

Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования
“Сколковский институт науки и технологий”

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”

На правах рукописи

Илья Вильковиский

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СТРУКТУРЫ АФФИННОГО ЯНГИАНА

*Резюме диссертации на соискание учёной степени
кандидата математических наук в НИУ ВШЭ
и степени PhD в области "Математика и механика" в Сколтехе*

Научные руководители:
кандидат физико-математических наук,
доцент Литвинов Алексей Викторович;
доктор физико-математических наук,
профессор Маршаков Андрей Владимирович

Введение

0.1 Интегрируемые теории поля, Интегрируемые структуры конформной теории поля

Как было отмечено Замолотчиковым [Zam89] существует связь между интегрируемыми и конформными теориями поля. А именно ультрафиолетовый (УФ) предел интегрируемой теорией поля описывается некоторой конформной теорией поля. В этом пределе бесконечная серия Интегралов Движения $\mathbf{I}_s(\lambda)$ разваливается на два независимых семейства киральных интегралов движения, каждое из которых может быть описано в терминах соответствующей конформной теории поля.

$$\mathbf{I}_s(\lambda) = \mathbf{I}_s + O(\lambda), \quad \mathbf{I}_{-s}(\lambda) = \bar{\mathbf{I}}_s + O(\lambda),$$

здесь λ - масштабный параметр, который обращается в 0 в УФ пределе. Интегралы Движения $\mathbf{I}_s$ и $\bar{\mathbf{I}}_s$ действуют в пространствах голоморфных и антиголоморфных полей соответственно. Более нетривиальное наблюдение состоит в том, что часто массивная интегрируемая теория поля может быть восстановлена из конформной интегрируемой системы [Zam89]. Интегрируемые системы в конформных теориях поля намного проще, чем исходные массивные интегрируемые теории поля, так что их изучение является хорошей стартовой точкой для понимания пространства массивных интегрируемых квантовых теорий поля (КТП). В частности, интегрируемые структуры конформной теории поля были использованы в статьях [Lit19], [LV20] для получения новых интегрируемых теорий типа Тоды и обнаружения дуальности между ними и интегрируемыми сигма моделями.

Очередной прогресс был достигнут с появлением соответствия между Обыкновенными Дифференциальными Уравнениями и Интегрируемыми Моделями (ОДЕ/ИМ) [DT99a, BLZ01, DT99b]. Используя этот подход и богатую аналитическую интуицию, Бажанов, Лукьянов и Замолотчиков (БЛЗ) [BLZ04] предоставили систему алгебраических уравнений для спектра локальных Интегралов Движения. Позже эти уравнения были обобщены на случай модели Фатеева и квантовой АKNС модели (см [KL20] для обзора всех известных примеров). Несмотря на большой прогресс программы БЛЗ, происхождение и возможность обобщения уравнений из [BLZ04] остаётся не ясным.

В данной диссертации мы разрабатываем параллельный подход, основанный на симметрии аффинного Янгиана. Преимуществом данного метода является то, что он вписывается в общую концепцию метода квантовой обратной задачи, что позволяет рассматривать множество интегрируемых структур единообразно, а так же даёт вывод уравнений анзаца Бете для спектра Интегралов Движения. Изначально аффинный Янгиан был введён с помощью геометрического подхода [Var00, Nak01, MO19], тем не менее он может быть определён алгебраически в терминах конформной теории поля¹. В статье [LV20], мы изучали интегрируемые структуры конформных теорий поля, используя алгебраическое определение аффинного Янгиана $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}(1))$ [Tsy17]. Данные интегрируемые структуры известны под названием квантовых ILW иерархий. Они описыва-

¹Современный обзор геометрического подхода содержится в курсе лекций А.Окунькова sites.google.com/view/andrei-okounkov-lecture-course/home.

ют коммутативную подалгебру в W алгебрах типа A_n , а также их супер-алгебраических обобщениях, и являются однопараметрической (твист) деформацией квантовых иерархий Гельфанда-Дикого. Также мы смогли обобщить наши методы на случай W алгебр типа BCD, соответствующие интегрируемые структуры могут быть отождествлены со "спиновыми цепочками" аффинного Янгиана с некоторыми граничными условиями [LV21].

Аффинный $\hat{\mathfrak{gl}}(1)$ Янгиан имеет два разных описания:

- токовая реализация, которая полезна для изучения векторов Бете и спектра интегралов движения;
- реализация Шевалле в терминах генераторов $W_{1+\infty}$ алгебры, которая более полезна для изучения локальных Интегралов Движения.

Для прояснения структуры W алгебры, часто бывает полезно изучить её q -деформированную версию. q -деформация W алгебр была введена в статье [AKOS96] для W алгебр типа A, и в статье [FR97] для полупростых алгебр Ли. q -деформированные Интегралы Движения для W алгебр типа A были построены в статьях [KOJ06], [FJM17]. В третьей главе диссертации мы сделаем обзор q -деформированных W алгебр, определённых как централизатор системы скринингов, и предоставим конструкцию для q -деформированных локальных Интегралов Движения произвольно высокого спина в случае W алгебр типа B, C, D.

Киральные Интегралы Движения, пример. Для того чтобы проиллюстрируем идеи изложенные выше, рассмотрим пример классической модели синус-Гордон, живущей на цилиндре длины $L = 2\pi$ и определённой действием:

$$S = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\partial_z \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi) + \lambda \cosh(2b\varphi) \right) d^2 z, \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ - комплексные координаты.

Данная теория является интегрируемой, что означает наличие бесконечного числа интегралов движения:

$$\partial_{\bar{z}} T_{s+1} = \lambda \partial_z \Theta_{s-1}, \quad \partial_z T_{-s-1} = \lambda \partial_{\bar{z}} \Theta_{-s+1}, \quad s \geq 1$$

$$\mathbf{I}_s(\lambda) = \int \frac{dx}{2\pi} (T_{s+1} - \lambda \Theta_{s-1}).$$

Классический предел первых нескольких интегралов движения имеет явный вид:

$$T_2 = (\partial_z \varphi)^2, \quad \Theta_0 = 2\pi \lambda \cosh(2b\varphi) \quad (2)$$

$$T_4 = (\partial_z \varphi)^4 + b^{-2} (\partial_z^2 \varphi)^2, \quad \Theta_2 = 4\pi \lambda (\partial_z \varphi)^2 \cosh(2b\varphi), \quad (3)$$

Легко заметить, что Θ_s члены зануляются в УФ пределе ($\lambda \rightarrow 0$), и мы получаем две копии независимых киральных интегралов движения $\mathbf{I}_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_s(0)$. Можно проверить, что киральные Интегралы Движения могут быть выделены условием Пуассоновой коммутативности со скринингами

$$\{\mathbf{I}_s, \mathcal{S}_i\} = 0,$$

где

$$\mathcal{S}_1 = \oint e^{2b\varphi(z)} \frac{dz}{2\pi}, \quad \mathcal{S}_2 = \oint e^{-2b\varphi(z)} \frac{dz}{2\pi}.$$

Оказывается, что квантование киральных Интегралов Движения может быть построено явно. Следуя оригинальным идеям Замолотчикова [Zam89], развитых в [LF91] и [FF96], мы постулируем следующие формулы для квантовых версий киральных Интегралов Движения²:

$$[\mathbf{I}_s, \mathcal{S}_i] = 0, \quad (4)$$

²Строго говоря, коммутатор в левой части уравнения не определён, так как контур интегрирования замыкается только при специальных значениях нулевой моды поля $\varphi(z)$. Мы, тем не менее допускаем эту неточность, но даём более аккуратное определение Интеграла Движения ниже (см (6), (7)).

где

$$\mathcal{S}_1 = \oint e^{2b\varphi(z)} \frac{dz}{2\pi}, \quad \mathcal{S}_2 = \oint e^{-2b\varphi(z)} \frac{dz}{2\pi}.$$

Подчеркнём, что аккуратное квантование и определение Интегралов Движения в массивной интегрируемой модели с ненулевой константой λ является намного более сложной задачей, выходящей за рамки данной диссертации.

Более точно мы будем работать в картине вторичного квантования, так что $\varphi(z)$ является свободным бозонным полем:

$$\partial\varphi(z) = u + \sum_{n \neq 0} a_n e^{inz}, \quad [a_n, a_m] = \frac{m}{2} \delta_{m, -n}. \quad (5)$$

Будем говорить, что данное поле φ действует в Фоковском пространстве $\mathcal{F}_u$:

$$\begin{aligned} F_u &= \{\mathbf{C}[a_{-1}, a_{-2}, \dots]|\emptyset\rangle\}, \\ a_n|\emptyset\rangle &= 0, \text{ для } n > 0, \\ a_0|\emptyset\rangle &= u. \end{aligned}$$

Мы будем искать Интегралы Движения фиксированного спина s в виде интегралов от локальных плотностей $\mathbf{I}_s = \int_0^{2\pi} G_{s+1}(\partial\varphi(z), \partial^2\varphi(z), \dots) \frac{dz}{2\pi}$, последние мы будем искать в виде полиномов от поля $\partial\varphi(z)$ и его производных. После введения двух вертексных операторов $V_{\pm}(z) = e^{\pm 2b\varphi(z)}$ уравнения (4) могут быть переписаны в виде условий на коэффициенты в операторном разложении:

$$V_{\pm}(w)G_{s+1}(z) = \text{reg} + \frac{\partial X_s^{(1)}(z)}{z-w} + \sum_{k \geq 2} \frac{X_s^{(k)}(z)}{(z-w)^k}, \quad (6)$$

или что тоже самое:

$$\oint_z V_{\pm}(w)G_{s+1}(z) \frac{dw}{2\pi} = \partial X_s^{(1)}(z), \quad (7)$$

здесь $X_s^{(k)}(z)$ - некоторое локальное поле. Тогда система уравнений (4) превращается в линейную систему уравнений на коэффициенты входящие в плотность G_{s+1} . Прямое вычисление для первых нескольких интегралов движения даёт:

$$\begin{aligned} G_2 &=: (\partial_z \varphi(z))^2 : \\ G_4 &=: (\partial_z \varphi)^4 : + (Q^2 + 1) : (\partial_z^2 \varphi)^2 : \\ G_6 &=: (\partial_z \varphi)^6 : - \frac{5}{8} : (\partial \varphi)^4 : + 5(Q^2 + 2) \left(: (\partial_z^2 \varphi)^2 \partial_z \varphi^2 : - \frac{1}{24} : (\partial^2 \varphi)^2 : \right) + \left(Q^4 + \frac{8}{3} Q^2 + \frac{19}{12} \right) : (\partial^2 \varphi)^2 : \\ G_8 &= \left(: (\partial_z \varphi)^8 : + \dots \right), \end{aligned}$$

здесь $Q = b + \frac{1}{b}$, и " : : " обозначает обыкновенное Виковское упорядочение.

Оператор I_1 играет роль оператора градуировки и очевидным образом коммутирует с I_3 и I_5 , коммутативность последних двух операторов между собой $[I_3, I_5] = 0$ является не тривиальной проверкой описанной конструкции. Можно заметить, что полученные плотности совпадают с операторами T_s (2),(3) полученными в классическом пределе $b \rightarrow \infty$.

Более общо рассмотрим тензорное произведение Фоковских пространств $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{u_n}$ и соответствующее n -компонентное бозонное поле $\varphi(z) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ³:

$$\partial\varphi_j(z) = u_j + \sum_{n \neq 0} a_n^{(j)} e^{inz}, \quad [a_n^i, a_m^j] = m \delta_{i,j} \delta_{m, -n},$$

³Отметим, что коммутационные соотношения бозонных мод $a_n^{(i)}$ отличаются на фактор 2 от рассмотренных выше в случае одного бозонного поля (5). Причина этого в том, что модель синус-Гордона является A_2 Тодой, но в действии (1) мы опустили независимую $U(1)$ моду $U = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ и определили бозонное поле $\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$.

и аффинную систему скринингов построенную по аффинной алгебре Ли $\hat{\mathfrak{g}}$.

$$\mathcal{S}_r = \oint e^{b(\alpha_r \cdot \varphi(z))} \frac{dz}{2\pi},$$

где α_r - имеют скалярные произведения в соответствии с матрицей Картана аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$: $(\alpha_r \cdot \alpha_s) = c_{r,s}$. Мы снова будем искать Интегралы Движения как централизатор аффинной системы скринингов [FF95]:

$$[\mathbf{I}_s, \mathcal{S}_r] = 0.$$

В данной диссертации мы детально рассмотрим случаи $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathbf{A}}_n$ и $\hat{\mathfrak{g}}_n = \hat{\mathbf{B}}_n, \hat{\mathbf{C}}_n, \hat{\mathbf{D}}_n$. Существование оператора градуировки $\mathbf{I}_1$ среди Интегралов Движения позволяет ограничить их на конечномерное подпространство $\mathbf{I}_1 = N$. Тем не менее полная диагонализация Интегралов Движения является нетривиальной задачей. Для решения этой задачи мы отождествим эти интегрируемые системы со "спиновыми цепочками" аффинного Янгиана, после чего применим к ним мощный метод алгебраического анзаца Бете.

0.2 Основные результаты

Основные результаты глав 1 и 2 - это явные формулы для уравнений и векторов Бете, которые решают задачу нахождения точных волновых функций киральных интегрируемых систем полученных в ультрафиолетовом (УФ) пределе интегрируемых теорий поля типа Тоды.

- В случае теорий типа A_n мы докажем уравнения анзаца Бете для спектра локальных Интегралов движения (1.13) и Интегралов Движения Книжника - Замолодчикова (1.66):

$$q \prod_{j \neq i} \prod_{\alpha=1}^3 \frac{x_i - x_j - \epsilon_\alpha}{x_i - x_j + \epsilon_\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{x_i - u_k + \epsilon_3}{x_i - u_k} = 1 \quad \text{для } i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

здесь мы используем Некрасовские эпсилон обозначения $\epsilon_1 \sim b^{-1}, \epsilon_2 \sim b, \epsilon_3 \sim -Q$, для более детального обсуждения см формулу (1.38). Соответствующие вектора Бете даются формулой (1.83).

- В случае теорий типа BCD мы выводим уравнения анзаца Бете для спектра локальных Интегралов Движения (2.1), (2.5) и Интегралов Движения Книжника - Замолодчикова (2.14):

$$r^\alpha(x_i) r^\beta(x_i) A(x_i) A^{-1}(-x_i) \prod_{j \neq i} G(x_i - x_j) G^{-1}(-x_i - x_j) = 1, \quad (9)$$

$$G(x) = \frac{(x - \epsilon_1)(x - \epsilon_2)(x - \epsilon_3)}{(x + \epsilon_1)(x + \epsilon_2)(x + \epsilon_3)}, \quad A(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - u_k + \frac{\epsilon_3}{2}}{x - u_k - \frac{\epsilon_3}{2}}, \quad r^\alpha(x) = -\frac{x + \epsilon_\alpha/2}{x - \epsilon_\alpha/2}.$$

Соответствующие вектора Бете даются формулой (2.25).

Другие важные результаты включают в себя:

- явный вывод токового описания (1.40) RLL алгебры определённой по R -матрице Маулика-Окунькова [MO19].
- три решения $\mathcal{K}^i$ (2.11)-(2.12) для Складчинского $KRK R$ уравнения с R -матрицей Маулика-Окунькова [MO19].

В главе (3) мы изучаем Интегралы Движения q -деформированных W алгебр.

- Мы предъявляем явные формулы для Интегралов Движения q -деформированных W алгебра BCD типа (3.59).
- Мы предъявляем q -деформированные аналоги операторов отражения R и K (3.62).

0.3 Обзор диссертации

В данном параграфе предоставлен краткий обзор диссертации, который содержит основные утверждения и идеи. Глава 1 посвящена изучению $\mathfrak{gl}_1$ аффинного Янгиана и соответствующих интегрируемых структур. Мы детально изучаем токовую реализацию RLL . Мы выводим локальные Интегралы Движения для W алгебр типа А (1.13), а также соответствующие уравнения Бете (1.81) на их спектр. В главе 2 мы вводим интегралы движения типа BCD (2.1), (2.5) и изучаем их спектр методами граничного анзаца Бете для аффинного Янгиана. Мы предъявляем три решения $K^{1,2,3}$ Складчинского $KRK R$ уравнения (2.11)-(2.12), а также уравнения анзаца Бете (2.27) на их спектр. В главе 3 мы изучаем q -деформацию локальных и Интегралов Движения Книжника - Замолотчикова. Мы предъявляем явные формулы для q -деформированных Интегралов Движения произвольно высокого спина (3.59) для случая q -деформированных W алгебр типа BCD.

W алгебры и R -матрица Маулика-Окунькова. В разделе 1.2 мы повторяем определение R -матрицы Маулика-Окунькова [MO19]. Она может быть определена как единственное (с точностью до нормировочного множителя) решение сплетающего уравнения:

$$\mathcal{R}_{i,j}(Q\partial - \partial\varphi_i)(Q\partial - \partial\varphi_j) = (Q\partial - \partial\varphi_j)(Q\partial - \partial\varphi_i)\mathcal{R}_{i,j}. \quad (10)$$

Произведение двух скобок задаёт преобразование Миуры-Гельфанда-Дикого [FL88, Luk88]. Перемножая скобки в разных порядках, мы получим две изоморфные, но неидентичные W алгебры

$$\begin{aligned} (Q\partial - \partial\varphi_j)(Q\partial - \partial\varphi_i) &= (Q\partial)^2 + W^{(1)}(z)(Q\partial) + W^{(2)}(z), \\ (Q\partial - \partial\varphi_i)(Q\partial - \partial\varphi_j) &= (Q\partial)^2 + \tilde{W}^{(1)}(z)(Q\partial) + \tilde{W}^{(2)}(z) \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{R}_{i,j}$ сплетает две W алгебры и действует в тензорном произведении двух Фоковских пространств со спектральными параметрами u_i и u_j

$$\mathcal{F}_{u_i} \otimes \mathcal{F}_{u_j} \xrightarrow{\mathcal{R}_{i,j}} \mathcal{F}_{u_j} \otimes \mathcal{F}_{u_i}.$$

Как обычно, сплетающий оператор зависит только от разности $u_i - u_j$. Рассмотрим далее W_3 алгебру, определённую с помощью произведения трёх Миуровских членов $(Q\partial - \partial\varphi_1)(Q\partial - \partial\varphi_2)(Q\partial - \partial\varphi_3)$. Пользуясь определением R -матрицы (10), мы немедленно обнаруживаем, что $\mathcal{R}_{i,j}(u_i - u_j)$ удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера

$$\mathcal{R}_{1,2}(u_1 - u_2)\mathcal{R}_{1,3}(u_1 - u_3)\mathcal{R}_{2,3}(u_2 - u_3) = \mathcal{R}_{2,3}(u_2 - u_3)\mathcal{R}_{1,3}(u_1 - u_3)\mathcal{R}_{1,2}(u_1 - u_2),$$

так что мы можем использовать всю мощь квантового метода обратной задачи.

ϵ - обозначения. Легко заметить, что квантовые интегралы движения зависят только от комбинации $Q = b + \frac{1}{b}$ и являются инвариантными при замене $b \rightarrow b^{-1}$. Как можно видеть, например, из [Tsy14], коммутационные соотношения аффинного Янгиана симметричны при перестановки всех трёх параметров b, b^{-1} и Q^4 . В дальнейшем нам будет удобно использовать Некрасовские ϵ обозначения вместо Лиувиллевских. Формально это достигается следующей заменой параметров:

$$b \rightarrow \frac{\epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}, \quad b^{-1} \rightarrow \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}, \quad Q \rightarrow -\frac{\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \implies \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0,$$

и сменой нормировки бозонных нулевых мод:

$$u_j \rightarrow -i \frac{u_j}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}.$$

Заметим, что без потери общности можно положить $\epsilon_1\epsilon_2 = 1$.

⁴В случае KDV и ILW интегрируемых систем эта симметрия нарушается выбором конкретного Фоковского представления.

Токовая реализация RLL алгебры. В разделе 1.3 мы определяем RLL алгебру:

$$\mathcal{R}_{ij}(u_i - u_j) \mathcal{L}_i(u_i) \mathcal{L}_j(u_j) = \mathcal{L}_j(u_j) \mathcal{L}_i(u_i) \mathcal{R}_{ij}(u_i - u_j). \quad (11)$$

Левая и правая часть данного уравнения действуют в тензорном произведении трёх пространств $\mathcal{F}_{u_i} \otimes \mathcal{F}_{u_j} \otimes \mathcal{F}_q$. Так что $\mathcal{R}_{ij}(u_i - u_j)$ действует в произведении $\mathcal{F}_{u_i} \otimes \mathcal{F}_{u_j}$, а $\mathcal{L}_i(u_i)$ действует в произведении $\mathcal{F}_{u_i} \otimes \mathcal{F}_q$. Таким образом RLL алгебра (11) представляет собой бесконечную серию квадратичных соотношений на матричные элементы L -оператора $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}(u)$, действующие в пространстве $\mathcal{F}_q$:

$$\mathcal{L}_{\lambda, \mu}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \langle u | a_{\lambda} \mathcal{L}(u) a_{-\mu} | u \rangle \quad \text{где} \quad a_{-\mu} | u \rangle = a_{-\mu_1} a_{-\mu_2} \dots | u \rangle.$$

Как известно, квадратичные RLL соотношения могут быть переписаны в эквивалентной форме токовых соотношений, см [DF93], где такой анализ проделан для квантовой группы $U_q(gl(n))$. В данной диссертации мы проделаем аналогичные вычисления для RLL алгебры построенной по R -матрица Маулика-Окунькова. Гипотеза состоит в том, что токовая реализация RLL алгебры после факторизации по бесконечномерному центру изоморфна аффинному Янгиану алгебры $\widehat{gl}(1)$ рассмотренному Цимбалюком в [Tsy17]. Мы будем называть RLL алгебру алгеброй Янга Бакстера и обозначать как $YB(\widehat{gl}(1))$. Обозначение $Y(\widehat{gl}(1))$ мы сохраним для аффинного Янгиана полученного Цымбалюком.

Наше вычисление аналогично проделанному в [DF93]. Определим три тока степени 0, 1 и -1 (см приложение A.2)

$$h(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{\emptyset, \emptyset}(u), \quad e(u) \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}(u) \cdot \mathcal{L}_{\emptyset, \square}(u) \quad \text{и} \quad f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{\square, \emptyset}(u) \cdot h^{-1}(u),$$

а так же вспомогательный ток (который, как мы увидим позже, (1.40a) принадлежит Картановской подалгебре алгебры $YB(\widehat{gl}(1))$)

$$\psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathcal{L}_{\square, \square}(u - Q) - \mathcal{L}_{\emptyset, \square}(u - Q) h^{-1}(u - Q) \mathcal{L}_{\square, \emptyset}(u - Q) \right) h^{-1}(u - Q). \quad (12)$$

Явное вычисление (проделанное в приложении A.2) позволяет переписать RLL коммутационные соотношения (11) через токи e, f, h, ψ . Результаты этого вычисления собраны в начале раздела 1.3.1. Нам так же важно существование обратного отображения, которое позволяет переписать $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}(u)$ оператор в терминах токов e, h, f . В частности

$$\mathcal{L}_{\lambda, \emptyset}(u) = \frac{1}{(2\pi i)^{|\lambda|}} \oint \dots \oint F_{\lambda}(z|u) h(u) f(z|_{\lambda}) \dots f(z_1) dz_1 \dots dz_{|\lambda|} \quad (13)$$

где $F_{\lambda}(z)$ некоторая конкретная функция и контуры проходят по часовой стрелке вокруг бесконечности и всех полюсов функции $F_{\lambda}(z)$. Эта формула и рекуррентное определение функции $F_{\lambda}(z)$ выводится в приложении A.3, см формулы (A.25), (A.27).

0.3.1 Центр алгебры $YB(\widehat{gl}(1))$

Раздел 1.3.2 не важен для понимания главных результатов диссертации. В этом разделе мы показываем, что алгебра $YB(\widehat{gl}(1))$ содержит бесконечно мерный центр. А именно, для любого сингулярного вектора $|s\rangle$ W_n алгебры, действующей в пространстве n бозонных полей, мы определяем центральный элемент D_s (1.52). Первый представитель этой серии связан с оператором $\psi(u)$, определенным выше (12)

$$D_{1,1}(u) = \psi(u) \frac{h(u)h(u + \epsilon_3)}{h(u - \epsilon_1)h(u - \epsilon_2)}.$$

$$\psi(u) = \frac{\langle s_{1,1} | \mathcal{L}^1(u) \mathcal{L}^2(u + \epsilon_3) | s_{1,1} \rangle}{h(u)h(u + \epsilon_3)},$$

где

$$|s_{1,1}\rangle_u \stackrel{\text{def}}{=} (a_{-1}^{(1)} - a_{-1}^{(2)}) |\emptyset\rangle_u \otimes |\emptyset\rangle_{u+\epsilon_3}$$

это сингулярный вектор W алгебры, который появляется в тензорном произведении двух Фоковских пространств $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \mathcal{F}_{u_2}$ при специализации $u_2 = u_1 + \epsilon_3$.

Более общо, для сингулярного вектора W_n алгебры $|s\rangle$, действующей в пространстве n Фоковских пространств $\mathcal{F}_1(u_1) \dots \mathcal{F}_n(u_n)$ ⁵ мы определим Картановский ток, действующий в квантовом пространстве

$$h_s = \langle s | \mathcal{L}^1(u - u_1) \dots \mathcal{L}^n(u - u_n) | s \rangle.$$

Тогда оператор:

$$D_s = \frac{h_s(u)}{\prod_{i=1}^n h(u - v_i)} \quad (14)$$

лежит в центре алгебры $\text{YB}(\widehat{\mathfrak{gl}}(1))$.

Интегрируемая система с нулевым твистом. В разделе 1.3.3 мы рассматриваем интегрируемую систему с нулевым твистом $q = 0$. В этом случае твист-деформированная трансфер матрица $\mathbf{T}_q$ совпадает с Картановским током $h(u)$, рассмотренным в прошлом разделе. Спектр и базис собственных функций тока $h(u)$ устроен очень просто и может быть выписан в явном виде. Например, для представления в тензорном произведении n Фоковских пространств $\mathcal{F}_{x_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{x_n}$ собственный базис нумеруется набором из n диаграмм Юнга $\vec{\lambda} = \{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}\}$ и известен под названием обобщенных полиномов Джека. Собственные значения могут быть выписаны в терминах содержаний клеток диаграммы Юнга

$$h(u) |\vec{\lambda}\rangle = \prod_{\square \in \vec{\lambda}} \frac{(u - c_{\square})}{(u - c_{\square} - \epsilon_3)} |\vec{\lambda}\rangle.$$

Для клетки с координатами $\square = (i, j)$ содержание определяется по формуле

$$c_{\square} = x_k - (i - 1)\epsilon_1 - (j - 1)\epsilon_2.$$

Действие e, f генераторов в этом базисе даётся формулами (1.60):

$$\begin{aligned} e(u) |\vec{\lambda}\rangle &= \sum_{\square \in \text{addable}(\vec{\lambda})} \frac{E(\vec{\lambda}, \vec{\lambda} + \square)}{u - c_{\square}} |\vec{\lambda} + \square\rangle, \\ f(u) |\vec{\lambda}\rangle &= \sum_{\square \in \text{removable}(\vec{\lambda})} \frac{F(\vec{\lambda}, \vec{\lambda} - \square)}{u - c_{\square}} |\vec{\lambda} - \square\rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты $E(\vec{\lambda}, \vec{\lambda} + \square)$ и $F(\vec{\lambda}, \vec{\lambda} - \square)$ даются формулами

$$\begin{aligned} E(\vec{\lambda}, \vec{\lambda} + \square) &= \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_3} \prod_{\square' \in \vec{\lambda} + \square} S^{-1}(c_{\square'} - c_{\square}) \prod_{k=1}^n \frac{(c_{\square} - x_k + \epsilon_3)}{(c_{\square} - x_k)}, \\ F(\vec{\lambda}, \vec{\lambda} - \square) &= \prod_{\square' \in \vec{\lambda} - \square} S(c_{\square} - c_{\square'}), \end{aligned} \quad (16)$$

⁵Отметим, что сингулярный вектор может существовать только при определённых резонансных значениях спектральных параметров u_i .

здесь

$$S(x) = \frac{(x + \epsilon_1)(x + \epsilon_2)}{x(x - \epsilon_3)}.$$

Мы используем эти формулы для определения вектора Бете и изучения его матричных элементов.

Трансфер матрица и PLW иерархия Интегралов Движения. В начале раздела 1.4 мы напоминаем, что трансфер матрица определённая как:

$$\mathbf{T}_q(u) = \text{Tr} \left(q^{L_0^{(0)}} \mathcal{R}_{0,1}(u - u_1) \mathcal{R}_{0,2}(u - u_2) \dots \mathcal{R}_{0,n-1}(u - u_{n-1}) \mathcal{R}_{0,n}(u - u_n) \right) \Big|_{\mathcal{F}_u},$$

имеет следующее асимптотическое разложение в пределе большого u :

$$\mathbf{T}_q(u) = \Lambda(u, q) \exp \left(\frac{1}{u} \mathbf{I}_1(q) + \frac{1}{u^2} \mathbf{I}_2(q) + \dots \right),$$

где $\Lambda(u, q)$ - нормализационный фактор; $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ - первые PLW _{n} Интегралы Движения.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(q) &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\partial \varphi_k)^2 \right] dx, \\ \mathbf{I}_2(q) &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\partial \varphi_k)^3 + Q \left(\frac{i}{2} \sum_{i,j} \partial \varphi_i D \partial \varphi_j + \sum_{i < j} \partial \varphi_i \partial^2 \varphi_j \right) \right] dx, \\ \mathbf{I}_3(q) &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (\partial \varphi_k)^4 + \dots \right] dx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

здесь D - не локальный оператор, его Фурье образ даётся:

$$D(k) = k \frac{1 + q^k}{1 - q^k}.$$

Определим оператор Книжника - Замолотчикова $\mathcal{I}_1^{\text{KZ}}(q)$ по формуле:

$$\mathcal{I}_1^{\text{KZ}}(q) \stackrel{\text{def}}{=} T_q(u_1)$$

Используя то, что $\mathcal{R}_{0,1}(0) = \mathcal{P}_{0,1}$ - оператор перестановки, оператор Книжника - Замолотчикова вычисляется явно:

$$\mathcal{I}_1^{\text{KZ}}(q) = q^{L_0^{(1)}} \mathcal{R}_{1,2}(u_1 - u_2) \mathcal{R}_{1,3}(u_1 - u_3) \dots \mathcal{R}_{1,n}(u_1 - u_n).$$

В оставшейся части этого раздела мы покажем, что Интегралы Движения Книжника - Замолотчикова и локальные Интегралы Движения могут быть диагонализированы с помощью метода анзаца Бете (8).

Специальный вектор $|\chi\rangle$, определение вектора Бете. В разделе 1.4.1 мы определяем вектор Бете $B(x)$, который становится собственным вектором интегрируемой системы при наложении уравнений Бете. Чтобы определить вектор Бете, мы вводим тензорное произведение $n + N$ Фоковских пространств. Первые n из них мы называем "квантовым пространством", оставшиеся N назовём "вспомогательным пространством":

$$\underbrace{\mathcal{F}_{u_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{u_n}}_{\text{квантовое пространство}} \otimes \underbrace{\mathcal{F}_{x_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{x_N}}_{\text{вспомогательное пространство}}$$

которое порождается из вакуумного вектора действием операторов рождения:

$$|\emptyset\rangle_{\mathbf{x}} \otimes |\emptyset\rangle_{\mathbf{u}} = |x_1\rangle \otimes \cdots \otimes |x_N\rangle \otimes |u_1\rangle \otimes \cdots \otimes |u_n\rangle.$$

Мы будем искать вектор Бете в виде ⁶:

$$|B(\mathbf{x})\rangle_{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} {}_{\mathbf{x}}\langle \emptyset | \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) | \chi \rangle_{\mathbf{x}} \otimes |\emptyset\rangle_{\mathbf{u}} \quad \text{where} \quad \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathcal{R}_{x_1 u_1} \cdots \mathcal{R}_{x_N u_1} \cdots \mathcal{R}_{x_1 u_n} \cdots \mathcal{R}_{x_N u_n},$$

здесь $|\chi\rangle_{\mathbf{x}}$ это некоторый вектор во вспомогательном пространстве. Удобно в качестве вектора $|\chi\rangle$ выбрать собственный вектор оператора $h(u)$ во вспомогательном пространстве. Самым простым и естественным выбором является вектор (см (1.68))

$$|\chi\rangle_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} |\underbrace{\square, \dots, \square}_N\rangle \sim \oint_{x_N} dz_N \cdots \oint_{x_1} dz_1 e(z_N) \cdots e(z_1) |\emptyset\rangle_{\mathbf{x}}.$$

Вектор $|\chi\rangle_{\mathbf{x}}$ может быть так же зафиксирован (с точностью до нормировочной константы) своим собственным значением

$$h(u) |\chi\rangle_{\mathbf{x}} = \prod_{k=1}^N \frac{u - x_k}{u - x_k - \epsilon_3} |\chi\rangle_{\mathbf{x}}.$$

Явное вычисление вектора Бете и его свойства. Здесь мы продолжаем описывать результаты раздела 1.4.1. Прямое следствие уравнений (15), (16) является формула:

$${}_{\mathbf{x}}\langle \emptyset | f(z_N) \cdots f(z_1) | \chi \rangle_{\mathbf{x}} = \text{Sym}_{\mathbf{x}} \left(\prod_{a=1}^N \frac{1}{z_a - x_a} \prod_{a < b} S(x_a - x_b) \right),$$

где $\text{Sym}_{\mathbf{x}}$ обозначает симметризацию по переменным x_i .

Вместе с формулой (13) для выражения $\mathcal{L}$ -оператора в терминах токов f и h она позволяет явно вычислить матричные элементы вектора Бете - так называемые весовые функции:

$$\omega_{\vec{\lambda}}(\mathbf{x} | \mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} {}_{\mathbf{u}}\langle \emptyset | a_{\vec{\lambda}^{(1)}}^{(1)} \cdots a_{\vec{\lambda}^{(n)}}^{(n)} | B(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{u}} = {}_{\mathbf{x}}\langle \emptyset | \mathcal{L}_{\vec{\lambda}^{(1)}, \emptyset}(u_1) \cdots \mathcal{L}_{\vec{\lambda}^{(n)}, \emptyset}(u_n) | \chi \rangle_{\mathbf{x}}.$$

После простых выкладок мы получаем:

$$\omega_{\vec{\lambda}}(\mathbf{x} | \mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \oint \cdots \oint \Omega_{\vec{\lambda}}(\vec{z} | \mathbf{u}) \text{Sym}_{\mathbf{x}} \left(\prod_{a=1}^N \frac{1}{z_a - x_a} \prod_{a < b} S(x_a - x_b) \right) d\vec{z},$$

где функция:

$$\begin{aligned} \Omega_{\vec{\lambda}}(\vec{z} | \mathbf{u}) = F_{\vec{\lambda}}(\vec{z} | \mathbf{u}) & \left(\prod_{j=1}^{|\lambda^{(1)}|} \frac{u_2 - z_j^{(1)}}{u_2 - z_j^{(1)} - \epsilon_3} \right) \left(\prod_{j=1}^{|\lambda^{(2)}|} \frac{u_3 - z_j^{(2)}}{u_3 - z_j^{(2)} - \epsilon_3} \prod_{j=1}^{|\lambda^{(1)}|} \frac{u_3 - z_j^{(1)}}{u_3 - z_j^{(1)} - \epsilon_3} \right) \cdots \\ & \cdots \left(\prod_{j=1}^{|\lambda^{(n-1)}|} \frac{u_n - z_j^{(n-1)}}{u_n - z_j^{(n-1)} - \epsilon_3} \prod_{j=1}^{|\lambda^{(n-2)}|} \frac{u_n - z_j^{(n-2)}}{u_n - z_j^{(n-2)} - \epsilon_3} \cdots \prod_{j=1}^{|\lambda^{(1)}|} \frac{u_n - z_j^{(1)}}{u_n - z_j^{(1)} - \epsilon_3} \right) \end{aligned}$$

Наконец, интеграл может быть вычислен как сумма по вычетам в точках $\mathbf{x}$, и мы получаем явную формулу (см (1.78)):

$$\omega_{\vec{\lambda}}(\mathbf{x} | \mathbf{u}) = \text{Sym}_{\mathbf{x}} \left(\Omega_{\vec{\lambda}}(\vec{x} | \mathbf{u}) \prod_{a < b} S(x_a - x_b) \right).$$

Её простота объясняет наш выбор вектора $|\chi\rangle$.

⁶Наше определение совпадает с определением Окунькова-Аганагич, данное в [AO17] в более общем контексте (см раздел 1.3.3 of [AO17]).

Диагонализация локальных Интегралов Движения и Интегралов Движения

Книжника - Замолодчикова. Используя методы описанные выше, мы вычислили действие локальных Интегралов Движения и Интегралов Движения Книжника - Замолодчикова на вектор Бете в разделах 1.4.2, 1.4.4. А именно, мы доказали, что при наложении уравнений Бете:

$$q \prod_{j \neq i} \prod_{\alpha=1}^3 \frac{x_i - x_j - \epsilon_\alpha}{x_i - x_j + \epsilon_\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{x_i - u_k + \epsilon_3}{x_i - u_k} = 1 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, N,$$

вектор Бете становится собственным вектором оператора Книжника - Замолодчикова $\mathcal{I}_1^{\text{KZ}}(q) = q^{L_0^{(1)}} \mathcal{R}_{1,2}(u_1 - u_2) \mathcal{R}_{1,3}(u_1 - u_3) \dots \mathcal{R}_{1,n}(u_1 - u_n)$, с собственным значением:

$$t_q^1(\mathbf{u}) = \prod_{k=1}^N \frac{x_k - u_1}{x_k - u_1 + \epsilon_3}.$$

Он так же становится собственным вектором локального Интеграла Движения $\mathbf{I}_2$:

$$-\epsilon_3 \int \left[\frac{1}{3} \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \sum_i (\partial \phi_i)^3 - \epsilon_3 \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial \phi_i D(q) \partial \phi_j + \sum_{i < j} \partial \phi_i \partial^2 \phi_j \right) \right] \frac{dx}{2\pi} - \frac{\epsilon_3 \mathbf{I}_1(q)}{2} - \frac{\epsilon_3}{3} \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \sum_i u_i^3,$$

с собственным значением $\left(\sum_1^N x_k \right)$. Мы так же предоставили явную формулу (1.83) для решения уравнений Книжника - Замолодчикова (1.84) и Окунькова-Пандарипанды (ОП) (1.96) в терминах вектора Бете. На этом я завершаю обзор первой главы диссертации.

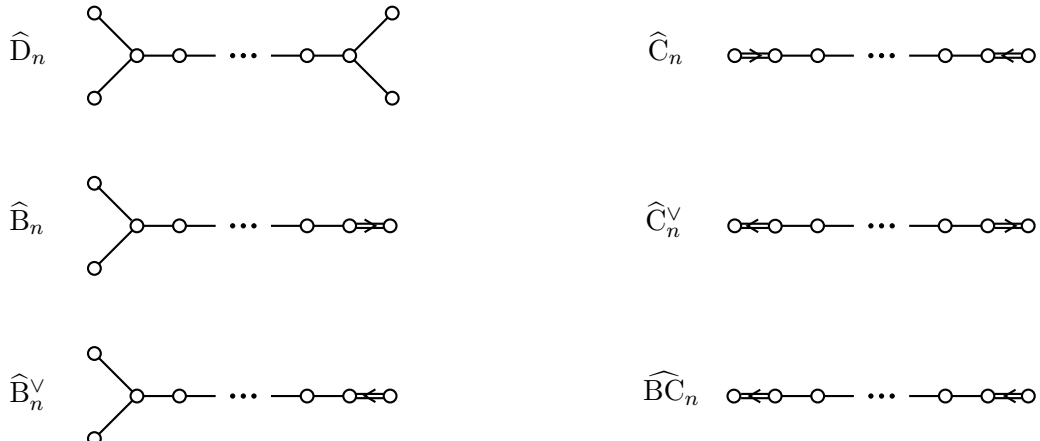
Интегрируемые структуры конформных теорий типа В, С, D. Вторая глава диссертации посвящена изучению интегрируемых структур конформных теорий типа В, С, D, а так же их связи с граничным анзацем Бете для моделей с симметрией аффинного Янгиана.

Раздел 2.2 начинается с рассмотрения квантовой теории поля аффинной Тоды, ассоциированной с аффинной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ BCD типа. Мы напоминаем, что интегралы движения могут быть найдены как централизатор аффинного набора скринингов:

$$\mathcal{S}_r = \oint e^{b(\alpha_r \cdot \varphi(z))} \frac{dz}{2\pi}, \quad (17)$$

$$[\mathbf{I}_s, \mathcal{S}_r] = 0, \quad (18)$$

здесь $b = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}$ - константа связи, а вектора α_r имеют скалярные произведения в соответствии с матрицей Картана аффинной алгебры Ли BCD типа: $(\alpha_r \cdot \alpha_s) = c_{r,s}$.



Используя стандартную параметризацию для корней, мы можем записать скалярные поля в экспонентах (17) в виде:

$$(\alpha_0 \cdot \varphi) = \begin{cases} -\varphi_1 \\ -2\varphi_1 \\ -\varphi_1 - \varphi_2 \end{cases} \quad (\alpha_r \cdot \varphi) = \varphi_r - \varphi_{r+1} \quad \text{для} \quad 0 < r < n, \quad (\alpha_n \cdot \varphi) = \begin{cases} \varphi_n \\ 2\varphi_n \\ \varphi_{n-1} + \varphi_n \end{cases}$$

Так что каждую аффинную диаграмму можно интерпретировать как (неаффинную) диаграмму типа A_{n-1} с двумя "граничными условиями" одного из трёх типов В, С или D отвечающие короткому корню, длинному корню и корню длины $\sqrt{2}$ соответственно.

Так же как и в первой главе диссертации, мы будем искать локальные Интегралы Движения в виде интегралов от локальных плотностей $\mathbf{I}_s = \int_0^{2\pi} G_{s+1}(z) \frac{dz}{2\pi}$. Первые несколько Интегралов Движения могут быть явно вычислены из условия коммутативности со скринингами (18):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_z e^{b(\alpha_r \cdot \varphi(\xi))} G_{s+1}(z) d\xi = \partial X_s(z),$$

где $X_s(z)$ - некоторое локальное поле. Первая нетривиальная плотность имеет вид:

$$\begin{aligned} G_4(z) = & (\partial\varphi \cdot \partial\varphi)^2 - \frac{1}{3} \left(2n - \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta}{\epsilon_3} \right) \sum_{k=1}^n (\partial\varphi_k)^4 + \\ & + \frac{4\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \sum_{k=1}^n \partial\varphi_k^2 \left(\sum_{j < k} \left(j - 1 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{2\epsilon_3} \right) \partial^2 \varphi_j - \sum_{j > k} \left(n - j + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\beta}{2\epsilon_3} \right) \partial^2 \varphi_j \right) + \\ & + \left(2n + \frac{4(n-1)(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)}{3\epsilon_1\epsilon_2} + \frac{(\epsilon_1\epsilon_2 - 2\epsilon_3^2)(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - 2\epsilon_3)}{3\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \right) (\partial^2 \varphi \cdot \partial^2 \varphi) - \\ & - \frac{4\epsilon_3^2}{\epsilon_1\epsilon_2} \sum_{i \leq j} \left(i - 1 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{2\epsilon_3} \right) \left(n - j + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\beta}{2\epsilon_3} \right) (2 - \delta_{ij}) \partial^2 \varphi_i \partial^2 \varphi_j, \quad (19) \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta = \{1, 2, 3\}$ для границ типа В, С или D соответственно.

Склянинская K -матрица отражений для аффинного Янгиана. В разделе 2.3 мы определяем K оператор, с помощью которого мы сможем установить связь интегрируемых структур типа ВCD с аффинным Янгианом. Мы определим K оператор как сплетающий оператор W алгебры, по аналогии с тем как это было сделано для R -матрицы (10).

Мы определяем два W_4 тока, действующих в тензорном произведении $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \mathcal{F}_{u_2}$ двух бозонных Фоковских модулей:

$$W_2 = (\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2 + \frac{2\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \partial^2 \varphi_1 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} (\partial^2 \varphi_2 + \partial^2 \varphi_1)$$

и

$$\begin{aligned} W_4 = & (\partial\varphi_1)^2 (\partial\varphi_2)^2 + \frac{2\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 \partial^2 \varphi_2 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} ((\partial\varphi_1)^2 \partial^2 \varphi_2 + (\partial\varphi_2)^2 \partial^2 \varphi_1) - \\ & - \frac{\epsilon_3 \epsilon_\alpha}{\epsilon_1 \epsilon_2} (\partial^2 \varphi_1)^2 + \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \partial^2 \varphi_1 \partial^2 \varphi_2 - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_\alpha)(\epsilon_2 - \epsilon_\alpha)}{2\epsilon_1 \epsilon_2} (\partial\varphi_1 \partial^3 \varphi_1 + \partial\varphi_2 \partial^3 \varphi_2) - \\ & - \frac{\epsilon_3(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)}{\epsilon_1 \epsilon_2} (\partial\varphi_1 \partial^3 \varphi_1 - \partial\varphi_1 \partial^3 \varphi_2) + \frac{\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \left(\frac{\epsilon_\alpha(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)}{2\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{\epsilon_3^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{1}{3} \right) \partial^4 \varphi_1 \end{aligned}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$ для W алгебр типа В, С или D соответственно.

По определению R и K операторы задаются сплетающими соотношениями:

$$\mathcal{R}_{1,2}W_s = W_s \Big|_{\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2} \mathcal{R}_{1,2}, \quad \mathcal{K}_2W_s = W_s \Big|_{\varphi_2 \rightarrow -\varphi_2} \mathcal{K}_2, \quad (20)$$

здесь $s = 2, 4$. Легко понять что $R_{1,2}$ оператор может быть отождествлён с R -матрицей Маулика-Окунькова (10) $\mathcal{R}_{1,2} = \mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]$, оператор отражения $\mathcal{K}_2$ так же выражается через R -матрицу от рескалированного аргумента:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^1 &= \mathcal{R}[\sqrt{2}\partial\varphi_2] \Big|_{\epsilon_1 \rightarrow \sqrt{2}\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow \epsilon_2/\sqrt{2}} && \text{для В серии} \\ \mathcal{K}_2^2 &= \mathcal{R}[\sqrt{2}\partial\varphi_2] \Big|_{\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1/\sqrt{2}, \epsilon_2 \rightarrow \sqrt{2}\epsilon_2} && \text{для С серии} \\ \mathcal{K}_2^3 &= \text{Id} && \text{для D серии} \end{aligned}$$

Отметим, что простейший из K операторов $\mathcal{K}_2^3 = \text{Id}$ имеет очень простой явный вид и не зависит от спектрального параметра.

Повторяя аргумент Маулика и Окунькова, мы легко убеждаемся, что K -оператор удовлетворяет Складчинскому KRKR уравнению⁷

$$\mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]\mathcal{K}_1^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 + \partial\varphi_2]\mathcal{K}_2^\alpha = \mathcal{K}_2^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 + \partial\varphi_2]\mathcal{K}_1^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]. \quad (21)$$

Интегралы Движения Книжника - Замолодчикова. В разделе 2.3.1 мы определяем Интегралы Движения Книжника - Замолодчикова:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i^+ &= \mathcal{R}_{i,\bar{i}+1} \dots \mathcal{R}_{i,\bar{n}} \mathcal{K}_i^\alpha \mathcal{R}_{i,n} \dots \mathcal{R}_{i,i+1}, \\ \mathcal{T}_i^- &= \mathcal{R}_{i,1} \dots \mathcal{R}_{i,i-1} \mathcal{K}_i^\beta \mathcal{R}_{1,\bar{i}} \dots \mathcal{R}_{i-1,\bar{i}}, \\ \mathcal{I}_i^{\text{KZ}} &= \mathcal{T}_i^- \mathcal{T}_i^+ \end{aligned} \quad (22)$$

где индекс с чертой $\bar{i}$ означает сопряжение оператором отражения знака D_i

$$\begin{aligned} D_i f(\varphi) &= f(\varphi) \Big|_{\varphi_i \rightarrow -\varphi_i} D_i, \\ \mathcal{R}_{i,\bar{j}} &= D_j \mathcal{R}_{i,j} D_j = \mathcal{R}[\partial\varphi_i + \partial\varphi_j], \\ \mathcal{R}_{\bar{i},j} &= D_i \mathcal{R}_{i,j} D_i = \mathcal{R}[-\partial\varphi_i - \partial\varphi_j], \end{aligned}$$

Коммутативность операторов Книжника - Замолодчикова следует из KRKR уравнения (21)

$$[\mathcal{I}_i^{\text{KZ}}, \mathcal{I}_j^{\text{KZ}}] = 0.$$

Коммутативность оператора Книжника - Замолодчикова с локальными Интегралами Движения $[\mathbf{I}_s, \mathcal{I}_i^{\text{KZ}}] = 0$ легко следует из соотношений (20) (см также (2.15)):

$$\mathcal{T}_i^+ \mathbf{I}_s = \mathbf{I}_s \Big|_{\varphi_i \rightarrow -\varphi_i} \mathcal{T}_i^+, \quad \mathcal{T}_i^- \mathbf{I}_s \Big|_{\varphi_i \rightarrow -\varphi_i} = \mathbf{I}_s \mathcal{T}_i^-,$$

⁷В оригинальной статье Складчина [Sk188] KRKR уравнение было записано в несколько другой форме:

$$\mathcal{R}_{1,2}(u_1 - u_2) \tilde{\mathcal{K}}_1(u_1) \mathcal{R}_{2,1}(u_2 + u_1) \tilde{\mathcal{K}}_2(u_2) = \tilde{\mathcal{K}}_2(u_2) \mathcal{R}_{1,2}(u_1 + u_2) \tilde{\mathcal{K}}_1(u_1) \mathcal{R}_{2,1}(u_1 - u_2).$$

Два уравнения отличаются переопределением K -оператора и сопряжением $a_n^{1,2} \rightarrow -a_n^{1,2}$, $n \neq 0$

Вектор Бете. Раздел 2.4 повторяет структуру раздела 1.4.1, в которой мы рассматривали интегрируемые структуры типа А. Мы вводим тензорное произведение $n + N$ Фоковских пространств, первые n пространств образуют квантовое пространство $\mathcal{F}_u$, оставшиеся N пространств образуют вспомогательное пространство $\mathcal{F}_x$:

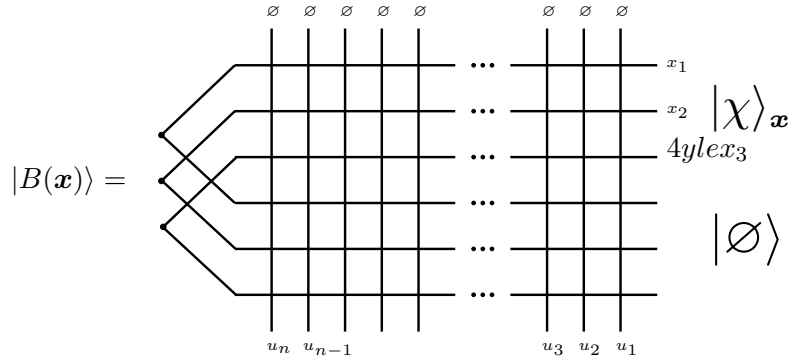
$$\underbrace{\mathcal{F}_{u_n} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_1}}_{\text{квантовое пространство}} \otimes \underbrace{\mathcal{F}_{x_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{x_N}}_{\text{вспомогательное пространство}} = \mathcal{F}_u \otimes \mathcal{F}_x.$$

Мы вводим два типа $\mathcal{L}$ операторов (2.21), (2.22) и $\mathcal{K}_{u|x}$ оператор, заданный коммутационными соотношениями (2.24).

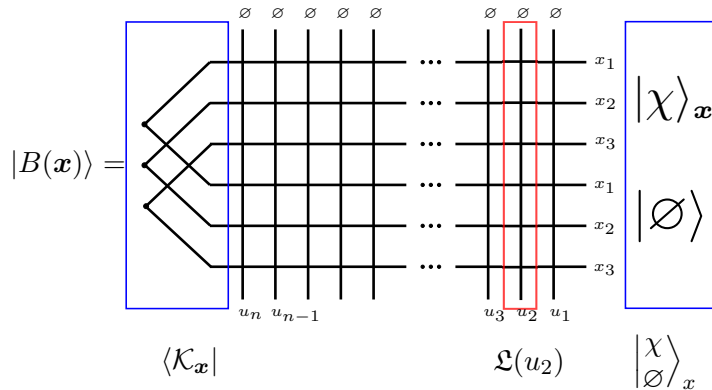
Наконец, мы определяем вектор Бете с помощью формулы (см (2.25))

$$|B(x)\rangle = {}_x\langle \emptyset | \bar{\mathcal{L}}_u \mathcal{K}_x L_u | \emptyset \rangle_u | \chi \rangle_x = {}_x\langle \emptyset | \mathcal{K}_{u|x} | \emptyset \rangle_u | \chi \rangle_x, \quad (23)$$

где вектор $|\chi\rangle_x$ тот же вектор, что и в первой главе диссертации (1.68). Определение вектора Бете может быть проиллюстрировано рисунком:



В начале раздела (2.5) мы предлагаем интерпретировать вектор Бете $|B(x)\rangle$ в виде произведения некоторых L -операторов $\mathfrak{L}(u_n) \dots \mathfrak{L}(u_1)$, заключенных между бра и кет векторами $\langle \mathcal{K}_x |$ и $|\chi\rangle_x$. Данная идея демонстрируется на рисунке ниже. Данные бра и кет вектора лежат в тензорном произведении Фоковского и дуального Фоковского пространства $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{F}_x^*$.



Странный модуль. В разделе 2.5 мы замечаем, что модифицированные операторы $\mathfrak{L}$ удовлетворяют тем же самым RLL коммутационным соотношениям:

$$\mathcal{R}_{ij}(u-v) \mathfrak{L}_i(u) \mathfrak{L}_j(v) = \mathfrak{L}_j(v) \mathfrak{L}_i(u) \mathcal{R}_{ij}(u-v).$$

Так что мы снова можем определить операторы $\mathfrak{h} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{L}_{\emptyset, \emptyset}, \mathfrak{e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{h}^{-1} \mathfrak{L}_{\emptyset, \square}, \mathfrak{f} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{L}_{\square, \emptyset} \mathfrak{h}^{-1}$.

Разница состоит в том, что $\mathfrak{L}$ -операторы действуют в тензорном произведении Фоковского и дуального Фоковского пространства $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{F}_x^*$. Данное представление для $\mathfrak{L}$ -оператора не

имеет старшего веса. Несмотря на это, мы всё равно можем диагонализировать оператор $\mathfrak{h}(z)$. Собственные состояния операторов $\mathfrak{h}(u)$, $\psi(u)$, действующих в $\mathcal{F}_{\mathbf{x}} \otimes \mathcal{F}_{\mathbf{x}}^*$ нумеруются двумя наборами диаграмм Юнга и обозначаются как $|\vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle$, собственные значения выражаются через содержания клеток лежащих в диаграмме Юнга:

$$\mathfrak{h}(u)|\vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle = \prod_{\square \in \vec{\lambda}} \frac{(u - c_{\square})}{(u - c_{\square} - \epsilon_3)} \prod_{\square \in \vec{\mu}} \frac{(u - c_{\square} - \epsilon_3)}{(u - c_{\square})} |\vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} c_{\square} &= x_k - (i-1)\epsilon_1 - (j-1)\epsilon_2, & \text{если } \square = (i, j) \in \vec{\lambda}, \\ c_{\square} &= -\epsilon_3 - x_k + (i-1)\epsilon_1 + (j-1)\epsilon_2, & \text{если } \square = (i, j) \in \vec{\mu}. \end{aligned}$$

Действие токов $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ даётся явными формулами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}(u)|\vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle &= \sum_{\square \in \text{addable}(\vec{\lambda})} \frac{E\left(\begin{smallmatrix} \vec{\lambda} & \rightarrow & \vec{\lambda} + \square \\ \vec{\mu} & \rightarrow & \vec{\mu} \end{smallmatrix}\right)}{u - c_{\square}} |\vec{\lambda} + \square, \vec{\mu}\rangle + \sum_{\square \in \text{removable}(\vec{\mu})} \frac{E\left(\begin{smallmatrix} \vec{\lambda} & \rightarrow & \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} & \rightarrow & \vec{\mu} - \square \end{smallmatrix}\right)}{u - c_{\square}} |\vec{\lambda}, \vec{\mu} - \square\rangle, \\ \mathfrak{f}(u)|\vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle &= \sum_{\square \in \text{removable}(\vec{\lambda})} \frac{F\left(\begin{smallmatrix} \vec{\lambda} & \rightarrow & \vec{\lambda} - \square \\ \vec{\mu} & \rightarrow & \vec{\mu} \end{smallmatrix}\right)}{u - c_{\square}} |\vec{\lambda} - \square, \vec{\mu}\rangle + \sum_{\square \in \text{addable}(\vec{\mu})} \frac{F\left(\begin{smallmatrix} \vec{\lambda} & \rightarrow & \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} & \rightarrow & \vec{\mu} + \square \end{smallmatrix}\right)}{u - c_{\square}} |\vec{\lambda}, \vec{\mu} + \square\rangle. \end{aligned}$$

Амплитуды E, F даются формулами (2.31), (2.32). Заметим, что теперь операторы $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ могут как убавлять, так и добавлять клетки, в то время как раньше $\mathfrak{e}$ только добавлял клетки, а $\mathfrak{f}$ - только убавлял.

Отражательное свойство состояния $\langle \mathcal{K} |$. Последний ингредиент, который позволит вычислить матричные элементы вектора Бете, - это формула для действия оператора $\mathfrak{f}$ на состояние $\langle \mathcal{K} |$. В разделе 2.5.2 мы выводим следующее отражательное свойство (2.39):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K} | \mathfrak{h}(u) &= \langle \mathcal{K} | \mathfrak{h}(-u) \\ \langle \mathcal{K} | \mathfrak{f}(u) &= r(u) \langle \mathcal{K} | \mathfrak{f}(-\epsilon_3 - u), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r(u - \epsilon_3/2) &= -\frac{u + \epsilon_3/2}{u - \epsilon_3/2} \quad \text{для D случая,} \\ r(u - \epsilon_3/2) &= -\frac{u + \epsilon_i/2}{u - \epsilon_i/2} \quad \text{для случаев BC,} \end{aligned}$$

в последней строчке $i = 1$ соответствует типу B, а $i = 2$ соответствует типу C.

Данная формула позволяет вычислить спаривание между состояниями $\langle \mathcal{K} |$ и $|\vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle$ (2.5.2), (2.5.2).

Диагонализация локальных Интегралов Движения и Интегралов Движения Книжника - Замолодчикова. В разделе 2.5.3 мы выводим уравнения анзаца Бете для диагонализации Интеграла Движения Книжника - Замолодчикова:

$$\begin{aligned} \text{BAE}(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} r^{\alpha}(x_i) r^{\beta}(x_i) A(x_i) A^{-1}(-x_i) \prod_{j \neq i} G(x_i - x_j) G^{-1}(-x_i - x_j) = 1, \\ G(x) &= \frac{(x - \epsilon_1)(x - \epsilon_2)(x - \epsilon_3)}{(x + \epsilon_1)(x + \epsilon_2)(x + \epsilon_3)}, \quad A(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - u_k + \frac{\epsilon_3}{2}}{x - u_k - \frac{\epsilon_3}{2}}, \quad r^{\alpha}(x) = -\frac{x + \epsilon_{\alpha}/2}{x - \epsilon_{\alpha}/2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Мы также показываем, что при наложении уравнений Бете, вектора Бете $|B(\mathbf{x} - \frac{\epsilon_3}{2})\rangle$ от сдвинутых параметров $\mathbf{x}$ являются собственными векторами Интегралов Движения Книжника - Замолодчикова $\mathcal{I}_i^{\text{KZ}}$ (22):

$$\mathcal{I}_i^{\text{KZ}}|B(\mathbf{x} - \frac{\epsilon_3}{2})\rangle \stackrel{\text{BAE}(\mathbf{x})=1}{=} \prod_a \frac{(u_i + \frac{\epsilon_3}{2})^2 - x_a^2}{(u_i - \frac{\epsilon_3}{2})^2 - x_a^2} |B(\mathbf{x} - \frac{\epsilon_3}{2})\rangle. \quad (25)$$

Уравнения (24) и (25) вместе с явной формулой для вектора Бете (23) являются главными результатами второй главы диссертации.

В отличие от случая А мы не выводим явные формулы для диагонализации локальных Интегралов Движения, однако мы предположили и проверили численно формулу для собственных значений первого не тривиального Интеграла Движения $\mathbf{I}_3 = \frac{1}{2\pi} \int G_4(x) dx$, где плотность G_4 даётся формулой (19). Так на уровне N мы предполагаем следующую формулу:

$$\mathbf{I}_3^{\text{vac}} + \left(4N - 4 \sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{3\epsilon_1 \epsilon_2} \left(2n - \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta}{\epsilon_3} \right) \right) N + \frac{4}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left(2n - \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta}{\epsilon_3} \right) \sum_{k=1}^N x_k^2,$$

где $\mathbf{I}_3^{\text{vac}} =_{\mathbf{u}} \langle \emptyset | \mathbf{I}_3 | \emptyset \rangle_{\mathbf{u}}$ - вакуумное значение Интеграла Движения.

Более общие интегрируемые системы. Можно заметить, что коммутационные соотношения аффинного Янгиана (1.40) симметричны относительно перестановки ϵ_α параметров. Однако в уравнениях Бете (24) данная симметрия ϵ_α , нарушается членом $A(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - u_k + \frac{\epsilon_3}{2}}{x - u_k - \frac{\epsilon_3}{2}}$. Причина этого состоит в выборе конкретного Фоковского представления. Чтобы восстановить данную симметрию следует определить три типа Фоковских модулей $\mathcal{F}^\alpha$ (см [FJMM13, BFM18, LS16]). Вся вышеописанная машинерия может быть применима без изменений. В итоге, мы можем построить интегрируемую систему по набору (цветных) Фоковских пространств и двух цветных границ $\beta_L \left| \mathcal{F}_1^{\alpha_1} \otimes \mathcal{F}_2^{\alpha_2} \cdots \otimes \mathcal{F}_n^{\alpha_n} \right| \beta_R$, $\alpha_i, \beta_{L,R} = 1, 2, 3$. Получающиеся системы Скринингов описываются в таблице (B.1). Для более детального описания мы отсылаем читателя к приложению B.1. Здесь мы хотим отметить отдельную интересную модель: $1 \left| \mathcal{F}_1^1 \otimes \mathcal{F}_2^3 \cdots \otimes \mathcal{F}_{2n-1}^1 \otimes \mathcal{F}_{2n}^3 \right| 3$. Данная модель описывает УФ поведение (дуального описания) $O(2n+1)$ сигма модели, рассмотренной в [LS18]. Аналогично модель $3 \left| \mathcal{F}_1^3 \otimes \mathcal{F}_2^1 \cdots \otimes \mathcal{F}_{2n+1}^3 \right| 3$ описывает УФ предел $O(2n)$ сигма модели.

q -деформация Локальных и Интегралов Движения и Интегралов Движения Книжника - Замолодчикова. В последней главе диссертации мы изучаем q -деформацию объектов рассмотренных в предыдущих главах. В разделе 3.2 мы напоминаем определение q -деформированной W алгебры как централизатора системы скринингов. В разделе 3.3 мы приводим конструкцию для централизатора аффинной системы скринингов. Оказывается, что в q -деформированном случае централизатор может быть посчитан явно. Мы предъявляем явные формулы для деформированных Интегралов Движения произвольно высокого спина (3.59) для W алгебр типа BCD. В разделе 3.4 мы детально рассматриваем пример W алгебры типа D. Мы замечаем, что W алгебры типа BCD могут быть описаны единообразно, что позволяет определить унифицирующую алгебру $\mathcal{K}$. Детали этого подхода описаны в статье [FJMV21], в данной диссертации мы ограничиваем себя более явным и элементарным подходом. В разделе 3.5 мы приводим конструкцию для q -деформированных версий операторов отражения R и K , вместе с формулами для q -деформированных Интегралов Движения Книжника - Замолодчикова.

Диссертация основана на трёх публикациях.

1. Alexey Litvinov; Ilya Vilkoviskiy. *Liouville reflection operator, affine Yangian and Bethe ansatz*. ("Оператор отражений Лиувилля, аффинный Янгиан и анзац Бете") ЖНЕР, 12:100, 2020.

2. Alexey Litvinov; Илья Вилковиский. *Integrable structure of BCD conformal field theory and boundary Bethe ansatz for affine Yangian.* ("Интегрируемые структуры конформных теорий поля типа BCD и Бете анзац для аффинного Янгиана с границей") JHEP, 141 (2021).
3. B. Feigin, M. Jimbo, E. Mukhin and I. Vilkoviskiy. *Deformation of W algebras via quantum toroidal algebras.* ("Деформации W алгебр с помощью квантовых торoidalных алгебр") Selecta Mathematica, 27(4):1-62, 2021

Литература

- [AKOS96] Hidetoshi Awata, Harunobu Kubo, Satoru Odake, and Junichi Shiraishi. Quantum W_N -algebras and Macdonald polynomials. *Communications in mathematical physics*, 179(2):401–416, 1996.
- [AO17] Mina Aganagic and Andrei Okounkov. Quasimap counts and Bethe eigenfunctions. *Moscow Math. J.*, 17(4):565–600, 2017.
- [BFM18] M. Bershtein, B. Feigin, and G. Merzon. Plane partitions with a "pit": generating functions and representation theory. *Sel. Math. New Ser.*, 24:21, 2018.
- [BLZ01] Vladimir V. Bazhanov, Sergei L. Lukyanov, and Alexander B. Zamolodchikov. Spectral determinants for Schrodinger equation and Q operators of conformal field theory. *J. Stat. Phys.*, 102:567–576, 2001.
- [BLZ04] Vladimir V. Bazhanov, Sergei L. Lukyanov, and Alexander B. Zamolodchikov. Higher level eigenvalues of Q operators and Schroedinger equation. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 7:711–725, 2004.
- [DF93] Jin Tai Ding and Igor B. Frenkel. Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra $U_q(\mathfrak{gl}(n))$. *Comm. Math. Phys.*, 156:277–300, 1993.
- [DT99a] Patrick Dorey and Roberto Tateo. Anharmonic oscillators, the thermodynamic Bethe ansatz, and nonlinear integral equations. *J. Phys.*, A32:L419–L425, 1999.
- [DT99b] Patrick Dorey and Roberto Tateo. On the relation between Stokes multipliers and the $T - Q$ systems of conformal field theory. *Nucl. Phys. B*, 563:573–602, 1999. [Erratum: Nucl.Phys.B 603, 581–581 (2001)].
- [FF95] Boris Feigin and Edward Frenkel. Kac-Moody groups and integrability of soliton equations. *Inventiones mathematicae*, 120(1):379–408, 1995.
- [FF96] Boris Feigin and Edward Frenkel. Integrals of motion and quantum groups. In *Integrable systems and quantum groups*, pages 349–418. Springer, 1996.
- [FJM17] B Feigin, M Jimbo, and Eugene Mukhin. Integrals of motion from quantum toroidal algebras. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(46):464001, 2017.
- [FJMM13] Boris Feigin, Michio Jimbo, Tetsuji Miwa, and Evgeny Mukhin. Representations of quantum toroidal gl_n . *Journal of Algebra*, 380:78–108, 2013.
- [FJMV21] B Feigin, M Jimbo, E Mukhin, and I Vilkoviskiy. Deformations of W algebras via quantum toroidal algebras. *Selecta Mathematica*, 27(4):1–62, 2021.
- [FL88] V. A. Fateev and Sergei L. Lukyanov. The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $Z(n)$ symmetry. *Int. J. Mod. Phys.*, A3:507, 1988.

- [FR97] Edward Frenkel and Nicolai Reshetikhin. Deformations of W -algebras associated to simple lie algebras. *arXiv preprint q-alg/9708006*, 1997.
- [KL20] Gleb A. Kotousov and Sergei L. Lukyanov. Spectrum of the reflection operators in different integrable structures. *JHEP*, 02:029, 2020.
- [KOJ06] Takeo KOJIMA. The integrals of motion for the deformed W -algebra $W_{q,t}(\hat{sl}_N)$. In *Proceedings of the Symposium on Representation Theory 2006*, pages 102–114. Publication Society of the Proceedings of the Symposium on Representation Theory, 2006.
- [LF91] S. L. Lukyanov and V. A. Fateev. Additional symmetries and exactly solvable models in two-dimensional conformal field theory. *Soviet Scientific Reviews, sec A, volume 15, part 3*, 1991.
- [Lit19] A. V. Litvinov. Integrable $\mathfrak{gl}(n|n)$ Toda field theory and its sigma-model dual. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 110(11):723–726, 2019.
- [LS16] Alexey Litvinov and Lev Spodyneiko. On W algebras commuting with a set of screenings. *JHEP*, 11:138, 2016.
- [LS18] A. V. Litvinov and L. A. Spodyneiko. On dual description of the deformed $O(N)$ sigma model. *JHEP*, 11:139, 2018.
- [Luk88] Sergei L. Lukyanov. Quantization of the Gel’fand–Dikii brackets. *Funct. Anal. Its Appl.*, 22:255–262, 1988.
- [LV20] Alexey Litvinov and Ilya Vilkoviskiy. Liouville reflection operator, affine Yangian and Bethe ansatz. *JHEP*, 12:100, 2020.
- [LV21] Alexey Litvinov and Ilya Vilkoviskiy. Integrable structure of BCD conformal field theory and boundary Bethe ansatz for affine Yangian. *JHEP*, 141, 2021.
- [MO19] Daveshe Maulik and Andrei Okounkov. Quantum Groups and Quantum Cohomology. *Astérisque*, 408, 2019.
- [Nak01] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 14:145–238, 2001.
- [Sk188] E.K. Sklyanin. Boundary conditions for integrable quantum systems. *J. Phys. A*, 21:2375–2389, 1988.
- [Tsy14] A. Tsymbaliuk. *The affine Yangian of $\mathfrak{gl}_1$ and the infinitesimal Cherednik algebras*. Phd thesis, Department of Mathematics MIT, 2014.
- [Tsy17] Alexander Tsymbaliuk. The affine Yangian of $\mathfrak{gl}_1$ revisited. *Adv. Math.*, 304:583–645, 2017.
- [Var00] Michela Varagnolo. Quiver varieties and Yangians. *Lett. Math. Phys.*, 53(4):273–283, 2000.
- [Zam89] A.B. Zamolodchikov. Integrable field theory from conformal field theory. *Adv. Stud. Pure Math.*, 19:641–674, 1989.