**Блатов, Игорь Анатольевич.**

## Операторы с псевдоразреженными матрицами и их приложения : диссертация ... доктора физико-математических наук : 01.01.07. - Воронеж, 1999. - 333 с. : ил.

## Оглавление диссертациидоктор физико-математических наук Блатов, Игорь Анатольевич

Глава I. Операторы с псевдоразреженными матрицами. Общая теория.

§1. Классы ПРМ. Определения и примеры.

1.1. Индексные зоны.

1.2. Функция расползания.

1.3. Классы ПРМ с экспоненциальным убыванием

1.4. Классы ПРМ с субэкспоненциальным убыванием

1.5. Алгебры ПРМ.

1.6. Примеры ПРМ.

1.7. Наполненность алгебр ПРМ.

1.8. Доказательства лемм и теорем

1.9. Доказательство теоремы 1.1.

1.10. Доказательство теоремы 1.1 для произвольного р.

1.11. Доказательство теоремы 1.2.

1.12. Доказательство теоремы 1.3.

1.13. Доказательство теоремы 1.4.

§2. Оценки Ъи и С^11-разложений ПРМ.

2.1. Формулировки теорем.

2.2. Вспомогательные леммы.

2.3. Доказательства теорем 2.1 и 2.2.

2.4. Доказательства теорем 2.3 и 2.4.

§3. Оценки обратных матриц, LU и QR-разложений хорошо обусловленных псевдоразреженных матриц конечных порядков.

3.1. Индексные зоны

3.2. Функция расползания.

3.3. Инверсно замкнутые классы с экспоненциальным убыванием.

3.4. Инверсно замкнутые классы с субэкспоненциальным убыванием.

3.5. Замечания о доказательствах теорем 3.1-3.

3.6. Об оценках LU и QR-разложений разреженных матриц.

3.7. Примеры инверсно замкнутых классов

3.8. Инверсно замкнутые классы для многоуровневых псевдоразреженных матриц

3.9. Оценки LU-факторизаций в случае приближенных вычислений

§4. Оценки блочных факторизаций модельных эллиптических краевых задач.

4.1. Оценки элементов точных факторизаций

§5. Оценки неполных факторизаций модельных эллиптических краевых задач.

5.1. Вспомогательные леммы.

5.2. Оценки элементов матриц G¿

Глава И. Теория методов неполной факторизации

§6. Методы неполной факторизации для хорошо обусловленных разреженных систем.

6.1. Неполная точечная факторизация.

6.2. Неполная блочная факторизация.

§7. Методы неполной факторизации для эллиптических краевых задач.

7.1. Доказательство теоремы 7.1.

7.2. Доказательство теоремы 7.2.

7.3. Доказательство оценок снизу

Глава III. Метод конечных элементов Галеркина для систем сингулярно возмущенных уравнений первого порядка.

§8. Постановка краевой задачи и основной результат

8.1. Постановка краевой задачи.

8.2. Разбиение отрезка [—1,1] и аппроксимаци-онные пространства.

8.3. Галеркинская задача и основная теорема

§9. Схема доказательства теоремы 8.1.

9.1. Галеркинский проектор.

9.2. Представление галеркинского проектора через биортогональные базисы

9.3. Завершение доказательства теоремы 8.1.

§10. Вспомогательные результаты и доказательства лемм.

10.1. Аппроксимационные свойства пробных пространств.

10.2. Доказательство леммы 9.1.

10.3. Доказательства лемм 10.2 и 10.3.

§11. Равномерная линейная независимость функций Fij

11.1. Равномерная линейная независимость В-сплайнов.

11.2. Некоторые свойства нормированных функций F^.

11.3. Схема доказательства CPJIH функций Fij.

11.4. Равномерная линейная независимость группы А\.

11.5. Равномерная отделимость группы А^.

§12. Построение и свойства биортогональных базисов.

§13. Доказательство леммы 9.5.

Глава IV. Метод конечных элементов Галеркина для линейных и квазилинейных сингулярно возмущенных эллиптических краевых задач

§14. Постановки задач. Основные результаты и указания к численной реализации.

14.1. Постановки исходных задач.

14.2. Дискретизация и постановки галеркин-ских задач.

14.3. Базисы в пространствах Р и указания к численной реализации.

§15. Галеркинские проекторы и их свойства.

15.1. Определение галеркинского проектора.

15.2. Представление галеркинского проектора через биортогональные базисы и квазиоптимальность

15.3. Существование биортогональных базисов.

15.4. Дальнейшие свойства биортогональных базисов

§16. Построение биортогональных базисов для линейных задач в одномерном случае.

16.1. Дискретные решения.

16.2. Построение биортогональных базисов к функциям В.

16.3. Завершение построения биортогональных базисов.

§17. Построение биортогональных базисов в двумерном случае

§18. Завершение доказательства теоремы 14.1.

18.1. Аппроксимационные свойства пространства Е.

18.2. Доказательство теоремы 14.1.

Глава V. Метод конечных элементов Галеркина для сингулярно возмущенных параболических начально краевых задач.

§19. Постановки задач и формулировки результатов.

19.1. Постановки задач.

19.2. Формулировка основного результата для нелинейных систем.

19.3. Линейные задачи.

§20. План доказательства теорем 19.1 и 19.2.

20.1. Дискретная функция Грина.

§21. Доказательство оценок (20.8)

21.1. Некоторые свойства разреженных матриц

21.2. Некоторые свойства базисных функций пробных пространств.

21.3. Дискретные функции Грина в подобластях

21.4. Доказательство оценок (20.8)

§22. Функции Грина в подобластях.

22.1. Теорема о частичных функциях Грина.

22.2. Два вспомогательных оператора.

§23. Проверка условий теоремы 22.1.

23.1. Проверка условий теоремы 22.1 для подпространств Н

23.2. Схема оценивания функции Грина в одномерном случае.

23.3. Доказательство леммы 23.2.

23.4. Доказательство оценок (20.3) в двумерном случае.

Обозначения а] - целая часть вещественного числа а N - множество натуральных чисел

АГ2'" = {(г,;) е ТУ2 : 1 < г,^ < п} Z -множество целых чисел

-множество целых неотрицательных чисел Я - множество вещественных чисел е - малый положительный параметр /г - сеточный параметр

С? Съ Сг, • • • - обозначения положительных констант, не зависящих от е, К

Если для некоторой величины 7 имеют место оценки ¡7( < С|/3|, то будем писать 7 = 0(/3), а если 0 < С\\(5\ < |7| < С21|? то

7 = 0\*((3)

Пусть а = {аг} 6 Я". Тогда символ |а| обозначает вектор из Яп с элементами |аг-|.

Пусть А = {а0-} — п х п-матрица. Тогда символ |А| обозначает п х п-матрицу с элементами

Ьр, 1Р - пространства Лебега 1 < р < оо с нормой || ||р Пусть А = {а^} - конечная или бесконечная матрица, определяющая ограниченный оператор в 1Р. Тогда || А ||р - норма оператора А, || А ||= тах{|| А ||ь || А Н^} сопс1(А) =|| А 112Ц А~1 Ц2 спектральное число обусловленности матрицы или оператора, виррА = {{г,]) Е г2 : ау- ф 0} - единичная матрица или оператор

- символ Кронекера Умножение бесконечных матриц понимается в смысле суперпозиции соответствующих операторов в 1Р1 т. е. И = А1А2 означает, что йц = £кег а\как]

С = й1ад{0\, • • •, Сгп} - обозначение диагональной или блочно- -диагональной матрицы №сИад{—Пр,Ер1—Ер}, 1 < р < п - обозначение трехдиаго-нальной или блочно- -трехдиагональной матрицы (блоки и Рп отсутствуют).

ПРМ - псевдоразреженные матрицы

СЛАУ - система линейных алгебраических уравнений

ММП - метод матричной прогонки

МСГ - метод сопряженных градиентов

ДБПФ - дискретное быстрое преобразование Фурье