka J. Math. 32, no. 3 (1995), 613–636.
- [Fu90] T. Fujita, *On Del Pezzo fibrations over curves*, Osaka Math. J. 27, 1990, 229–245.
- [HM05] C. Hacon and J. McKernan. *On the existence of flips*. arXiv:math/0507597.

- [HW81] F. Hidaka and K. Watanabe. *Normal Gorenstein Surfaces with Ample Anti-canonical Divisor*. Tokyo J. of Math. Vol 04, no. 2 (1981), 319–330.
- [Hu06] S. Hu, *Semi-Stable Degeneration of Toric Varieties and Their Hypersurfaces*, Communications in Analysis and Geometry 14 (1), 2006, 59–89.
- [Is96] V. A. Iskovskikh. *Factorization of birational maps of rational surfaces from the viewpoint of Mori theory*. Russian Math. Surveys 51 (1996), no. 4, 585–652.
- [Is77] V. A. Iskovskikh. *Fano threefolds I*. Math. USSR Izv., 11, 3 (1977), 485–527.
- [Is78] V. A. Iskovskikh. *Fano threefolds II*. Math. USSR Izv., 12, 3 (1978), 469–506.
- [IP99] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov. *Algebraic Geometry V: Fano Varieties*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Book 47. Springer, 1999.
- [Ka07] Ya. Kachi, *Global smoothings of degenerate Del Pezzo surfaces with normal crossings*, Journal of Algebra 307, 2007, 249–253.
- [KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki. *Introduction to the minimal model problem*. Algebraic Geometry Sendai 1985, Advanced Studies in Pure Math. 10 (1987), Kinokuniya and North-Holland, 283–360.
- [KKMS73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, Lect. Notes Math. Vol. 339, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1973.
- [Ko97] J. Kollár. *Polynomials with integral coefficients, equivalent to a given polynomial*. ERA Amer. Math. Soc. 03 (1997), pp. 17–27.
- [KM-1998] J. Kollár, Sh. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*. Cambridge tracts in mathematics, 1998.
- [KT17] M. Kontsevich, Yu. Tschinkel. *Specialization of birational types*. ArXiv e-print, 2017, 1708.05699.
- [Kr18] I. Krylov. *Birational geometry of del Pezzo fibrations with terminal quotient singularities*. J. Lond. Math. Soc., 97, no. 2 (2018), 222–246.
- [Ku77] Vik. S. Kulikov. *Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Vol. 41, Issue 5 (1977), 1008–1042.
- [Ma83] H. Maeda, *Classification of logarithmic Fano 3-folds*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59 (6), 1983, 245–247.

- [Ma02] K. Matsuki. *Introduction to the Mori program*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Mo82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*. Annals of Mathematics, Vol. 116 (1), 1982, 133–176.
- [Mo88] Sh. Mori. *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds*. J. Amer. Math. Soc., 1988, 1, 117–253.
- [MM83] Sh. Mori, Sh. Mukai. *On Fano 3-Folds with $B_2 \geq 2$* . Adv. Stud. Pure Math., Algebraic Varieties and Analytic Varieties, S. Iitaka, ed. (Tokyo: Mathematical Society of Japan, 1983), 101–129.
- [MP08-2] Sh. Mori, Yu. Prokhorov. *On $\mathbf{Q}$ -conic bundles*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44, 3 (2008) 315–369.
- [MP08] Sh. Mori, Yu. Prokhorov. *Multiple fibers of del Pezzo fibrations*. Proc. Steklov Inst. Math., 2009, 264, 131–145.
- [P17] A. Perry. *Rationality does not specialize among terminal fourfolds*. Algebra Number Theory, Vol. 11, Number 9 (2017), 2193–2196.
- [Per77] U. Persson, *On degenerations of algebraic surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 11, no. 189, 1977.
- [Pr15] Yu. Prokhorov. *On G -Fano threefolds*. Izv. Math., 79(4): 795–808, 2015.
- [Pr16] Yu. Prokhorov. *Singular Fano threefolds of genus 12*. Sb. Math., 207:7 (2016), 983–1009.
- [Pr16a] Yu. Prokhorov. *Q -Fano threefolds of index 7*. Proc. Steklov Inst. Math., 294 (2016), 139–153.
- [PrSh16] Yu. Prokhorov, C. Shramov *Finite groups of birational selfmaps of threefolds*. ArXiv e-print, 2016, 1611.00789. To appear in Math. Res. Lett.
- [Sa82] V. G. Sarkisov *On conic bundle structures*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 46:2 (1982), 371–408; Math. USSR-Izv., 20:2 (1983), 355–390.
- [St08] D. A. Stepanov, *A note on resolution of rational and hypersurface singularities*, Proc. Amer. Math. Soc. 136, no. 8, 2008, 2647–2654.
- [T16] B. Totaro. *Rationality does not specialise among terminal varieties*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 161, Issue 1 (2016), 13–15.

- [Tz15] N. Tziolas, *Smoothings of Fano Varieties With Normal Crossing Singularities*.
Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 58 (3), 2015, 787–806.