

На правах рукописи



Сорокина Марина Михайловна

**ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ**

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

31 янв 2018



Красноярск 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

Научный консультант:

д-р физ.-матем. наук, профессор **Ведерников Виктор Александрович**

Официальные оппоненты:

Васильев Александр Федорович, д-р физ.-матем. наук, профессор, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии, профессор

Казарин Лев Сергеевич, д-р физ.-матем. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова», заведующий кафедрой алгебры и математической логики

Ревин Данила Олегович, д-р физ.-матем. наук, доцент, ФГБУН «Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук», лаборатория теории групп, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация:

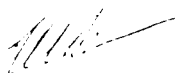
ФГБУН «Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук», г. Екатеринбург

Защита состоится 02 марта 2018 года в 13.45 на заседании диссертационного совета Д.212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» <http://www.sfu-kras.ru>.

Автореферат разослан _____ января 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Шлапунов
Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертационного исследования и степень ее разработанности. Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп, $\mathfrak{F}$ — произвольный подкласс класса $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}_\pi$ — класс всех π -групп, содержащихся в $\mathfrak{F}$. Среди классов конечных групп центральное место занимают формации — классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формациями являются такие важные классы групп, как $\mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{N}, \mathfrak{A}$ — классы всех конечных разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных, абелевых групп соответственно, и многие другие, причем $\mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{N}$ являются насыщенными формациями. Формации явились эффективным средством для изучения подгруппового строения конечных групп (см. [15]), что обусловило интенсивное развитие теории формаций в последние десятилетия.

В теории классов конечных групп важную роль играют функциональные методы. Удобным инструментом для изучения формаций явились функции, в качестве области определения которых выступает множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел (или, что равносильно, класс всех конечных простых абелевых групп). Так, понятие формации было введено Гашпоцом в 1963 году в работе [27]. Там же с помощью функциональных методов Гашпоцом были построены локальные формации и установлено, что в универсуме всех конечных разрешимых групп всякая локальная формация является насыщенной. Позднее (см. [23], теорема IV, 4.6) была доказана равносильность понятий локальной и насыщенной формаций в универсуме всех конечных групп.

С помощью локальных формаций были решены многие важные вопросы в теории конечных групп, в частности, с единых позиций изложены результаты о силовских, холловых, картеровых, гашпоцевых подгруппах, о системных нормализаторах разрешимых групп, о группах Миллера-Морено, группах Шмидта и многие другие (см. [15]). Локальные формации нашли применение в исследовании вопросов дополняемости в группе ее нормальных подгрупп. В этом направлении хорошо известен следующий результат Гашпоца.

ТЕОРЕМА 1 (Гашпоц, [26]). *Пусть N — нормальная абелева подгруппа конечной группы G . Подгруппа N тогда и только тогда дополняема в группе G , когда N_p дополняема в G_p для любого $p \in \pi(N)$.*

Виландт в обзорном докладе на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 году поставил следующую проблему (Виландт [41]):

(А) *Ослабить условие абелевости нормальной подгруппы N в Теореме 1.*

Одновременно Виландтом была отмечена невозможность исключить условие абелевости полностью (пример, подтверждающий данный факт, см. в [35], с. 131). Важный шаг в решении Проблемы (А) сделал Л.А. Шеметков, дока-

завший в 1974 году для локальной формации $\mathfrak{F}$ следующую теорему о дополняемости в конечной группе G её $\mathfrak{F}$ -корадикала N в случае, когда силовские подгруппы из N являются абелевыми.

ТЕОРЕМА 2 (Шеметков, [13]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — конечная группа. Если для любого простого числа p , делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p -подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G .*

В качестве следствий из теоремы 2 вытекают, ставшие уже классическими, теорема Ф. Холла [32] о дополняемости в конечной разрешимой группе G её коммутанта G' ($\mathfrak{A}$ -корадикала группы G) с абелевыми силовскими подгруппами, теорема Хуперта [34] о дополняемости в G нормальной подгруппы $O^p(G)$ ($\mathfrak{A}_p$ -корадикала группы G) с абелевой силовской p -подгруппой.

Понятие $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппы, введенное в рассмотрение Гашпоцом в 1963 году [27], явилось естественным обобщением понятий холловой и картеровой подгрупп. В универсуме всех конечных разрешимых групп понятие $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппы совпадает с понятием $\mathfrak{F}$ -проектора, которое было введено Гашпоцом позднее, в 1969 году (см. [28]). В работе [27] Гашпоц объединил и расширил известные результаты Холла [29] и Картера [21], а именно, Гашпоцом были установлены существование и сопряженность $\mathfrak{F}$ -покрывающих подгрупп ($\mathfrak{F}$ -проекторов) в разрешимой группе для насыщенной (локальной) формации $\mathfrak{F}$. В работе Шунка [38] теорема Гашпоца была распространена для класса $\mathfrak{F}$, являющегося примитивно замкнутым гомоморфом. Шмидт и Э.Ф. Шмигирев в [37] и [18] соответственно распространили результаты Гашпоца [27] на произвольные группы с разрешимым $\mathfrak{F}$ -корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, а Л.А. Шеметковым в [14] условие разрешимости $\mathfrak{F}$ -корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ было ослаблено до $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимости. Дальнейшее обобщение результаты работ [14], [18], [27], [37], [38] получили в работе Эриксона [24] для примитивно замкнутого гомоморфа (класса Шунка), содержащегося в SQ -замкнутом универсуме. Фёрстер в [25] к исследованию вопросов существования и сопряженности $\mathfrak{F}$ -проекторов в группах для класса Шунка $\mathfrak{F}$, содержащегося в $SQE_{\mathfrak{F}}$ -замкнутом универсуме, применил подход, основанный на использовании Q -границы класса Шунка (см. также [23], главы III и VI). В ряде работ были установлены необходимые и достаточные условия, при которых $\mathfrak{F}$ -подгруппа является $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппой ($\mathfrak{F}$ -проектором) группы G или содержится в её $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппе ($\mathfrak{F}$ -проекторе), в частности, выявлены условия при которых $\mathfrak{F}$ -проектор группы является её $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппой (см. [22], [33]).

В книге [23] Дерк и Хоукс поставили следующую общую проблему (Дерк, Хоукс [23], глава III, § 3, проблема В):

(В) *Может ли универсум, для которого работает теория проекторов, расширен за пределы класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп?*

К этому направлению относятся упомянутые выше результаты Шмидта, Э.Ф.

Шмигирева, Л.А. Шеметкова, Эриксона, Фёрстера.

Ф. Холл в работах [30], [31] ввел понятия силовой системы и системного нормализатора с целью более глубокого изучения разрешимых групп. Картер и Хоукс в работе [22] для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ в разрешимой группе G выделили сопряженный класс $\mathfrak{F}$ -подгрупп, получивших в [22] название $\mathfrak{F}$ -нормализаторов, причем класс $\mathfrak{F}$ -нормализаторов совпадает с сопряженным классом системных нормализаторов в G , когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп. В работе [22] установлено, что для $\mathfrak{F}$ -нормализаторов в разрешимой группе G выполняются многие свойства системных нормализаторов в G , а именно, в [22] доказано, что в разрешимой группе G для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$ -нормализаторы, любые два $\mathfrak{F}$ -нормализатора группы G сопряжены в G , $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы G покрывает каждый $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор и изолирует каждый $\mathfrak{F}$ -эксцентральный главный фактор группы G (см. также [23], глава V). Кроме того, в [22] для $\mathfrak{F}$ -нормализатора H разрешимой группы G была получена его характеристизация посредством цепи максимальных подгрупп, соединяющих H с G . Это свойство $\mathfrak{F}$ -нормализатора H разрешимой группы G послужило отправной точкой для определения $\mathfrak{F}$ -нормализатора H для класса Шунка в работе Матна [36] и в произвольной группе для локальной формации $\mathfrak{F}$ в работе Л.А. Шеметкова [14]. Понятие $\mathfrak{F}$ -нормализатора (системного нормализатора) разрешимой группы G оказалось тесно связанным с понятиями $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппы и подгруппы Картера группы G (см. [20], [22], [23], [27]). Так, в [22] установлено, что любой $\mathfrak{F}$ -нормализатор разрешимой группы G содержится в некоторой $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппе из G . $\mathfrak{F}$ -нормализаторы также нашли применение в исследовании вопросов дополняемости $\mathfrak{F}$ -корадикалов в группах. В [22] доказано, что всякое дополнение к абелевому $\mathfrak{F}$ -корадикалу разрешимой группы G является $\mathfrak{F}$ -нормализатором в G , где $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Для произвольной группы G аналогичный результат получил Л.А. Шеметков в [15].

В связи с классификацией конечных простых групп актуальной в теории конечных групп стала задача исследования непростых конечных групп с произвольными, необязательно абелевыми, композиционными факторами. Наиболее удобными для решения этой задачи явились композиционные формации, введенные в рассмотрение Л.А. Шеметковым в 1974 году с помощью функций вида $f : \mathfrak{I} \rightarrow \{\text{формации конечных групп}\}$, где $\mathfrak{I}$ — класс всех конечных простых групп [13]. Независимо от Л.А. Шеметкова композиционные формации были построены Бэром в терминах разрешимо насыщенных формаций (см. [23]). Композиционные формации также нашли широкое применение в теории конечных групп, в частности, при изучении субнормальных подгрупп и их обобщений (см. [2]).

Тот факт, что теория формаций оказалась достаточно удобным средством для решения многих вопросов теории конечных групп, привел к необходимости более тщательного изучения самих формаций. В 1984 году Л.А. Шеметков для непустого подмножества ω множества $\mathbb{P}$ построил ω -локальные формации [17], раскрыв новые возможности использования функций при изучении классов конечных групп. В работе [11] А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков доказали равносильность понятий ω -локальной и ω -насыщенной формаций. Актуальность проблемы применения ω -локальных формаций к изучению подгруппового строения конечных групп в разные годы неоднократно обсуждалась на Гомельском Алгебраическом Семинаре. В 1999 году А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков в качестве обобщения понятия композиционной формации построили Ω -композиционные формации, где Ω — непустой подкласс класса $\mathcal{T}$ (см. [12]).

Как отмечено в монографии А.Н. Скибы [10], важной характеристикой формации является наличие в ней тех или иных подформаций и их взаимное расположение (см. [10], с. 9). Поскольку понятие формации явилось естественным обобщением понятия многообразия, то многие методы в теории формаций возникли как аналоги соответствующих методов теории многообразий. В частности, исследования подформационного строения локальных формаций привели к необходимости разработки особых методов, связанных с понятием критической формации. В 1978 году Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп впервые была поставлена следующая общая проблема (Л.А. Шеметков [16]):

(С) Изучить $\mathfrak{H}_\theta$ -критические формации, где $\mathfrak{H}$ — класс групп, θ — некоторая совокупность формаций.

В серии работ (см. [7] — [9]) А.Н. Скиба получил решение Проблемы (С) в случае, когда θ — совокупность всех локальных формаций. А.Н. Скибой и В.М. Селькиным изучены критические нормально наследственные и наследственные локальные формации (см., например, [6]). Важным обобщением понятия локальности является понятие кратной локальности, введенное в рассмотрение А.Н. Скибой в 1987 году [8]. В работе [5] В.Г. Сафонов получил описание строения критических n -кратно локальных формаций. Исследованием критических ω -локальных формаций занимались А.Н. Скиба, В.М. Селькин, И.Н. Сафонова и др. В работе [12] изучены критические композиционные формации. В последние годы нередко в качестве аппарата исследования формаций стали использоваться подгрупповые функторы, т.е. согласованные с изоморфизмами групп функции, выделяющие некоторые системы подгрупп (см. [2], [10]). В монографии [10] представлены основные результаты о критических τ -замкнутых n -кратно локальных формациях, где τ — регулярный подгрупповой функтор (подгрупповой функтор Скибы).

В 1999 году В.А. Ведерников предложил принципиально новый функциональный подход к изучению классов групп, который привел к необходимости рассмотрения для формаций наряду с функциями-спутниками новой функции направления, определяемой как отображение множества $\mathcal{P}$ всех простых чисел (класса $\mathcal{J}$ всех простых конечных групп) во множество всех непустых формаций Фиттинга ([68], [69]). Таких направлений существует бесконечное множество, а направление ω -локальной формации (Ω -композиционной формации) является одним из них. Поэтому для фиксированного непустого множества ω простых чисел (для фиксированного непустого класса Ω простых конечных групп) можно построить бесконечное множество новых видов формаций – ω -версных формаций (Ω -расслоенных формаций). В.А. Ведерниковым в 1999 году была поставлена следующая задача (В.А. Ведерников [68], [69]):

(D) Разработать теории ω -версных (задача (D1)) и Ω -расслоенных (задача (D2)) формаций конечных групп.

Ввиду отмеченной выше связи между $\mathfrak{F}$ -проекторами, $\mathfrak{F}$ -покрывающими подгруппами и $\mathfrak{F}$ -нормализаторами в конечных группах для локальной формации $\mathfrak{F}$ при решении Проблемы (B) с помощью ω -локальных формаций актуальной является следующая задача:

(E) Разработать теорию $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ произвольная ω -локальная формация.

Цели диссертационного исследования.

В диссертации ставится целью решение проблем и задач (A) – (E).

Основные результаты диссертации.

1. Решена Проблема (A) (проблема Виландта [41]) о дополняемости в конечной группе G $\mathfrak{F}$ -корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ без условия абелевости его силовских подгрупп для ω -локальной (локальной) формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.
2. Решена Проблема (B) (проблема Дерка и Хоукса [23]) о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса всех конечных разрешимых групп.
3. Решена Проблема (C) (проблема Л.А. Шеметкова [16]) изучения $\mathfrak{F}_\theta$ -критических формаций для n -кратно ω -версных, τ -замкнутых ω -версных, τ -замкнутых Ω -расслоенных формаций.
4. Разработаны основные положения теории ω -версных и теории Ω -расслоенных формаций (решение Задачи (D) В.А. Ведерникова).
5. Разработаны основные положения теории $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ произвольная ω -локальная формация (решение Задачи (E)).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Методология и методы исследования. В диссертации используются классические методы теории групп, а также методы теории классов групп и теории подгрупповых функторов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и теории классов конечных групп, при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Публикации. Список публикаций по теме диссертации включает 29 работ [42] [70], в том числе 26 статей [42] [67] опубликованы в рецензируемых изданиях. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 статьях [42] [57] в изданиях из перечня ВАК.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации апробировались:

- на научно-исследовательском семинаре кафедры Высшей алгебры Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (2017 г., Москва);

- на семинаре «Алгебра и логика» Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН (2017 г., Новосибирск);

- на Красноярском алгебраическом семинаре (2017 г., Красноярск);

- на научно-исследовательском семинаре отдела алгебры и топологии Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН (2016 г., Екатеринбург);

- на Международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (2016 г., Красноярск) – пленарный доклад;

- на Международной конференции "Groups and Graphs, Metrics and Manifolds" (2017 г., Екатеринбург);

- на семинарах кафедры алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени И.Г. Петровского (2014 – 2017 гг., Брянск).

Результаты диссертации были представлены на международных алгебраических конференциях в Москве (2003, 2008), Санкт-Петербурге (2002), Екатеринбурге (2001, 2015), Красноярске (2002, 2007, 2010, 2013, 2016), Гомеле (2000, 2005, 2007), Киеве (2002), Владикавказе (2012, 2015), Казани (2016), Нальчике (2017).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, перечня условных обозначений и определений, списка литературы (132 наименования), составленного в алфавитном порядке. Объем диссертации – 229 страниц.

Основное содержание работы

Глава 1 посвящена разработке теории ω -всерных формаций конечных групп (Задача (D1)) и ее применению к изучению вопросов дополняемости корадикалов в группах. Целью данной главы является также решение Проблемы (A) для случая локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.

В § 1.1 решается Задача (D1). Пусть $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(\omega') \neq \emptyset$, $g : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $\delta : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ — функции, называемые соответственно ωF -функцией, $\mathbb{P}F$ -функцией и $\mathbb{P}FR$ -функцией. Формацию $\omega F(f, \delta) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$ называем ω -всерной формацией с направлением δ и ω -спутником f . Формацию $\mathbb{P}F(g, \delta) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\delta(p)} \in g(p) \text{ для всех } p \in \pi(G))$ называем всерной формацией с направлением δ и спутником g . Рассматривая в качестве δ различные $\mathbb{P}FR$ -функции, получаем различные виды ω -всерных (всерных) формаций. Одним из важных видов ω -всерных формаций являются ω -полные формации. ω -Полной называем формацию $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta_0)$, где $\delta_0(p) = \mathfrak{E}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Значение ω -полных формаций в теории формаций конечных групп отражено в теореме 1.1.1.

ТЕОРЕМА 1.1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ω -полной формацией.

Связь между ω -всерными и всерными формациями устанавливает

ТЕОРЕМА 1.1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая неединичная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω -всерной с направлением δ и ω -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — всерная формация с направлением δ и спутником f_1 таким, что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \emptyset$ для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$.

Одним из видов ω -всерных формаций являются хорошо известные ω -локальные формации. В.А. Ведерников в работе [1] ввел в рассмотрение два важных вида ω -всерных формаций — ω -специальные и ω -центральные формации. Для направлений $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ соответственно ω -полной, ω -локальной, ω -специальной и ω -центральной формаций справедливо соотношение: $\delta_0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$. Среди направлений δ ω -всерной формации таких, что $\delta_0 \leq \delta$, важное место занимают p -направления, т.е. направления, удовлетворяющие равенству $\mathfrak{E}_p \cdot \delta(p) = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. В.А. Ведерников в [1] для ω -всерной формации ввел в рассмотрение понятия a -направления, b -направления, b_p -направления, где $p \in \mathbb{P}$, r -направления и s -направления. Для ω -всерных формаций с p -направлением получена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1.4. Пусть δ — p -направление ω -всерной формации. Если $\mathfrak{F}$ — всерная формация с направлением δ , то $\mathfrak{F}$ является ω -всерной формацией с направлением δ для любого непустого множества простых чисел ω .

При исследовании ω -всерных формаций удобно использовать их ω -спутники. В § 1.1 рассматриваются некоторые важные виды ω -спутников ω -всерной формации. В теореме 1.1.6 установлено существование единственного минимального ω -спутника ω -всерной формации с направлением δ , удовлетворяющим условию $\delta_0 \leq \delta$, а также получено описание его строения. Используя описание строения минимального ω -спутника ω -всерной формации, получен ряд результатов об ω -всерных формациях.

ТЕОРЕМА 1.1.7. Пусть δ — ps -направление ω -всерной формации. Формация $\mathfrak{F}$ является ω -всерной с направлением δ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\{q\}$ -всерной формацией с направлением δ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

Параграфы 1.2 — 1.4 посвящены применению ω -всерных формаций с направлением δ_1 (ω -локальных формаций) к исследованию дополняемости корадикалов в группах. В § 1.2 введены в рассмотрение понятия f_ω -центрального и f_ω -эксцентренного главных факторов группы, свойства которых в § 1.3 и § 1.4 применяются к исследованию указанных выше вопросов. Пусть f — ωF -функция. Главный ωd -фактор A/B группы G называем f_ω -центральным в G , если $G/C_G(A/B) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(A/B)$; f_ω -эксцентральным в G , если $G/C_G(A/B) \notin f(p)$ для некоторого $p \in \omega \cap \pi(A/B)$. В теореме 1.2.1 для ω -локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G не содержит определенных G -главных f_ω -центральных факторов.

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ — ω -локальная формация Фиттинга с максимальным внутренним ω -спутником f и $G = A_1 A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G . Если для некоторого простого числа $p \in \omega$ силовская p -подгруппа группы $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевой для любого $i = 1, 2, \dots, n$, то $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G -главных f_ω -центральных pd -факторов.

В § 1.3 изучаются вопросы применения ω -локальной формации $\mathfrak{F}$ к доказательству существования ω -дополнений и дополнений к $\mathfrak{F}$ -корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G . В теоремах 1.3.1 — 1.3.3 получены результаты, подобные (не равносильные) результатам Л.А. Шеметкова из [39] (см. [39], теоремы 4, 5, следствие теоремы 5). В теореме 1.3.4 установлены условия, при которых $\mathfrak{F}$ -корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ в любом расширении группы G обладает ω -дополнением, нормализующим некоторую силовскую подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$.

ТЕОРЕМА 1.3.4. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -локальная формация, Γ — расширение группы G , ω_1 — множество всех тех простых чисел $q \in \omega$, для которых силовская q -подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ является циклической. Если $\omega_1 \neq \emptyset$, то в Γ существует ω_1 -дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$, нормализующее некоторую силовскую p -подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$, где p — наименьшее число из ω_1 .

Из теоремы 1.3.4 следует результат Л.А. Шеметкова из [15] (см. [15], теорема 11.10).

В § 1.4 получено решение Проблемы (А). С этой целью здесь введено определение $\omega\mathfrak{F}$ -нормализатора группы G . Следуя [15] (см. [15], определение 21.1), подгруппу H группы G называем $\omega\mathfrak{F}$ -нормализатором группы G , если $H/\Phi(H) \cap O_\omega(H) \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \dots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}$ -критическая подгруппа группы H_{i-1} для любого $i = 1, 2, \dots, t$. В теореме 1.4.2 установлены достаточные условия ω -дополняемости $\mathfrak{F}$ -корадикала группы G ее $\omega\mathfrak{F}$ -нормализаторами.

ТЕОРЕМА 1.4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω -локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G . Если $\mathfrak{F}$ -корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является ω -разрешимым для любого $i = 1, 2, \dots, n$, а его силовские p -подгруппы абелевы для любого $p \in \omega$, то каждый $\omega\mathfrak{F}$ -нормализатор группы G является ω -дополнением в G к $\mathfrak{F}$ -корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.

В качестве следствий из теоремы 1.4.2 получен ряд результатов о дополняемости в конечной группе её $\mathfrak{F}$ -корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп, тем самым для локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ получено решение Проблемы (А).

СЛЕДСТВИЕ 1.4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G . Если $\mathfrak{F}$ -корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимым для любого $i = 1, 2, \dots, n$, а его силовские p -подгруппы абелевы для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то каждый $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы G является дополнением в G к $\mathfrak{F}$ -корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G . Если $\mathfrak{F}$ -корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевым для любого $i = 1, 2, \dots, n$, то каждый $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы G является дополнением в G к её $\mathfrak{F}$ -корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга, содержащая все nilпотентные группы, и группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G . Если $\mathfrak{F}$ -корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является разрешимым с абелевыми силовскими подгруппами для любого $i = 1, 2, \dots, n$, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G .

Основные теоремы 1.1.1, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.6, 1.1.7, 1.2.1, 1.3.1 – 1.3.4, 1.4.2 главы 1 опубликованы в совместных работах [44], [55] (соавтор В.А. Ведерников) в неразделимом соавторстве. Другие свойства ω -всерных формаций и их ω -спутников, представленные в главе, опубликованы в работах [60], [67], совместных с дипломниками М.В. Котляровой и Р.А. Макухиным соответственно; им принадлежат доказательства следствий теорем в [60] и [67].

Глава 2 посвящена применению ω -версных формаций к изучению классических $\mathfrak{F}$ -подгрупп в группах. В § 2.1 - § 2.3 получено решение Проблемы (В): построена теория $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторов, где $\mathfrak{F}$ — произвольный непустой ω -примитивно замкнутый гомоморф, содержащий неразрешимые группы, и, в частности, ω -локальная формация, содержащая неразрешимые группы. С этой целью в § 2.1 изучаются ω -примитивно замкнутые классы групп и ω -примитивные группы. Здесь получены предварительные результаты, используемые при доказательстве утверждений § 2.2 и § 2.3.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называем ω -насыщенным в $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой нормальной подгруппы N группы G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называем ω -примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$ или, коротко, ωP -замкнутым в $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ из $G/\text{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G следует, что $G \in \mathfrak{F}$. ωP -замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф коротко будем называть ωP -гомоморфизмом в $\mathfrak{X}$. В леммах 2.1.1 — 2.1.3 получены свойства ωP -замкнутых классов групп.

В § 2.1 также введено в рассмотрение определение ω -примитивной группы. Группу G называем ω -примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M такая, что $\text{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, а M называем ω -примитивизатором группы G . Центральным результатом об ω -примитивных группах является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть G — ω -примитивная группа, M — ее ω -примитивизатор и $O_\omega(G) \neq 1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) группа G содержит единственную минимальную нормальную ω -подгруппу N , $C_G(N) = N \times \text{Core}_G(M)$ и $G = [N]M$;
- 2) группа G содержит единственную минимальную нормальную ω -подгруппу N , $C_G(N) = \text{Core}_G(M)$ и $G = NM$;
- 3) группа G содержит точно две минимальные нормальные ω -подгруппы N_1 и N_2 , причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1 N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i} \times \text{Core}_G(M)$, $i = 1, 2$.

В качестве следствия из теоремы 2.1.1 получается известный результат Бэра о примитивных группах из [19].

В § 2.2 вводится в рассмотрение понятие $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора конечной группы и изучаются его основные свойства. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппу H группы G называем $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G , если для любой нормальной ω -подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в G/N . Если $\omega = \pi(G)$, то $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор группы G становится $\mathfrak{F}$ -проектором в G [28]. В теоремах 2.2.1 и 2.2.2 установлены соответственно достаточное и необходимое условия существования в группе G $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторов для непустого ωP -замкнутого в $\mathfrak{X}$ гомоморфа $\mathfrak{F}$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ωP -гомоморф в $\mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{X}$. Если G обладает $\mathfrak{F}$ -корадикальной нормальной ω -подгруппой, то в G существует $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор.

ТЕОРЕМА 2.2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф и $\mathfrak{F}$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{X}$. Если каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ с $O_\omega(G) \neq 1$ обладает $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором, то справедливы следующие утверждения

- 1) класс $\mathfrak{F}$ является ωP -замкнутым в $\mathfrak{X}$;
- 2) если $H \in \mathfrak{F}$ и N — нормальная ω -подгруппа группы H , то $H/N \in \mathfrak{F}$.

Из теорем 2.2.1 и 2.2.2 следует результат Эриксона [24].

В § 2.3 изучаются $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающие подгруппы конечных групп и их взаимосвязь с $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторами. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Подгруппу H группы G называем $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой группы G , если $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V — нормальная ω -подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$. При $\omega = \pi(G)$ из определения $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппы получаем определение $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппы [27]. В теореме 2.3.1 для группы G с абелевой минимальной нормальной ω -подгруппой A установлена взаимосвязь между множествами $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$, $Cov_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ и $Comp_G(A)$ соответственно всех $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторов группы G , всех $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгрупп группы G и всех дополнений к подгруппе A в G .

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ωP -гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, A — абелева минимальная нормальная ω -подгруппа группы G , $G/A \in \mathfrak{F}$. Тогда $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = Cov_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = Comp_G(A)$.

В теореме 2.3.2 исследуется вопрос включения $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы G в ее $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающую подгруппу.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ωP -гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, N — nilпотентная нормальная ω -подгруппа группы G . Если H — $\mathfrak{F}$ -подгруппа в G такая, что $G = HN$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппе группы G . В частности, если H — $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в G .

В теореме 2.3.4 для непустого ωP -замкнутого в $\mathfrak{X}$ гомоморфа $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторами и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающими подгруппами.

ТЕОРЕМА 2.3.4. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ωP -гомоморф в $\mathfrak{X}$, G — $\mathfrak{X}$ -группа, обладающая $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимой $\mathfrak{F}$ -корадикальной нормальной ω -подгруппой. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в G .

В теореме 2.3.5 для ω -локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено существование и сопряженность $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгрупп ($\mathfrak{F}^\omega$ -проекторов) в группе с $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимым $\mathfrak{F}$ -корадикалом, являющимся ω -группой.

ТЕОРЕМА 2.3.5. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω -локальная формация, $\mathfrak{F}$ -корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимой ω -группой. Тогда группа G имеет по крайней мере одну $\mathfrak{F}^{\omega}$ -покрывающую подгруппу (один $\mathfrak{F}^{\omega}$ -проектор) и любые две $\mathfrak{F}^{\omega}$ -покрывающие подгруппы (два $\mathfrak{F}^{\omega}$ -проектора) из G сопряжены в G .

В теореме 2.3.6 изучается взаимосвязь между $\mathfrak{F}^{\omega}$ -покрывающими и $\mathfrak{F}$ -абнормальными подгруппами в группах.

ТЕОРЕМА 2.3.6. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, G – группа, $G^{\mathfrak{F}}$ – ω -группа и $H < G$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$ -покрывающей в G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H – $\mathfrak{F}$ -абнормальная подгруппа в G .

В теореме 2.3.7 для ω -локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено существование $\mathfrak{F}^{\omega}$ -покрывающей подгруппы в определенной подгруппе группы G .

Следствиями теоремы 2.3.2 являются результаты Л.А. Шеметкова ([15], теорема 15.9(1)), Ганноца (см. [23], лемма III, 3.14), Эриксона [24]. Из теоремы 2.3.4 при $\omega = \pi(G)$ непосредственно получается теорема Эриксона [24]. Следствиями теоремы 2.3.5 являются результаты Л.А. Шеметкова ([15], теорема 15.7), Э.Ф. Шмигирева [18], Шмидта [37] (см. [15], теорема 15.6). Следствием теоремы 2.3.6 является теорема Л.А. Шеметкова ([15], теорема 15.1). В качестве следствия из теоремы 2.3.7 получается результат Картера и Хоукса ([22], теорема 5.12).

В § 2.4 – § 2.6 решена Задача (Е). § 2.4 посвящен изучению $\mathfrak{F}^{\omega}$ -предельных и $\mathfrak{F}^{\omega}$ -критических подгрупп конечных групп. Результаты, представленные здесь, используются при доказательстве основных утверждений § 2.5 и § 2.6. Следуя [15], нормальную подгруппу R группы G называем $\mathfrak{F}^{\omega}$ -предельной нормальной подгруппой в G , если $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$ является главным фактором группы G . Максимальную подгруппу M группы G называем $\mathfrak{F}^{\omega}$ -критической в G , если $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}^{\omega}$ -предельной нормальной подгруппы R из G . В леммах 2.4.1 – 2.4.4 получены свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$ -предельных и $\mathfrak{F}^{\omega}$ -критических подгрупп.

В § 2.5 вводится в рассмотрение понятие $\mathfrak{F}^{\omega}$ -нормализатора конечной группы и изучаются его основные свойства. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и G – группа. $\mathfrak{F}$ -подгруппу H группы G называем $\mathfrak{F}^{\omega}$ -нормализатором в G , если существует цепь подгрупп группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \dots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}^{\omega}$ -критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i = 1, 2, \dots, t$. В следующих теоремах представлены свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$ -нормализаторов групп.

ТЕОРЕМА 2.5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω -локальная формация, G – группа с $\mathfrak{F}$ -корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, являющимся ω -группой. Тогда в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$ -нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}}H$.

ТЕОРЕМА 2.5.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω -локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ -корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является π -разрешимой ω -группой. Тогда любые

два $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализатора группы G сопряжены в G .

ТЕОРЕМА 2.5.3. Пусть $\mathfrak{F}$ ω -локальная формация с внутренним ω -спутником f , $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, H $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализатор группы G . Тогда H покрывает каждый f_ω -центральный и изолирует каждый f_ω -эксцентральный главный ωd -фактор группы G , если выполняется одно из следующих условий

- 1) $G^{\mathfrak{F}}$ π -разрешимая группа;
- 2) $G^{\mathfrak{F}}$ ω -разрешимая группа.

При $\omega = \pi(G)$ из теоремы 2.5.2 непосредственно получаются результаты Л.А. Шеметкова ([14]; см. также [15], теорема 21.4), Картера и Хоукса ([22]; см. также [23], теорема V, 3.2). Следствиями теоремы 2.5.3 являются результаты Л.А. Шеметкова ([14]; см. также [15], следствие 21.1.1), Картера и Хоукса ([22]; см. также [23], теорема V, 3.2).

В теореме 2.5.5 для ω -локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ установлены достаточные условия дополняемости $\mathfrak{F}$ -корадикала группы G ее $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторами, тем самым получено решение Проблемы (А).

ТЕОРЕМА 2.5.5. Пусть $\mathfrak{F}$ ω -локальная формация Фиттинга, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $G = A_1 A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G . Если $\mathfrak{F}$ -корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является π -разрешимой ω -группой, а его силовские p -подгруппы абелевы для любого $p \in \omega$, $i = 1, 2, \dots, n$, то каждый $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализатор группы G является дополнением к $\mathfrak{F}$ -корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в G .

Отметим, что теоремы 1.4.2, 2.5.5 являются развитием основных результатов работ С.Ф. Каморникова [3] и С.Ф. Каморникова, О.Л. Шеметковой [4].

В § 2.6 для ω -локальной формации $\mathfrak{F}$ получен ряд результатов о взаимосвязи $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторов с $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающими подгруппами в группах. В теореме 2.6.1 представлен центральный результат данного параграфа.

ТЕОРЕМА 2.6.1. Пусть $\mathfrak{F}$ ω -локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G группа и $G^{\mathfrak{F}}$ π -разрешимая ω -группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) всякая $\mathfrak{F}$ -субабнормальная подгруппа группы G содержит, по крайней мере, один $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализатор группы G ;
- 2) всякая $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы G содержит, по крайней мере, один $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализатор группы G ;
- 3) каждый $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализатор группы G содержится, по крайней мере, в одной $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппе группы G .

В теореме 2.6.2 установлено, при каких условиях множество $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторов группы совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгрупп.

ТЕОРЕМА 2.6.2. Пусть $\mathfrak{F}$ ω -локальная формация, $G^{\mathfrak{F}}$ nilпотентная ω -подгруппа группы G . Тогда множество всех $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторов груп-

ны G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгрупп.

В теореме 2.6.3 для ω -локальных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ получен результат, характеризующий влияние совпадения множества всех $\mathfrak{F}_1^\omega$ -покрывающих подгрупп группы G со множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^\omega$ -покрывающих подгрупп на совпадение множества всех $\mathfrak{F}_1^\omega$ -нормализаторов группы G со множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^\omega$ -нормализаторов.

Отметим, что из теоремы 2.6.1 следует результат Л.А. Шеметкова ([15], теорема 21.8). В качестве следствий из теоремы 2.6.2 получаются результаты Л.А. Шеметкова ([14], см. также [15], следствие 21.5.2) и Картера и Хоукса ([22], теорема 5.6).

Основные теоремы 2.1.1, 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4, 2.3.7, 2.5.1, 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1 - 2.6.3 главы 2 опубликованы в совместных работах [56], [57] (соавтор В.А. Ведерников). Все перечисленные теоремы принадлежат диссертанту, при этом идеи и методы доказательств обсуждались и согласовывались с В.А. Ведерниковым.

Глава 3 посвящена применению ω -верных формаций к изучению подформационного строения формаций конечных групп в рамках исследования $\mathfrak{H}_\theta$ -критических формаций. В данной главе решена Проблема (С) для n -кратно ω -верных и τ -замкнутых ω -верных формаций.

Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_\theta$ -критической формацией (или, иначе, минимальной не $\mathfrak{H}$ θ -формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные θ -подформации из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся, где $\mathfrak{H}$ некоторый класс групп, θ совокупность формаций, $\mathfrak{F} \in \theta$ (см., например, [7], [16]). $\mathfrak{H}_\theta$ -критическую формацию в случае, когда θ совокупность всех n -кратно ω -верных формаций с направлением δ , называем $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$ -критической формацией. В случае, когда $n = 1$, $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$ -критическую формацию называем $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критической формацией. В § 3.1 и § 3.2 изучаются n -кратно ω -верные формации. В теоремах 3.1.1 и 3.1.2 решается Проблема (С) для n -кратно ω -верных формаций с br -направлением.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ br -направление ω -верной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ ω -верная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω -спутником h , $\mathfrak{F}$ n -кратно ω -верная формация с направлением δ и минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$ -спутником f . Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$ -критической, то $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$, где G группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^\delta$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$ -критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$ -критической формацией.

ТЕОРЕМА 3.1.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ br -направление ω -верной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ n -кратно ω -верная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω -спутником h , $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$ формация с минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$ -спутником f , где G монолитическая группа с монолитом $P = G^\delta$ таким, что если $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и фор-

мация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$ -критической, а если $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$ -критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$ -критической.

Всякое br -направление ω -всерной формации является br -направлением, обратное неверно. Поэтому в § 3.1 отдельно рассмотрены критические n -кратно ω -всерные формации с br -направлением $\delta \leq \delta_3$. В § 3.2 изучены критические n -кратно ω -всерные формации в случае, когда $n = 1$.

Все основные результаты параграфов 3.1 и 3.2 опубликованы в совместных работах [47], [48] (соавтор М.А. Корпачева). Основные теоремы 3.1.1, 3.1.2 главы 3 принадлежат М.М. Сорокиной. В [42], [59], [70] исследовались различные виды критических ω -всерных и всерных формаций.

В § 3.3 и § 3.4 изучаются τ -замкнутые ω -всерные формации, где τ подгрупповой функтор, т.е. отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию $(\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α каждой группы G (см., например, [2]). Формация $\mathfrak{F}$ называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ [10]; ω -спутник ω -всерной формации называем τ -замкнутым, если все его значения являются τ -замкнутыми формациями. В теоремах 3.4.1 и 3.4.2 решается Проблема (C) для τ -замкнутых ω -всерных формаций с br -направлением.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть δ — br -направление ω -всерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ — τ -замкнутая ω -всерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω -спутником h , $\mathfrak{F}$ — τ -замкнутая ω -всерная формация с направлением δ и минимальным τ -замкнутым ω -спутником f . Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$ -критической, то $\mathfrak{F} = \tau\omega F(G, \delta)$, где G — монолитическая группа с монолитом $P = G^\delta$, причем, если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$ -критической формацией.

ТЕОРЕМА 3.4.2. Пусть δ — br -направление ω -всерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ — регулярный δ -радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ — τ -замкнутая ω -всерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω -спутником h , $\mathfrak{F} = \tau\omega F(G, \delta)$ — формация с минимальным τ -замкнутым ω -спутником f , где G — монолитическая группа с монолитом $P = G^\delta$, причем, если $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$ -критической, а если $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$ -критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$ -критической.

Из теорем 3.4.1 и 3.4.2 непосредственно вытекают результаты для критических τ -замкнутых ω -локальных, ω -специальных и ω -центральных формаций.

Все основные результаты параграфов 3.3 и 3.4 опубликованы в работах [49] (соавтор М.А. Корпачева) и [54]. Основные теоремы 3.4.1, 3.4.2 главы 3 принадлежат М.М. Сорокиной. В [65], [66] исследовались различные виды критических τ -замкнутых ω -всерных формаций. Применение методов теории подгрупповых функторов к исследованию τ -замкнутых формаций изучалось в [53], [63].

Глава 4 диссертации посвящена разработке теории Ω -расслоенных формаций конечных групп (Задача (D2)) и ее применению к изучению подформационного строения формаций. Целью главы является также решение Проблемы (C) для τ -замкнутых Ω -расслоенных формаций.

В § 4.1 разработаны основные положения теории Ω -расслоенных формаций конечных групп. Пусть $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$, $g : \mathcal{I} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ ΩF -функция, F -функция и FR -функция соответственно. Функции f , g и φ принимают одинаковые значения на изоморфных группах из области определения. Формацию $\Omega F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{E} | G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$ называем Ω -расслоенной формацией с направлением φ и Ω -спутником f . Формацию $F(g, \varphi) = (G \in \mathfrak{E} | G/G_{\varphi(A)} \in g(A) \text{ для всех } A \in K(G))$ называем расслоенной формацией с направлением φ и спутником g . Одним из важных видов Ω -расслоенных формаций являются Ω -свободные формации. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi_0)$ называем Ω -свободной формацией, где $\varphi_0(A) = \mathfrak{E}_A$ для любого $A \in \mathcal{I}$. Роль Ω -свободных формаций раскрывается в теореме 4.1.1.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая несдвинутая формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω -свободной формацией.

Связь между Ω -расслоенными и расслоенными формациями устанавливает

ТЕОРЕМА 4.1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая несдвинутая формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной с направлением φ и Ω -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — расслоенная формация с направлением φ спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \emptyset$ для всех $A \in \mathcal{I} \setminus \Omega$.

Одним из видов Ω -расслоенных формаций являются хорошо известные Ω -композиционные формации. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi'_2)$ называем Ω -канонической формацией, где $\varphi'_2(A) = \mathfrak{E}_{A'} \cdot \mathfrak{E}_A$ для любого $A \in \mathcal{I}$. В.А. Ведерников в [40] ввел в рассмотрение Ω -биканонические формации. Для направлений $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3$ соответственно Ω -свободной, Ω -биканонической и Ω -композиционной формаций справедливо соотношение $\varphi_0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3$. Направление φ Ω -расслоенной формации называем *правильным* или, коротко, *r -направлением*, если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'} \cdot \varphi(A)$ для любого $A \in \mathcal{I}$. В.А. Ведерниковым в [40] введены в рассмотрение такие виды направлений Ω -расслоенной

формации, как α -направление, b -направление, b_A -направлением, где $A \in \mathcal{I}$, n -направление. Для Ω -расслоенных формаций с r -направлением справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1.3. Пусть φ — r -направление Ω -расслоенной формации. Если $\mathfrak{F}$ — расслоенная формация с направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной с направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathcal{I}$.

В данном параграфе рассматриваются некоторые важные виды Ω -спутников Ω -расслоенной формации. В теореме 4.1.5 установлено существование единственного минимального Ω -спутника Ω -расслоенной формации с направлением φ , удовлетворяющим условию $\varphi_0 \leq \varphi$, а также получено описание его строения. Используя описание строения минимального Ω -спутника Ω -расслоенной формации, получены свойства Ω -расслоенных формаций.

ТЕОРЕМА 4.1.6. Пусть φ — nr -направление Ω -расслоенной формации. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω -расслоенной с направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p) -расслоенной формацией с направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

В теореме 4.1.7 получено описание строения максимального полувнутреннего Ω -спутника Ω -расслоенной формации с $b_A r$ -направлением, где $A \in \Omega$.

ТЕОРЕМА 4.1.7. Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω -расслоенная формация с $b_A r$ -направлением φ , где $A \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным полувнутренним Ω -спутником f , удовлетворяющим условию: если $f(A) \neq \mathfrak{E}$, то $f(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$, где h — произвольный полувнутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Основные теоремы 4.1.1–4.1.3, 4.1.5, 4.1.6 главы 4 опубликованы в совместной работе [43] (соавтор В.А. Ведерников) в неразделимом соавторстве; теорема 4.1.7 опубликована автором в [52].

В § 4.2 изучаются максимальные подформации Ω -расслоенных формаций, а именно, устанавливаются условия, при которых однопорожденная Ω -расслоенная формация имеет единственную максимальную Ω -расслоенную подформацию. Одним из центральных результатов здесь является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть φ — br -направление Ω -расслоенной формации такое, что $\varphi \leq \varphi_3$, $G = [P]H$ — монолитическая группа с монолитом P , где $P = C_G(P)$ — p -группа, $Z_p \in \Omega$, H — f -базисная группа и $\mathfrak{M}$ — максимальная подформация из $\text{form } H$. Тогда Ω -расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$ обладает единственной максимальной Ω -расслоенной подформацией с направлением φ и Ω -спутником h , имеющим следующее строение: $h(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$, $h(Z_p) = \mathfrak{M}$, $h(A) = \text{form}(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (Z_p)$, $h(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$.

Все основные результаты параграфа 4.2 опубликованы в совместной

работе [46] (соавтор М.А. Корпачева). Теорема 4.2.1 принадлежит М.М. Сорокиной.

В § 4.3 и § 4.4 изучаются τ -замкнутые Ω -расслоенные формации, где τ — подгрупповой функтор. В § 4.3 представлены свойства τ -замкнутых Ω -расслоенных формаций. Одним из центральных результатов здесь является теорема 4.3.1, устанавливающая взаимосвязь между τ -замкнутостью Ω -расслоенной формации и τ -замкнутостью ее Ω -спутника. Все основные результаты параграфа 4.3 опубликованы в [51], [64]. Теорема 4.3.1 принадлежит диссертанту.

В § 4.4 изучаются критические τ -замкнутые Ω -расслоенные формации. В теоремах 4.4.1 и 4.4.2 решается Проблема (С) для τ -замкнутых Ω -расслоенных формаций с br -направлением.

ТЕОРЕМА 4.4.1. Пусть φ — br -направление Ω -расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, τ — регулярный $\Omega\varphi$ -радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ — τ -замкнутая Ω -расслоенная формация с направлением φ и максимальным внутренним Ω -спутником h , $\mathfrak{F}$ — τ -замкнутая Ω -расслоенная формация с направлением φ и минимальным τ -замкнутым Ω -спутником f . Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$ -критической, то $\mathfrak{F} = \tau\Omega F(G, \varphi)$, где G — монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом $P = G^\Omega$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то формация $f(A)$ является $h(A)_{\tau}$ -критической для $A \in K(P)$, а если $K(P) \not\subseteq \Omega$, то $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_{\tau}$ -критической формацией.

ТЕОРЕМА 4.4.2. Пусть φ — br -направление Ω -расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, τ — регулярный $\Omega\varphi$ -радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ — τ -замкнутая Ω -расслоенная формация с направлением φ и максимальным внутренним Ω -спутником h , $\mathfrak{F} = \tau\Omega F(G, \varphi)$ — τ -замкнутая Ω -расслоенная формация с минимальным τ -замкнутым Ω -спутником f , где G — монолитическая группа с монолитом $P = G^\Omega$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(A)$ является $h(A)_{\tau}$ -критической для $A \in K(P)$, а если $K(P) \not\subseteq \Omega$, то $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_{\tau}$ -критической формацией. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$ -критической формацией.

Все основные результаты параграфа 4.4 опубликованы в совместной работе [51] (соавтор М.А. Корпачева). Основные теоремы 4.4.1, 4.4.2 главы 4 принадлежат М.М. Сорокиной. Первыми работами автора о критических Ω -расслоенных формациях являются работы [45], [58], опубликованные совместно с Н.В. Силенок. Позднее в серии работ (см., например, [46], [50]) автором совместно с М.А. Корпачевой исследовались критические Ω -расслоенные формации конечных групп различных направлений, а также критические Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп. Исследованию τ -замкнутых Ω -расслоенных формаций посвящены работы [61], [62].

Заключение

Выводы. В диссертации решены следующие задачи:

1. Решена (совместно с В.А. Ведерниковым) Проблема (А) (проблема Виландта [41]) о дополняемости в конечной группе $\mathfrak{F}$ -корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп для ω -локальной (локальной) формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.
2. Решена Проблема (В) (проблема Дерка и Хоукса [23]) о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса всех конечных разрешимых групп.
3. Решена Проблема (С) (проблема Л.А. Шеметкова [16]) изучения $\mathfrak{H}$ -критических формаций для n -кратно ω -всерных, τ -замкнутых ω -всерных, τ -замкнутых Ω -расслоенных формаций.
4. Разработаны (совместно с В.А. Ведерниковым) теории ω -всерных и Ω -расслоенных формаций конечных групп (решение Задачи (D)).
5. Построена теория $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ произвольная ω -локальная формация (решение Задачи (E)).

Я выражаю сердечную благодарность своему учителю доктору физико-математических наук, профессору Виктору Александровичу Ведерникову. Я глубоко признательна Виктору Александровичу за ценные идеи, реализованные в диссертации, за постоянную поддержку и неизменное внимание к моей работе.

Я благодарна моим коллегам по кафедре алгебры и геометрии Брянского государственного университета за помощь и полезные советы в процессе подготовки диссертации.

Выражаю искреннюю благодарность д.ф.-м.н. В.А. Аргамонову, д.ф.-м.н. А.А. Махневу, д.ф.-м.н. В.С. Монахову, д.ф.-м.н. А.Н. Скибе за поддержку, ценные замечания и рекомендации. Я благодарна всем участникам научно-исследовательского семинара кафедры Высшей алгебры МГУ, семинара "Алгебра и логика" ИМ СО РАН, научно-исследовательского семинара отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, Красноярского алгебраического семинара за доброжелательную атмосферу и полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Ведерников В.А.* О новых типах ω -всех формаций конечных групп // Укр. матем. конгресс 2001. Секція 1. Праці. Київ. 2002. - С. 36-45.
2. *Каморников С.Ф., Селькин М.В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 2003. - 254 с.
3. *Каморников С.Ф.* О дополнении корадикала конечной группы // Изв. Гомельского госун-та им. Ф. Скорины. 2013. № 6. - С. 17-23.
4. *Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л.* О существовании дополнений к корадикалам конечных групп // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. - С. 122-127.
5. *Сафонов В.Г.* О минимальныхкратно локальных не $\mathfrak{F}$ -образованиях конечных групп // Вопросы алгебры. - Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1995. Вып. 8. - С. 109-138.
6. *Селькин В.М., Скиба А.Н.* О наследственных критических формациях // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 5. - С. 1145-1153.
7. *Скиба А.Н.* О критических формациях // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1980. № 4. - С. 27-33.
8. *Скиба А.Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. Вып. 3. - С. 21-31.
9. *Скиба А.Н.* О критических формациях // Бесконечные группы и примык. алгебр. структуры. Киев: ИМ АН Украины, 1993. - С. 258-268.
10. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997. - 240 с.
11. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. - С. 114-147.
12. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Частично композиционные формации конечных групп // Доклады НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 4. - С. 5-8.
13. *Шеметков Л.А.* Ступенчатые формации групп // Матем. сборник. 1974. Т. 94. № 4. - С. 628-648.
14. *Шеметков Л.А.* Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. - С. 684-715.
15. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. - 272 с.
16. *Шеметков Л.А.* Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюз. Симпозиума по теории групп. Киев: Наукова думка, 1980. - С. 37-50.

17. *Шеметков Л.А.* О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 2. С. 101 103.
18. *Шмизурев Э.Ф.* О некоторых вопросах теории формаций // В кн.: Конечные группы. Мн.: Наука и техника, 1975. - С. 213 225.
19. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115 187.
20. *Carter R.* Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. P. 507 528.
21. *Carter R.* Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. 1961. V. 75. P. 136 139.
22. *Carter R., Hawkes T.* The $\mathfrak{F}$ -normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5. N 2. P. 175 201.
23. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin New York, 1992. 891 с.
24. *Erickson R.* Projectors of finite groups // Comm. Algebra. 1982. V. 10. P. 1919 1938.
25. *Förster P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschützklassen // Math. Z. 1984. V. 186. P. 249 278.
26. *Gaschütz W.* Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1952. V. 190. P. 93 107.
27. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80. N 4. P. 300 305.
28. *Gaschütz W.* Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups - Canberra: Notes on Pure Mathematics 11, Austr. Nat. Univ., 1979. 98 p.
29. *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. P. 98 105.
30. *Hall P.* On the Sylow system of a soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. P. 316 323.
31. *Hall P.* On the system normalizers of a soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. P. 507 528.
32. *Hall P.* The construction of soluble groups // J. Reine Angew. Math. 1940. V. 182. P. 206 214.
33. *Hawkes T.* On formation subgroups of finite soluble group // J. London Math. Soc. 1968. V. 44. N 2. P. 243 250.

34. *Huppert B.* Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen // *Acta Sci. Math.* 1961. V. 22. P. 46 61.
35. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 1967. 793 p.
36. *Mann A.* $\mathfrak{S}$ -normalizers of a finite solvable groups // *J. Algebra.* 1970. V. 14. N 3. P. 312 325.
37. *Schmid P.* Lokale Formationen endlicher Gruppen // *Math. Z.* 1974. V. 137. N 1. P. 31 48.
38. *Schunck H.* $\mathfrak{S}$ -Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // *Math. Z.* 1967. V. 97. N 4. P. 326 330.
39. *Shemetkov L.A.* On partially saturated formations and residuals of finite groups // *Commun. Algebra.* 2001. V. 29. N 9. P. 4125 4137.
40. *Vedernikov V.A.* Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes // *Proc. of the Steklov Institute of Math.* 2001. V. 2. P. 217 233.
41. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // *roc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958.* London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268 278. (Пер. на рус. яз.: Пути развития структурной теории конечных групп // *Межд. мат. конгресс в Эдинбурге, 1958 г. (обзорн. докл.).* М.: Физматгиз, 1962. С. 263 276).

**Работы автора по теме диссертации,
опубликованные в изданиях из перечня ВАК**

42. *Сорокина М.М.* О композиционных и локальных критических формациях // *Известия вузов. Математика.* 2000. № 7. С. 1 8.
43. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // *Дискретная математика.* 2001. Т. 13. № 3. С. 125 144.
44. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* ω -всеерные формации и классы Фиттинга конечных групп // *Матем. заметки.* 2002. Т. 71. № 1. С. 43 60.
45. *Сорокина М.М., Силасюк Н.В.* Критические Ω -расслоенные формации конечных групп // *Матем. заметки.* 2002. Т. 72. № 2. С. 269 282.
46. *Сорокина М.М., Корначева М.А.* О критических Ω -расслоенных формациях конечных групп // *Дискретная математика.* 2006. Т. 18. № 1. С. 106 115.
47. *Корначева М.А., Сорокина М.М.* О критических ω -всеерных формациях конечных групп // *Матем. заметки.* 2006. Т. 79. № 1. С. 87 94.

48. *Сорокина М.М., Корпачева М.А.* Критические n -кратно ω -всеерные формации конечных групп // Вестник Брянского гос. ун-та. 2010. № 4. С. 47–52.
49. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические ω -всеерные τ -замкнутые формации конечных групп // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 1. С. 94–101.
50. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические Ω -канонические формации мультиоператорных T -групп // Вестник Брянского гос. ун-та: Точные и естеств. науки. 2011. № 4. С. 18–21.
51. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические Ω -расслоенные τ -замкнутые формации конечных групп // Вестник Брянского гос. ун-та: Точные и естеств. науки. 2012. № 4. С. 75–79.
52. *Сорокина М.М.* Полувнутренние Ω -спутники Ω -расслоенных формаций конечных групп // Вестник Брянского гос. ун-та: Точные и естеств. науки. 2013. № 4. С. 46–48.
53. *Каморников С.Ф., Сорокина М.М.* О дополняемости элементов решетки разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов // Вестник Брянского гос. ун-та: Точные и естеств. науки. 2014. № 4. С. 9–14.
54. *Сорокина М.М.* τ -минимальные не $\mathfrak{F}$ -группы для ω -всеерных формаций и классов Фиттинга // Вестник Брянского гос. ун-та. 2015. № 3(26). С. 420–422.
55. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* О дополнениях к корадикалам конечных групп // Матем. сборник. 2016. Т. 207. № 6. С. 27–52.
56. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}$ -проекторы и $\mathfrak{F}$ -покрывающие подгруппы конечных групп // Сиб. матем. ж. 2016. Т. 57. № 6. С. 1224–1239.
57. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторы конечных групп // Сиб. матем. ж. 2017. Т. 58. № 1. С. 64–82.

Прочие работы автора по теме диссертации

58. *Сорокина М.М., Силенок Н.В.* Критические Ω -биканонические нормально наследственные формации конечных групп // Изв. Гомельского гос. ун-та, № 5 (14), Вопросы алгебры 18, 2002. С. 125–133.
59. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Минимальные ω -специальные не $\mathfrak{F}$ -формации // Вестник Брянского гос. ун-та. 2003. № 2. С. 144–148.

60. *Сорокина М.М., Котлярова М.В.* ω -центральные формации конечных групп // Вестник Брянского гос. ун-та. 2004. № 3. С. 112–115.
61. *Сорокина М.М., Корпачева М.А.* О τ -замкнутости классов групп // Вестник Брянского гос. ун-та. 2005. № 4. С. 192–194.
62. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О максимальных τ -замкнутых подформациях τ -замкнутых формаций // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. С. 36–41.
63. *Сорокина М.М., Сизоненко С.М., Симохина А.П.* О подгрупповых функторах // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. С. 96–100.
64. *Петрушин П.В., Сорокина М.М.* О τ -минимальных не $\mathfrak{F}$ -группах для Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}$ [Электронный ресурс] // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2016. № 1. С. 36–41. Режим доступа: <http://scim-brgu.ru/wp-content/arhiv/UZ-2016-N1.pdf>.
65. *Сорокина М.М.* Критические τ -замкнутые n -кратно ω -специальные формации конечных групп // Межд. периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science». Будапешт, 2013. V. 8. С. 71–75.
66. *Сорокина М.М., Петрушин П.В., Макушкин Р.А.* О τ -замкнутых n -кратно ω -центральных и n -кратно Ω -композиционных формациях конечных групп // Межд. периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», II(4) Issue 32. Будапешт, 2014. С. 48–51.
67. *Сорокина М.М., Макушкин Р.А.* О максимальном полувнутреннем ω -спутнике ω -всеерной формации конечных групп // Межд. периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», III(8) Issue 73. Будапешт, 2015. С. 75–78.
68. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт: Брянск, БГПУ. 1999. № 5. – 25 с.
69. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* ω -всеерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт: Брянск, БГПУ. 1999. № 6. – 23 с.
70. *Сорокина М.М.* О критических ω -всеерных формациях конечных групп // Препринт: Брянск, БГУ, 2009. № 10. – 12 с.
71. *Vedernikov V.A., Sorokina M.M.* On $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of finite groups // Межд. конф. «Алгебра и логика: теория и приложения»: тез. докл. Красноярск: СФУ, 2016. С. 122–123.

72. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}^\omega$ -нормализаторы и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающие подгруппы конечных групп // Межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии: тез. докл. Казань: КФУ, 2016. - С. 125-126.
73. *Vedernikov V.A., Sorokina M.M.* On properties of $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of finite groups // Межд. научн. конф. "Акт. проблемы прикл. математики и физики": тез. докл. Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2017. - С. 262-263.
74. *Sorokina M.M., Vedernikov V.A.* On the $\mathfrak{F}$ -coradicals of finite groups // Groups and Graphs, Metrics and Manifolds, 2017: Abstracts of the Intern. Conf. and PhD-Master Summer School. Yekaterinburg: UrFU, 2017. - P. 97.

