Меновщиков Александр Викторович. Операторы композиции в пространствах Соболева - Орлича: диссертация ... кандидата Физико-математических наук: 01.01.01 / Меновщиков Александр Викторович;[Место защиты: ФГБУН Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук], 2018

**Введение к работе**

**Актуальность темы. В** данном диссертационном исследовании проводится изучение ограниченных операторов композиции в пространствах Соболева — Орлича, а также отображений, порождающих такие операторы (отображение *f* : *D* —> *D'* порождает оператор композиции *if\** по правилу *ip\*f = f* *о if* для любой / *: D'* -> R).

Для получения описания исследуемых объектов решается несколько задач.

1. Нахождение необходимых и достаточных условий, при которых гомеоморфизм *if* : *D* —> *D'*, где *D, D' —* области в Rn, *п* > 2, порождает ограниченный оператор композиции *if\* : LlM* *(D')* —> *LlM(D).*Заметим, что если TV-функции М, Mi, определяющие пространства Соболева — Орлича, задаются равенством *М*(*и) = uq, М\*(*и) = ир,* где 1 *< q < р < оо, то* задача сводится к случаю пространств Соболева *Lr.*
2. Описание свойств регулярности обратного отображения к гомеоморфизму класса Соболева — Орлича *Wj^* (порождающего ограниченный оператор композиции *(f\* : LlM* *(D')* —> *LlM(D))* по известным свойствам регулярности прямого отображения. В качестве следствия доказывается теорема об условиях, при выполнении которых обратный гомеоморфизм порождает ограниченный оператор композиции другой пары пространств Соболева — Орлича, определяемой по первой.
3. Изучение вопроса о полунепрерывности снизу коэффициента искажения класса отображений, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича. Установление данного свойства для класса отображений играет важную роль в исследовании вариационных задач, в частности задач теории упругости. В настоящей работе оно применяется для доказательства существования решения задачи минимизации функционала энергии.

В истории изучения операторов композиции можно выделить три основных направления, которые возникли при решении прикладных задач в различных областях. Первое направление стало развиваться после публикации Е. Шредером в 1871 году одной из наиболее ранних работ по теории операторов композиции [1], в которой он изучает следующую задачу: *определить функцию f и константу а такие, что*(/ о *T)(z) = cif(z) для всех z из соответствующей области, в которой определена функция Т.* Решение этой задачи было предложено в статье ] в 1884 году. В дальнейшем изучение операторов композиции в случае, когда порождающее его отображение является голоморфной функцией и действует между областями в С или Сп, стало классическим для данной теории. Первое систематическое исследование по данному направлению приведено в работе Г. Шварца 1969 года ]. В последние годы изучение оператора композиции, порожденного голоморф-

ным отображением, проводилось в различных функциональных пространствах (пространства *Нр,*пространства Бергмана и общие пространства Хар-ди). В качестве современных работ в данном направлении можно привести статьи С. Стевича -], в которых изучается ограниченность и компактность оператора, действующего из смешанного пространства в пространство типа Блоха и Бергмана, а также рассмотрен случай весового оператора композиции. Необходимость изучения оператора композиции в указанных выше пространствах возникает при решении задач теории дифференцируемых динамических систем, статистической механики и теории обобщенных функций (см., например, ,]).

Следующее крупное направление связано с задачами топологической динамики, теории групп преобразований и изучением непрерывных функций. Объектом исследования в нем является оператор на топологических пространствах, порожденный непрерывным отображением. В качестве примера приведем работы -].

Третьим направлением в изучении операторов композиции является рассмотрение операторов, действующих на пространствах с мерой и порожденных измеримым отображением. Вопросы о свойствах таких операторов возникают в теории энтропии, эргодической теории и классической механике (см. [, ]). В первую очередь такие операторы рассматривались на пространствах *Lp* (одно из наиболее ранних систематических изложений исследований в этом направлении — работы Нордгрена и Риджа ,15]). Естественным развитием данной тематики является варьирование исходных функциональных пространств.

Особый интерес при обзоре темы диссертационного исследования представляют работы С.К. Водопьянова и А.Д. Ухлова -21], которые также можно отнести к третьему направлению. В них были получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие ограниченность оператора композиции (/?\* : L:, —> *L* пространств Соболева, действующих по правилу *(p\*f = fotp.*

Отображения, порождающие такие операторы, называются отображениями с ограниченным (р,д)-искажением, а при *р = q = п* этот класс совпадает с классом квазиконформных отображений (см. ]). История установления такой связи между теорией операторов композиции на пространствах Соболева и квазиконформным анализом берет начало в работах, направленных на решение задачи, сформулированной Ю.Г. Решетняком в 1968 году: требовалось описать все изоморфизмы *ip\** однородных пространств Соболева *Ln,* порожденных квазиконформными отображениями *Lp* евклидова пространства Rn по правилу = f о ср.

Естественным продолжением приведенных исследований является изучение свойств отображений, порождающих операторы композиции в других функциональных пространствах «Соболевского типа». В данной диссертации проводится изучение таких операторов в пространствах Соболева — Орлича.

Пространства Орлича обобщают *Ьр* пространства и более тонко учитывают характер функций, их составляющих.

Одним из фундаментальных результатов в теории Lp-пространств является доказанная в 1910 году Ф. Риссом (см. ]) теорема о том, что *(Lp)\* = Lp>,* где]/ — двойственный *кр* индекс, то есть *l/p+1/p'* = 1. Для доказательства этого факта используется неравенство *uv < ир* */p + vp* */р', u,v* > 0. В 1912 г. в работе ] это неравенство было обобщено У. Юнгом на случай выпуклых функций *(uv* < *М(и)* + *M\*(v)).* На основании этих результатов в 1931 г. 3. Бирнбаум и В. Орлич опубликовали работу ], заложившую основу теории двойственных функций и в дальнейшем приведшую к введению пространств Орлича.

В 1932 году В. Орлич в статье ], используя понятие двойственной функции, дает определение пространств *Ьм,* снабжая их следующей нормой

*\и\\* = sup

*velM(D)* ***l(v;M\*)<l< em=""></l<>***

*/ u(x)v(x)dx*

*В изначальных предположениях Орлича функция М должна была удовлетворять А2-условию (распространение на более широкий класс было получено в 1936 году в работе ]). Впервые термин «пространство Орлича» был использован в 1949 году в работе ] А. Заанена. В 1950 X. Накано, а в 1955 В. Люксембург (см. , ]) предложили второй метод введения нормы в пространстве Ьм, основанный на использовании функционала Минковского и позволяющий проводить ее фактическое вычисление. Несмотря на то, что в работах X. Накано такая норма была введена на 5 лет раньше, ее принято называть «нормой Люксембурга».*

*В качестве одних из наиболее ранних работ, в которых возникают пространства Соболева — Орлича, можно привести монографию Ю. Дубинско-го [], статьи Т.К. Дональдсона и Н.С. Трюденгера ,], а также работы Р. Адамса [, ]. Рассмотрение пространств Соболева — Орлича вместо классических Соболевских пространств позволило получить более точные теоремы вложения ] (окончательный результат получен в терминах пространств Орлича — Лоренца, см. ]). Другой важной изначальной мотивировкой рассмотрения такого обобщения было решение задачи Дирихле для эллиптических операторных уравнений (см., например, ]).*

*Изучение приведенных выше работ позволяет сделать вывод о том, какого рода улучшения и уточнения по сравнению со случаем Ьр возможно получить при использовании пространств Орлича. В рамках данной диссертационной работы мы описываем необходимые и достаточные условия, при которых отображение Lp порождает ограниченный оператор композиции пространств Орлича и Соболева — Орлича. Полученные результаты используются для изучения регулярности отображений, обратных к гомеоморфизмам*

*класса Соболева — Орлича. Далее исследуется свойство замкнутости относительно локально равномерной сходимости отображений, порождающих оператор (/9\*, необходимое для решения вариационных задач теории упругости. Обобщение полученных в работах [37, ] результатов в этом направлении даст возможность изучить аналогичные проблемы теории упругости для более широкого класса отображений.*

***Цели и задачи.****Цель диссертационной работы — изучение свойств отображений, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича.*

***Основные положения, выносимые на защиту.***

*Установлены необходимые и достаточные условия, при которых гомеоморфизм евклидовых областей порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича.*

*Определены свойства регулярности отображения, обратного к гомеоморфизму класса Соболева — Орлича, по известным свойствам регулярности прямого отображения.*

*Доказана полунепрерывность снизу коэффициентов искажения отображений из рассмотренных классов.*

*Используя полученные результаты, доказана теорема существования задачи минимизации функционала энергии для специальных классов отображений в условиях поливыпуклости и коэрцитивности функции запасенной энергии.*

***Научная новизна.****Все основные результаты являются новыми.*

***Теоретическая и практическая значимость.****Результаты носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в различных областях анализа, геометрии, уравнений в частных производных и теории упругости. Результаты диссертационного исследования могут быть применены в образовательном процессе при организации спецкурсов по теории функциональных пространств и квазиконформному анализу, предназначенных для студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений*

***Апробация работы.****Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:*

*Международная научная конференция «Метрические структуры и  
управляемые системы». Новосибирск, 2015.*

*Международная научная конференция «Геометрический анализ и тео  
рия управления». Новосибирск, 2016.*

*Семинар по геометрическому анализу, Институт математики им.  
С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. Руководитель: д. ф.-м. н., профес  
сор С. К. Водопьянов.*

*Семинар лаборатории геометрической теории управления, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. Руководитель: д. ф.-м. н., профессор А. А. Аграчев.*

***Публикации.****Полученные результаты опубликованы в пяти печатных изданиях [-], из которых три изданы в журналах, рекомендованных ВАК [-], и два — в тезисах докладов и материалах конференций ]. Все сформулированные результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Научному руководителю С. К. Водопьянову принадлежат формулировки задач и общее руководство работой.*

***Структура и объем диссертации.****Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 124 наименования и приведен в порядке цитирования. Общий объем диссертации составляет 98 страниц.*