ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК: 519.56 (575.2) (043.3)

ДЖУРАЕВ ХАЙРУЛЛО ШАРОФОВИЧ

МОДЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ И МАССЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Специальность 01.04.07 - физика конденсированного состояния

АФТОРЕФЕРАТ

на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Душанбе – 2019

Работа выполнена на кафедре вычислительных машин, систем и сетей Таджикского национального университета.

Научные консультанты:	**Комилов Косим** -доктор физико-математических наук, профессор; **Махсудов Барот Исломович** -доктор физико-математических наук, доцент.
Официальные оппоненты:	**Тимофеев Николай Александрович**-доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой оптики Санк-Петербургского государственного университета; **Тимеркаев Борис Ахунович** - доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой общей физики Казанского национального исследовательского технического университета им А.Н.Туполева – КАИ; **Горшунов Борис Петрович** - доктор физико-математических наук, профессор, зав. лабораторией терагерцовой спектроскопии Московского физико-технического института (НИУ «МФТИ»).
Ведущая организация:	ОАО «Научно-исследовательское предприятие гиперзвуковых систем» Российский Федерации. Санкт-Петербург.

Защита состоится «____» _________ 2019 года в ____ часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.188.02 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Таджикском национальном университете по адресу: 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17, факс (992-372) 21-77-11, Зал заседаний Ученого совета ТНУ.

Отзывы направлять по адресу: 734025, г.Душанбе, проспект Рудаки, 17, ТНУ, диссертационный совет Д 999.188.02, E-mail: tgnu@mail.tj.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте

Таджикского национального университета http://www.tnu.tj (734025, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17).

Автореферат разослан «____»_____________ 2019 г.

Ученый секретарь объединенного
диссертационного совета Д 999.188.02,
кандидат физ.мат. наук, СНС Табаров С.Х.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Процессы энерго- и массопереноса лежат в основе всех явлений, наблюдаемых в природе. Понимание этих процессов и их описание является первостепенной задачей, без решения которой невозможно поступательное движение человеческого общества. Эта задача становится особенно актуальной в связи с прогрессом в создании все более сложных технических устройств, появлением новых материалов и технологических процессов. В качестве примера можно привести необходимость описания явлений в неравновесных средах, высокотемпературных процессов, процессов тепло- и массопереноса в гетерогенных системах при фазовых и химических превращениях, изучения теплового (радиационного) воздействия на различные вещества, например, лазерного излучения на твердое тело и другое.

Как правило, процессы энерго- и массопереноса – это сложные и многоэтапные физическо-химические процессы. При этом важно знать конкретные механизмы, лежащие в основе этих процессов и явлений, причины устойчивости/неустойчивости поведения систем, а также другие характеристики, непосредственно отражающиеся на эффективности, долговечности, надежности, физической и экологической безопасности используемых технологий, в том числе энергетических. Например, одним из наиболее интересных научно-технических применений полупроводниковых лазеров и гетеролазеров, работающих в непрерывном режиме генерации при комнатной температуре, является создание новых и развитие существующих нанотехнологий. Эти технологии применяются при обработке материалов, в системах записи и передачи информации, в медицине, в научных исследованиях и системах специального назначения. Исследование физических процессов, характерных для данных технологий, в том числе, скоростей превращения веществ, участвующих в этих процессах, является основополагающей задачей их развития и совершенствования.

Задачей исследователя, изучающего протекающие в природе процессы, является создание такой физико-математической модели, которая основана на физических законах и адекватно отражает содержание наблюдаемого явления. Результатом такого подхода должна быть формулировка соответствующих уравнений математической физики (УМФ), описывающих исследуемое явление. Как правило, эти уравнения формулируются относительно определенного числа произвольных (искомых) функций, характеризующих свойства физической среды. Если свойства среды известны, то УМФ в сочетании с краевыми и начальными условиями позволяют предсказать развитие физических процессов в пространственно-временном масштабе. Подобный подход относится не только к решению теоретических задач, но и к решению многочисленных проблем, возникающих при практическом использовании методов и результатов моделирования, в частности, в том случае, когда большое внимание приходится уделять вопросам переноса энергии, массы и оптимизации их температурной зависимости в различных конденсированных средах.

В свете вышесказанного представляется актуальной проблема построения физико-математических, численных и компьютерных моделей явлений переноса энергии и массы с помощью корректной формулировки некорректно поставленных задач путем введения параметров регуляризации в качестве пробных математических параметров.

Цель работы заключается в теоретическом исследовании и создании математических моделей (ММ) процессов энерго (тепло)- и массопереноса в конденсированных средах, предусматривающих регуляризацию начальных и граничных условий с приданием полученным решениям свойства устойчивости к малым изменениям начальных возмущений.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие основные задачи:

-создание ММ стационарных и нестационарных тепловых процессов в конденсированных средах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик на основе стационарной и нестационарной теории переноса тепла и массы;

-усовершенствование приближенных аналитических методов решения краевых и начальных задач для стационарных и нестационарных УМФ, обладающих устойчивостью к малым изменениям начальных возмущений с помощью интегрального преобразования и суммирования рядов Фурье, а также аналитический и численный анализ закономерностей стационарного и нестационарного распространения тепла в конденсированных средах;

-создание ММ процессов горения и взрыва в конденсированных средах с учетом теплообмена с окружающей средой и аналитическое исследование критических условий примере практических модельных задач типа распределение тепла в плоской пластине, тепловой взрыв в телах цилиндрической и сферической форм;

-**разработка** ММ нанослойных оптических волноводов для исследования температурной зависимости излучательных характеристик многослойных инжекционных лазеров;

-**создание** программ по численному моделированию оптимизации влияния параметров гетеронаноструктуры на температурную зависимость порогового тока инжекционных лазеров и оптимизация параметров наноструктуры для улучшения температурной зависимости излучательных характеристик гетеролазеров;

-**численный расчёт** характеристик реальных гетеронаноструктур с использованием оптимизированной ММ инжекционного лазера и определение температурной зависимости пороговых токов симметричных и асимметричных гетеролазеров, сравнение результатов численного расчёта влияния параметров гетеронаноструктур на температурную зависимость излучательных характеристик инжекционных лазеров с экспериментом;

-исследование скорости распространения тепла в ограниченных и неограниченных средах в отсутствие и при наличии внешнего источника;

-создание ММ лазерного нагрева твердых тел на основе волнового уравнения теплопроводности;

-исследование потока вещества в сосудах плоской, цилиндрической и сферической формы;

-определение характерного времени релаксации (параметра регуляризации) теплового и массового потока, условий стабилизации и согласования параметра регуляризации с погрешностью, выбор сглаживающей и модулирующей функций (МФ).

Научная новизна диссертационного исследования заключается в том, что впервые:

-найдены приближенные аналитические решения стационарного и нестационарного УМФ для различных сред с учетом регуляризации начального и граничного условий в зависимости от физических характеристик.

-**разработан** метод приближенного аналитического решения прямой и обратной задач математической физики путём использования интегрального преобразования, разделения переменных и разложения в ряды с помощью методов регуляризации;

-**разработана** обобщённая ММ для описания стационарных физических процессов в различных средах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик;

-**установлена** закономерность стационарного распространения температуры в конденсированной среде, **определены** условия теплообмена и состояния равновесия в конденсированной среде, при которых тепловой поток и температура в фазовой плоскости перемещаются и разлагаются на устойчивую и неустойчивую области;

-предложен новый математический аппарат, отличающийся от ранее известных тем, что с его помощью можно решать существенно новые прикладные задачи на основе стационарного УМФ с переменным и постоянным коэффициентами;

-разработаны методы расчета и компьютерные программы для определения распределения температуры и теплового потока в осесимметричных конденсированных средах в окрестностях особых точек- в критических условиях горения и взрыва;

-**предложена** возможность применения аналитического метода построения семейства регуляризирующих алгоритмов (РА) начальной и граничной задач для стационарного и нестационарного УМФ на основе суммирования рядов и интегрального преобразования Фурье;

-**предложен** удобный метод численного расчёта плоского активного оптического волновода лазеров на основе многослойных гетеронаноструктур с привлечением метода МФ и оптимизации параметров инжекционных лазеров на основе гетеронаноструктур с целью улучшения температурных зависимостей излучательных характеристик гетеролазеров;

-**проведён** численный расчёт температурной зависимости излучательных характеристик инжекционных лазеров на основе наноструктур от параметров гетероструктуры и **установлена** зависимость температурного поведения порогового тока инжекционных лазеров на основе асимметричных AlGaAs/InGaAs-/GaAs гетеронаноструктур с одной и двумя квантовыми ямами в зависимости от толщины и состава нанослоёв;

-**показано**, что температурная зависимость порогового тока лазеров на основе асимметричных гетеронаноструктур по сравнению с лазерами на основе симметричных гетеронаноструктур меняется в сторону ухудшения;

-**предложены** новая ММ, описывающая восстановление начальных рас-пределений температуры и потока вещества, приближенное аналитическое решение уравнения гиперболического типа, описывающего распределение температуры и перенос массы в средах с различной геометрией;

-**разработана** ММ лазерного нагрева твердых тел на основе метода искусственной гиперболизации и **установлена** непрерывная зависимость распределения температуры и потока вещества от их начального распределения;

-**предложены** условия стабилизации и согласования параметра регуляризации для этих задач, способы выборов МФ, а также зависимость параметра регуляризации от погрешности.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в том, что полученные в диссертации результаты в аналитическом виде могут быть использованы при разработке компьютерных моделей физическо-технических и других научно-прикладных задач, а также в образовательном процессе, при разработке принципиально новых, более эффективных технологий создания теплотехнических устройств.

Представленная работа является обобщением теоретических исследований, выполненных автором на кафедре вычислительных машин, систем и сетей Таджикского национального университета. Исследования проводились согласно планам госбюджетных тематик ТНУ, зарегистрированных под № 0107ТД648 (01.01.2006-31.12.2010) «Аналитическое исследование и численное решение некоторых задач математической физики и информационной технологии» и №0110РК15084(а) (01.01.2011-31.12.2015) «Исследование физических основ информационных процессов и методов регуляризации некоторых задач математической физики», а также проекта Президентского фонда фундаментальных исследований «Метод устойчивых решений некоторых задач математической физики», № 0108ТД745, 2008-2010 гг.

Методы исследования. Основные результаты диссертации получены с применением методов теоретической и математической физики, теории дифференциальных уравнений, теории обратных и некорректно поставленных задач, а также методов, используемых в теплофизике и теплотехнике.

Основные положения, выносимые на защиту:

-**решение** прямой и обратной задач математической физики путём использования разложения в специальные ряды, интегрального преобразования и разделения переменных с помощью методов регуляризации;

-**решение** дифференциального уравнения второго порядка по времени для прямой и обратной задач математической физики, устойчивое к начальным возмущениям;

-**ММ** для описания стационарных физических процессов в различных конденсированных средах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик;

-**закономерность** стационарного распространения температуры и тепла в среде, условия их устойчивости/неустойчивости, при которых очаг теплового потока перемещается с ростом температуры;

-**аналитический метод** построения семейств регуляризирующих алгоритмов для начальной и граничной задачи для стационарного и нестационарного УМФ на основе интегрального преобразования и суммирования рядов Фурье;

-**аналитический математический аппарат**, отличающийся от известных ранее тем, что с его помощью можно решать существенно новые прикладные задачи на основе стационарного УМФ с переменными и постоянными коэффициентами;

-**программы** реализации численных расчетов распределения температуры и теплового потока в осесимметричных конденсированных средах в окрестностях особых точек- критических условиях горения и взрыва.

-**нелинейный** характер изменения температуры в ограниченных и неограниченных конденсированных средах с ростом линейных размеров образца, плотности потока массы со временем в сосудах различной геометрической формы, а также уменьшение температуры по мере проникновения тепла вглубь тела и его переход к постоянному значению в предельном случае;

-**линейная** зависимость температуры тела от длины образца при наличии внешнего источника и **экстремальная временная** зависимость температуры тела в условиях лазерного нагрева;

-**методика** численного расчёта плоского активного оптического волновода гетеронанолазеров, базирующаяся на методе МФ, а также температурной зависимости излучательных характеристик лазеров на основе многослойных гетеронаноструктур;

-**температурная зависимость** порогового тока гетеронанолазеров от параметра асимметрии гетероструктур для лазеров с одной и двумя квантовыми ямами; зависимость излучательных характеристик лазеров на основе гетеронаноструктур от толщины и материального состава нанослоёв; высокоэффективная методика оптимизации конструкции гетеролазера для улучшения температурной зависимости излучательных характеристик гетеронанолазеров;

-условия стабилизации и согласования параметра регуляризации для исследуемых задач, способы выбора сглаживающих функций и МФ, а также зависимость параметра регуляризации от погрешности.

Достоверность полученных результатов подтверждается использованием ММ, адекватных реальным физическим процессам, применением обоснованных методов построения приближенных аналитических решений прямой и обратной задач математической физики, которые непрерывно зависят от начального потока энергии, плотности вещества, плотности потока вещества, скорости распространения температуры и зависимости распределения температуры от критических условий, теоретической обоснованностью результатов работы, согласованностью полученных результатов с данными, полученными другими методами исследования.

Апробация работы. Основные результаты работы доложены на: междунар. науч.-практ. конф. «Перспективы развития науки и образования в XXI веке» (Душанбе, 2007, 2010, 2011); Семинаре-совещании «Наука – производству» (Душанбе, 2007); междунар. конф. «Математическая физика и ее приложения» (Самара, Россия, 2008, 2010, 2012, 2014); междунар. конф. «Современные проблемы физики конденсированных сред и астрофизики» (Душанбе, 2010); междунар. конф. «Современные вопросы молекулярной спектроскопии конденсированных сред» (Душанбе, 2011); научно-теор. конф. проф.-преп. состава ТНУ (ежегодно в период 2008-2018 гг.); Всероссийской науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2010, 2012, 2016); междунар. конф. «Перспектива развития физической науки» (Душанбе, 2017); междунар. конф. «Актуальные проблемы современной физики» (Душанбе, 2018); конф. проф.-преп. состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием) БГТУ (Минск, 2017); научных семинарах физического факультета и кафедры вычислительных машин, систем и сетей ТНУ.

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликованы 54 научных труда, в том числе 4 монографии и 27 статей в рецензируемых изданиях из Перечня ВАК Российской Федерации.

Личный вклад соискателя заключается в его непосредственном участии на всех этапах научного исследования, начиная с постановки и планирования задач исследования, выполнения аналитических исследований, численных расчётов, получения исходных данных, кончая обсуждения, обобщения и апробации полученных результатов и подготовки основного материала к публикации. В диссертации использована только та часть опубликованного совместно с другими материала, в которую автором внесён равноценный вклад.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, выводов и списка цитируемой литературы из 304 наименования. Общий объем диссертации составляет 254 страницы, включая 221 страниц текста, 72 рисунка и 10 таблиц.

Ключевые слова: прямая и обратная задачи, корректность/некорректность, устойчивость, тепло- и массоперенос, температура, параметр регуляризации, время релаксации, гетероструктура, пороговый ток, оптимизация.

Краткое содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы диссертации и сформулированы цель и задачи работы. Определена научная и практическая значимость проведённых исследований, указан личный вклад автора, приведены основные положения, выносимые на защиту, дана информация об апробации основных результатов работы.

Первая глава диссертации посвящена анализу современного состояния исследуемой проблемы. Рассматриваются проблемы, возникающие при исследовании процессов переноса энергии и массы в различных конденсированных средах. Кратко обсуждаются различные математические методы, применяемые при решении прямой и обратной задач переноса энергии и массы, в особенности, преимущества метода специальных рядов и регуляризации.

Обсуждается проблема высокотемпературной генерации в лазерах на основе гетероструктур и температурной зависимости излучательных характеристик инжекционных лазеров. Рассмотрены различные аспекты моделей и методов расчёта гетеронанослойных оптических волноводов и температурной зависимости излучательных характеристик инжекционных лазеров.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию зависимости стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах методом регуляризации. Объектом исследования являются процессы стационарного переноса тепла в различных конденсированных средах.

В материальных средах распространение тепла всегда связано с тепловым движением структурных единиц. Если процесс теплопереноса является сложным, то для его исследования используются методы, обобщающие результаты различных более простых методов. Одним из таких методов является метод фазовой плоскости. На основе этого метода исследуется стационарное распределение теплового потока в зависимости от температуры в конденсированных средах.

Поиск решения задачи горения конденсированной среды с учетом теплового потока и температурной зависимости его теплофизических характеристик приводит к формулировке задачи для среды с устойчивым и неустойчивым состояниями. В этом случае нами показано, что можно ввести в рамках методов математической физики (ММФ) эволюционную задачу, описываемую стационарной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{q}{\lambda} - \eta_1 T, \\ \dfrac{dq}{dx} = \varphi(T) - \eta_2 q, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $T = T(x)$ – температура в точке $x, (K)$, $q = q(x)$– плотность теплового потока в точке x, $Вт/м^2$,

$\eta_1 = \frac{\mu - 1}{x + \varepsilon - (\mu - 1)(x + \varepsilon)^{\mu}}$, $\left(\frac{1}{м}\right)$ и $\eta_2 = \frac{1 - \mu(\mu - 1)(x + \varepsilon)^{\mu - 1}}{x + \varepsilon - (\mu - 1)(x + \varepsilon)^{\mu}}$, $\left(\frac{1}{м}\right)$ - коэффициенты уравнения (2.1), соответственно, λ – коэффициент теплопроводности $Вт/(м \cdot К)$, μ определяет геометрическую форму среды и принимает значения $\mu = 0, 1, 2$; ε - параметр регуляризации, $\varphi(T)$ –функция источника тепла.

Будем рассматривать состояние равновесия и устойчивость системы. Приравнивая левые части уравнения (2.1) нулю, получим

$$\begin{cases} -\frac{q}{\lambda} - \eta_1 T = 0, \\ \varphi(T) - \eta_2 q = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Решение системы уравнений (2.2) позволяет определить особую точку в фазовой плоскости (T, q). В зависимости от значения функции $\varphi(T)$, можно иметь бесконечное число равновесных состояний, то есть уравнение (2.2) может иметь бесконечное множество решений, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Таким образом, состояние равновесия является особой точкой, в которой плотность теплового потока сливается с потоком энергии, то есть $-\lambda \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_{x = x^*} = q(x^*)$.

Для доказательства вышеприведенного утверждения рассмотрим процесс распространения тепла в положительном направлении оси x. В этом случае граничные условия для температуры и плотности теплового потока можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left.q\right|_{x=0} = 0; \\ &-\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=h} = \gamma(T_1 - T_2) \quad \text{и} \quad \left.q\right|_{x=h} = \gamma(T_1 - T_2), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где T_1 и T_2 соответственно, температура в начале и конце образца, а γ – коэффициент теплоотдачи $Вт/(м^2 \cdot с)$; h – длина образца ($м$).

Решая совместно уравнения (2.1) с учетом граничных условий (2.3), определим выражение для зависимости плотности потока тепла от температуры среды, которая имеет вид

$$q = \frac{\lambda(k\eta_1 T + \varphi(T))}{\lambda\eta_2 - k}, \text{ при } \eta_2 \neq \frac{k}{\lambda}. \quad (2.4)$$

На основе выражения (2.4) проведем численный расчёт зависимости плотности теплового потока от температуры. При этом функция источника задана в виде $\varphi(T) = \alpha_1 T - \alpha_2 T^3$, где α_1, α_2 – коэффициенты пропорциональности. Значения коэффициентов α_1 и α_2, λ, и χ взяты из работы [1]. Результаты численных расчетов представлены на рис. 2.1 *а*.

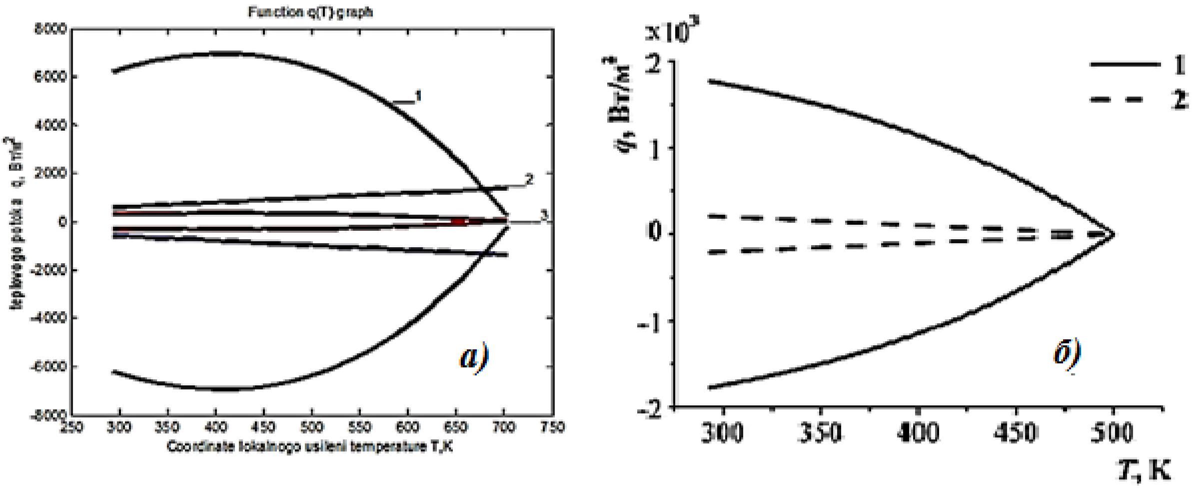


Рис.2.1. Зависимость величины теплового потока от температуры на фазовой плоскости (q,T) (*а*): кривая 1 - сепаратрисса $q(T)$ от T; 2 -граничные условия; 3 -теплообмен с учетом источника; *б*- то же по результатам [1].

Анализ полученных результатов, показывает, что нелинейность источника тепла приводит к росту теплового потока на порядок, практически во всем диапазоне температур от 293 до 700 К на фазовой плоскости.

В разделе 2.3 второй главы приведены результаты исследования процесса распространения тепла в среде плоской геометрической формы. Из физического смысла поставленной задачи следует, что характер решения и условие его существования зависят лишь от параметров x, ε. Естественно ожидать, что при малых x и $\varepsilon \equiv 0$, когда велик тепловой поток в плоской среде, решение системы (2.1) существует, а при больших χ и $\varepsilon \equiv 0$ эти уравнения не имеют решения. Таким образом, существуют критические значения $x_{кр}$ и $\varepsilon_{кр}$, разделяющие области существования и не существования решений системы уравнений. Конкретные значения $x_{кр}$ и $\varepsilon_{кр}$ можно найти в результате полного решения системы уравнений (2.1) при выполнении условий (2.3).

В рассматриваемом случае из решения уравнений (2.1) для функций температуры и плотности теплового потока получим следующие выражения:

$$T(x,\varepsilon)=\pm\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-\frac{\lambda^2 k}{\alpha_2(x+\varepsilon+1)[\lambda(2\lambda-1)+k(1-\lambda)(x+\varepsilon+1)]}}, \tag{2.5}$$

$$q(x,\varepsilon)=\frac{\lambda^3 k}{(\lambda-k(x+\varepsilon+1))[\lambda(2\lambda-1)+k(1-\lambda)(x+\varepsilon+1)]}T(x,\varepsilon). \tag{2.6}$$

где значения α_1 и α_2 определяются из условия касания кривых (2.5) и (2.6). Отсюда следует, что $-\lambda\left.\frac{\mathrm{dT(x)}}{\mathrm{dx}}\right|_{\mathrm{x=x^*}}=\mathrm{q(x^*)}$. Точка пересечения этих кривых разделяет область распространения температуры и плотности теплового потока на две подобласти: $T<T^*$, $q<q^*$ и $T>T^*$, $q>q^*$. В точке пересечения кривых должны выполняться следующие условия:

$$-\lambda\left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_{x=x^*}=q(x^*),\ \left.\frac{d}{dx}\left(-\lambda\frac{dT(x)}{dx}\right)\right|_{x=x^*}=\left.\frac{dq}{dx}\right|_{x=x^*}. \tag{2.7}$$

Из решения системы (2.7) можно найти значения коэффициентов α_1 и α_2, которые являются довольно громоздкими.

Далее, подставляя найденные значение α_1 и α_2 в выражения (2.5) и (2.6), можно определить значения температуры и теплового потока.

На рис.2.2 приведены результаты численных расчетов зависимости плотности теплового потока q и температуры T от координаты x на основе выражений (2.5) и (2.6) с учетом значений $\lambda=0{,}2\,Вт/(м\cdot К)$, $x=0{,}03\,м$, $\alpha_1=287.589\,Вт/(м^3\cdot К)$, $\alpha_2=0{,}0015\,Вт/(м^3\cdot К^3)$, $k=\lambda/(\varepsilon+1)$.

Как видно из рис. 2.2, в плоской среде с ростом линейных размеров тела плотность теплового потока q возрастает почти линейно, а с увеличением координаты тела (x) её температура T уменьшается нелинейно. Чем больше параметр ε, тем круче температурное распределение. В точке x = 0,54 выполняется условие (2.7) и она является точкой горения среды.

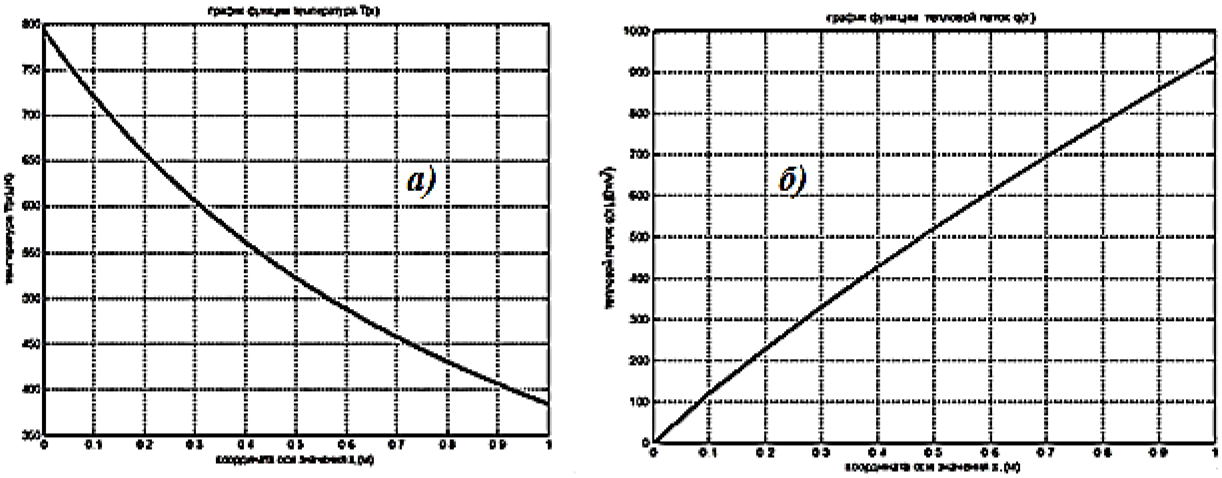


Рис.2.2. Зависимость температуры (*а*) и теплового потока (*б*)
от линейных размеров образца *x*.

В разделах 2.4 и 2.5 второй главы методика, разработанная в 2.3, применяется для исследования стационарного распространения тепла в средах цилиндрической и сферической форм, соответственно.

В третьей главе исследован процесс стационарного распространения тепла в бесконечной полосе $D = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 \le y \le y_0\}$, описываемой функцией $u(x,y,\mu,\lambda)$, уравнения для которой имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^{-\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\mu}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda u(x,y,\mu,\lambda) = 0, \tag{3.1}$$

$$u(x,0,\mu,\lambda) = \varphi(x), \quad y^{\mu}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x), \tag{3.2}$$

где $\mu \ge 0$ - известное число, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции.

Решение уравнения (3.1) для поля температуры $u(x,y,\mu,\lambda) = T(x,y,\mu,\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,y,\mu,\lambda) &= \varphi(x) + \frac{y^{1-\mu}}{1-\mu}\psi(x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{k!}\left[\frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(k+\frac{\mu}{2})}{2\Gamma(2k+\mu)\Gamma(1+\frac{\mu}{2})}\sum_{n=0}^{k}C_n^k\lambda^n\frac{d^{2(k-n)}\varphi(x)}{dx^{2(k-n)}} + \right. \\ &\left. + y^{1-\mu}\frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(k+1-\frac{\mu}{2})}{\Gamma(2k+2-\mu)\Gamma(1-\frac{\mu}{2})}\sum_{n=0}^{k}C_n^k\lambda^n\frac{d^{2(k-n)}\psi(x)}{dx^{2(k-n)}}\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Очевидно, что для найденного решения способом формального построения конструкций специальных рядов в виде (3.3) характерна лишь локальная сходимость.

В разделе 3.2 приведен регуляризирующий алгоритм (РА) для уравнения (3.1) при выполнении условия (3.2). Этому условию отвечают, например, стабилизирующие множители $g(s,\alpha)=\dfrac{1}{1+\alpha s^{2n}}$, $g(s,\alpha)=\exp(-(\alpha s)^{2n})$ и $g(s,\alpha)=\exp(-\alpha s^{2n}),\quad \alpha>0,\quad n\ge 1$.

Для каждой заданной сглаживающей функции $g(s,\alpha)$ имеем приближенное решение задачи (3.1)-(3.2) в виде

$$\begin{gathered}
u_\alpha(x,y,\mu,\lambda)=\varphi(x)+\frac{y^{1-\mu}}{1-\mu}\psi(x)+\\
+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{y^{2k}}{k!}\left[\frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(k+\frac{\mu}{2})}{2\Gamma(2k+\mu)\Gamma(1+\frac{\mu}{2})}\sum_{n=0}^{k}C_n^k\lambda^n Z_{\alpha n}(x)+\right.\\
\left.+y^{1-\mu}\frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(k+1-\frac{\mu}{2})}{\Gamma(2k+2-\mu)\Gamma(1-\frac{\mu}{2})}\sum_{n=0}^{k}C_n^k\lambda^n R_{\alpha n}(x)\right].
\end{gathered}\tag{3.4}$$

Здесь

$$Z_{\alpha k}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(-1)^k g(s,\alpha)s^{2k}\Phi(s)exp(-isx)ds,$$

$$R_{\alpha k}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(-1)^k g(s,\alpha)s^{2k}\Psi(s)exp(-isx)ds,\quad k=0,1,2,\cdots,N,$$

где $\Phi(s),\Psi(s)$-преобразования Фурье функции температуры $\varphi(x)$ и теплового потока $\psi(x)$, соответственно. При достаточно малом значении параметра регуляризации α решение (3.4) стремится к решению (3.3).

В следующем разделе этой главы исследован процесс стационарного распространения тепла в конденсированных средах при помощи уравнения Лапласа.

При $\mu=0$ и $\lambda=0$ из (3.3) и (3.4), применяя интегральное преобразование Фурье, получаем следующие выражения:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\left(\Phi_0(s)Ch(ys)+\Psi_0(s)\frac{Sh(ys)}{s}\right)\exp(-isx)ds\,, \qquad (3.5)$$

$$u_\alpha(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}g(s,\alpha)\left(\Phi_0(s)Ch(ys)+\Psi_0(s)\frac{Sh(ys)}{s}\right)\exp(-isx)ds\,. \qquad (3.6)$$

Далее, для всестороннего анализа полученных результатов, используя выражение (3.5) и (3.6), проведём численный расчет зависимости температуры от координаты x.

Следуя [2], функцию $u(x,y)$ выбираем в виде

$$u(x,y)=\frac{b-y}{(b-y)^2+(a-x)^2}+\frac{b-y}{(b-y)^2+(a+x)^2}\,.$$

При $y=0$ $u(x,y)=\varphi(x)=\frac{b}{b^2+(a-x)^2}+\frac{b}{b^2+(a+x)^2}$, а функция потока тепла принимает вид $\psi(x)=\frac{b^2-(a-x)^2}{b^2+(a-x)^2}-\frac{b^2-(a+x)^2}{b^2+(a+x)^2}$.

Возмущенную функцию теплового потока выбираем в виде

$$\tilde{\psi}(x)=\frac{b^2-(a-x)^2}{b^2+(a-x)^2}-\frac{b^2-(a+x)^2}{b^2+(a+x)^2}+\delta\frac{b^2-(a_1-x)^2}{b^2+(a_1-x)^2}-\frac{b^2-(a_1+x)^2}{b^2+(a_1+x)^2}\,.$$

Значения функций $u(x,y),u_\alpha(x,y)$ вычислены по формулам (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) при следующих значениях параметров: $\{-a<x<a,\ \ 0<y<b\}$; $\delta=3e^{-2};\ a=2;a_1=1.5;b=0.75$. Результаты численных расчетов представлены на рис.3.1.

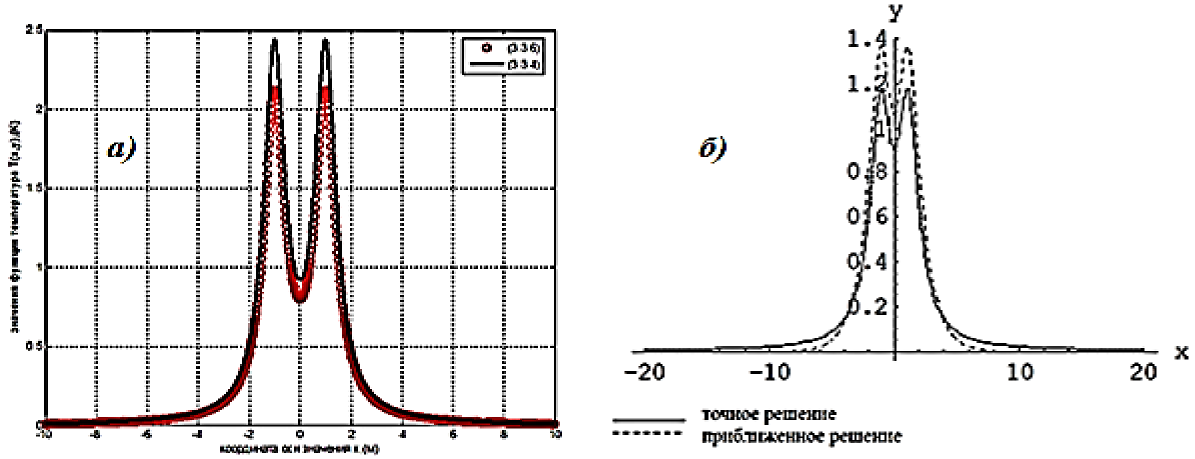


Рис.3.1. Точное и возмущенное решения задачи (3.3.1)-(3.3.2) (*а*): кружочки- точное решение (3.3.6); сплошная-возмущенное решение в виде функции (3.3.4); *б*-то же по данным [2].

Из рис. 3.1 следует, что приближенное решение заметно отличается от точного решения, как на близких, так и на дальних расстояниях. Приближенное решение близко к точному решению на близких расстояниях и отличается от точного решения на дальних расстояниях, что находится в качественном согласии с результатом работы [2].

Четвёртая глава диссертации посвящена исследованию процессов прямого и обратного распространения тепла в неограниченных и ограниченных средах методами регуляризации.

Поскольку процесс распространения тепла в конденсированных средах имеет волновой характер, в данной главе решены прямая и обратная задачи теплопроводности с применением метода искусственной гиперболизации. Смысл этого метода заключается в том, что в левую часть уравнения теплопроводности добавляется слагаемое вида $\alpha(\partial^2 T/\partial t^2)$, где α– характерное время процесса. Тогда уравнение теплопроводности принимает вид

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ . \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1), в отличие от уравнения теплопроводности, даёт конечную скорость распространения возмущений тепла в среде и позволяет решить обратную задачу теплопроводности, то есть его решение является устойчивым по отношению к исходным данным.

В разделе 4.1 рассмотрен процесс распространения тепла в неограниченной конденсированной среде при заданных начальных условиях $T = T_0(x,0)$. В этом случае решение уравнения (4.1) имеет вид

$$T_{\alpha N}(x,t) = \\ = \sum_{k=1}^{N} T_{0k} \exp(-\omega_k(\alpha)t)\left[1 + \alpha \frac{\omega_k(\alpha)}{\sqrt{1-4\alpha\lambda_k^2\beta}}\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{1-4\alpha\lambda_k^2\beta}}{\alpha}t\right)-1\right)\right]\sin(\lambda_k x). \tag{4.2}$$

На рис. 4.1 приведены результаты численных расчетов распределения температуры вдоль длины (x) образца на примере алюминиевого стержня на основе выражения (4.2). При этом значения параметров, входящих в (4.2), взяты из [3] (α=0,0118 с; λ = 228 Вт/(м·К); c_p = 0,896 Дж/(кг·К); ρ =2700 кг/м^3;

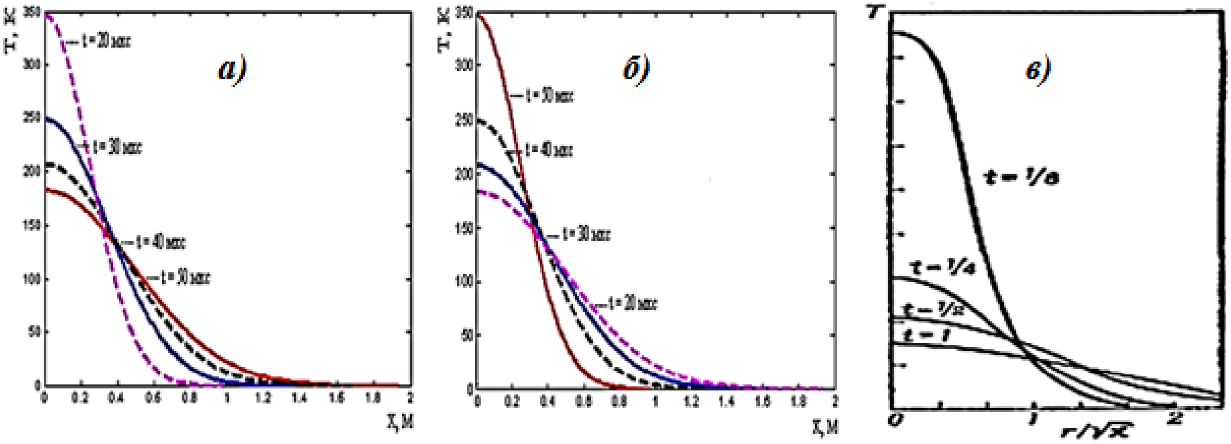


Рис.4.1. Зависимость распределения температуры вдоль длины образца при различных значениях времени: *а*- (t = 20мкс;30мкс; 40мкс; 50мкс); *б*-(t = 50мкс; 40мкс; 30мкс; 20мкс); *в* - результаты работы [4].

$\beta = \lambda/(c_p \cdot \rho)$ м^2/с; T_0=293 К).

Из рисунков видно, что температура от начального значения 350 К в окрестности точки $x = 0$ в течение 10 мкс падает до 250 К. В следующие 10 мкс наблюдается дальнейшее падение температуры до 200 К и т.д. К сожалению, в работе [4] нет конкретной информации о начальной температуре в точке $x = 0$. Поэтому при очевидном качественном согласии полученных нами данных с данными работы [4] проведение количественного сравнения наших результатов с результатами работы [4] затруднительно.

В разделе 4.2 исследован процесс распространения тепла в ограниченной среде. В этом случае начальное и граничное условия, соответственно, имеют вид

$$T = T_0(x,0);\ T\big|_{x=0} = T_1(t),\quad T\big|_{x=h} = T_2(t).$$

Общее решение уравнения (4.1) имеет вид:

$$T_{\alpha N}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} T_{0n}\,\frac{exp(\omega_n(\alpha)t)}{2\alpha\omega_n(\alpha) - \sqrt{1+4\alpha\beta\lambda_n^2}}\cdot$$
$$\cdot\left(\alpha\left(1 + exp\left(\frac{2\alpha\omega_n(\alpha) - \sqrt{1+4\alpha\beta\lambda_n^2}}{\alpha}t\right)\right) - \frac{\omega_n(\alpha)}{\sqrt{1+4\alpha\beta\lambda_n^2}}\right)sin(\lambda_n x) \tag{4.3}$$

где $\omega(\alpha) = -\dfrac{2\beta\lambda^2}{1+\sqrt{1+4\alpha\beta\lambda^2}}$.

На рис. 4.2 и 4.3 приведены результаты численных расчётов распространения тепла в ограниченной среде согласно (4.3). В качестве примера для проведения численных расчётов выбираем образцы из бронзы (75% Cu и 25% Sn; α =0,006 с; λ =25,9 Вт/(м·К); c_p =0,343 Дж/(кг·К); ρ =8660 кг/м^3) и дюралюминия (94-96% Al, 3-5% Cu, следы Mg; α =0,0217 с; λ=164,5 Вт/(м·К); c_p = 0,883 Дж/(кг·К); ρ = 2800 кг/м^3). Эти параметры взяты из справочника [3].

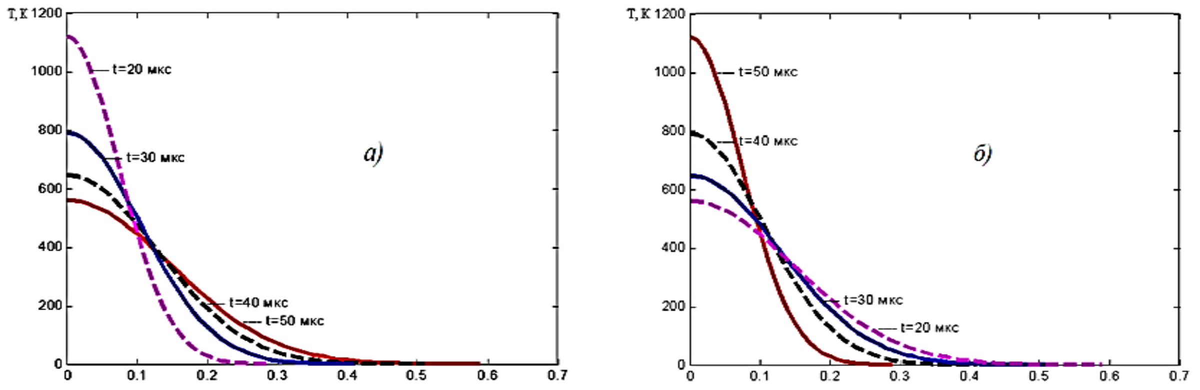


Рис. 4.2. Изменение распределения температуры вдоль длины x образца (бронзы) при различных значениях времени $t(мкс)$:

$а$- $(t = 20; 30; 50; 50)$; $б$- $(t = 50; 40; 30; 20)$.

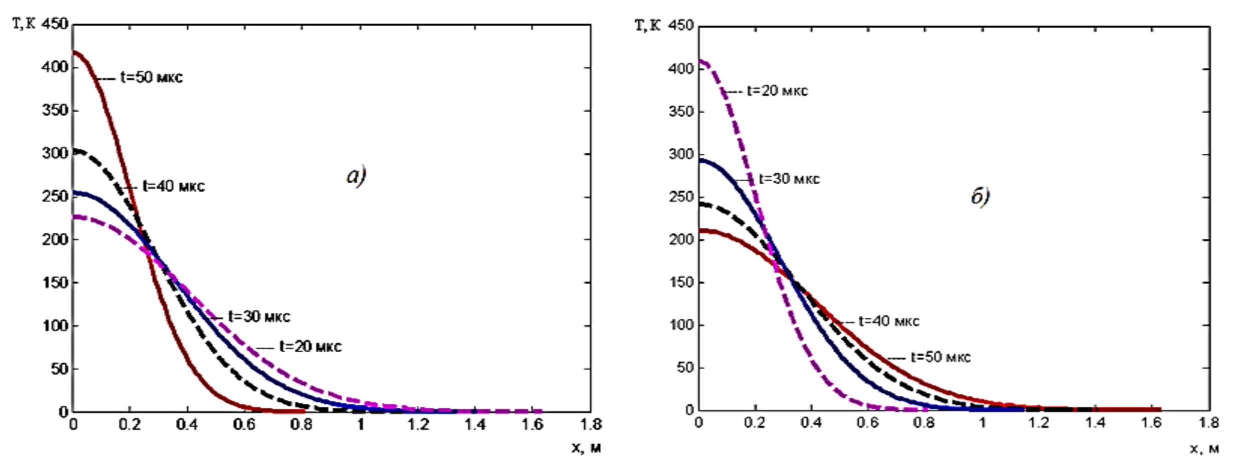


Рис. 4.3. Изменение распределения температуры вдоль длины x дюралюминиевого образца при различных значениях времени $t(мкс)$:

$а$- $(t = 50; 40; 30; 20)$; $б$- $(t = 20; 30; 50; 50)$.

Процесс теплопроводности, описываемый полученной нами формулой (4.3), обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения быстро распространяется на все пространство. Из формулы (4.3) и рис.4.2 и

4.3 видно, что тепло из точечного источника распространяется так, что уже в последующие моменты времени температура среды обращается в нуль асимптотически лишь на бесконечности.

В разделе 4.3 рассмотрен процесс распространения тепла в неограниченной среде при наличии внешнего источника. В этом случае уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = Q(x,t), \tag{4.4}$$

где $Q(x,t) = q(x,t)/(\rho \cdot c_p)$. Решение уравнения (4.4) при заданном начальном условии $T = T_0(x,0)$ имеет вид

$$T_\alpha(x,t) = T_{1\alpha}(x,t) + \int_0^t \Omega_\alpha(x,t,\tau)d\tau\,, \tag{4.5}$$

где $\Omega_\alpha(x,t,\tau)$- решение уравнения (4.1) с начальными данными $\Omega_\alpha(x,t,\tau)\big|_{t=\tau} = 0\,,\ \left.\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right|_{t=\tau} = Q(x,\tau)\,.$

На рис. 4.4 и 4.5 приведены результаты численных расчётов зависимости распределения температуры от времени при различных значениях толщины x слоя среды и при наличии постоянного внешнего источника

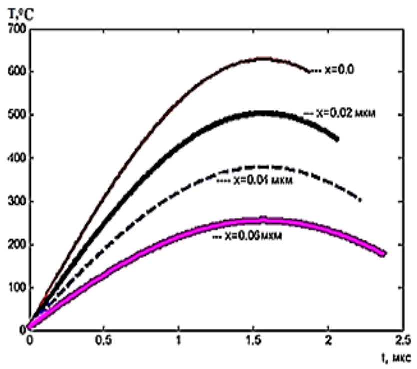


Рис. 4.4. Изменение температуры во времени $t(мкс)$ для алюминиевого сплава при разных x.

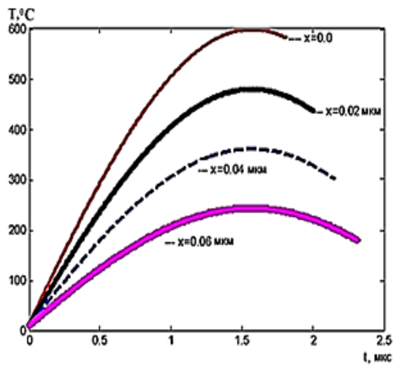


Рис.4.5. Изменение температуры во времени $t(мкс)$ для вольфрама при разных x.

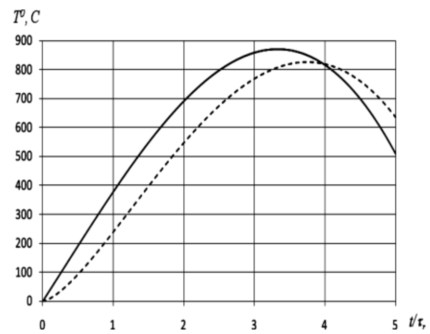


Рис.4.6. Изменение температуры во времени $t(мкс)$ при $x = 0.0$: сплошная-стал-15; штриховая –титан [5].

$Q = q_{\max} / \rho c_p$, где $q_{\max} \cong 3.65*10^8\ Вт/м^2$, на основе выражения (4.5). Рассмотрим случай, нормального падения тепла на поверхность среды. В качестве примера для проведения численных расчётов выбираем алюминиевый сплав Al-Si (87% Al; 13% Si; $\alpha = 0{,}0118\ c$; $\lambda = 163.9\ Вт/(м^2 \cdot K)$; $c_\rho = 0.871\ Дж/(кг \cdot K)$; $\rho = 2660\ кг/м^3$) и вольфрам ($\alpha = 0{,}0250\ c$; $\lambda = 162.8\ Вт/(м^2 \cdot K)$; $c_\rho = 0.126\ Дж/(кг \cdot K)$; $\rho = 19300\ кг/м^3$, *T=20 °C (293 K)*). Эти значения взяты из справочника [3].

На рис.4.6 представлены результаты численных расчетов работы [5]. В качестве материалов двухслойной пластины были взяты титан и сталь-15.

Теплофизические характеристики материалов приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1.

	λ, (Вт/м К)	c, (Дж/кг К)	ρ, (кг/м^3)	толщина, (м)	τ_r, с
Ст.15	55	565	7860	10^{-7}	10^{-11}
Титан	17	586	4500	10^{-7}	10^{-11}

Из рис. 4.4 и 4.5 следует, что ход зависимости распределения температуры по мере углубления в тело имеет нелинейный характер и с увеличением глубины (x) медленно уменьшается, что находится в качественном согласии с результатами работ [5,6].

В разделе 4.4 предложена ММ лазерного нагрева твердых тел на основе гиперболического уравнения теплопроводности. В этом случае общее решение уравнения (4.4) имеет вид:

$$T_\alpha(x,t) = T_{1\alpha}(x,t) + T_{2\alpha}(x,t), \tag{4.6}$$

где $T_{1\alpha}(x,t)$-функция температуры в виде (4.3), а $T_{2\alpha}(x,t) = \int_0^t \Omega_\alpha(x,t,\tau)d\tau$ - функция температуры.

На рис. 4.7 *а* приведены результаты численных расчётов лазерного нагрева твердых тел на примера образца из стали марки 40Х. Здесь $q_{\max} = 3{,}7 \cdot 10^8\ Вт/м^2$, параметр регуляризации $\alpha = 2.1977 \cdot 10^{-8}$, коэффициент тепло-

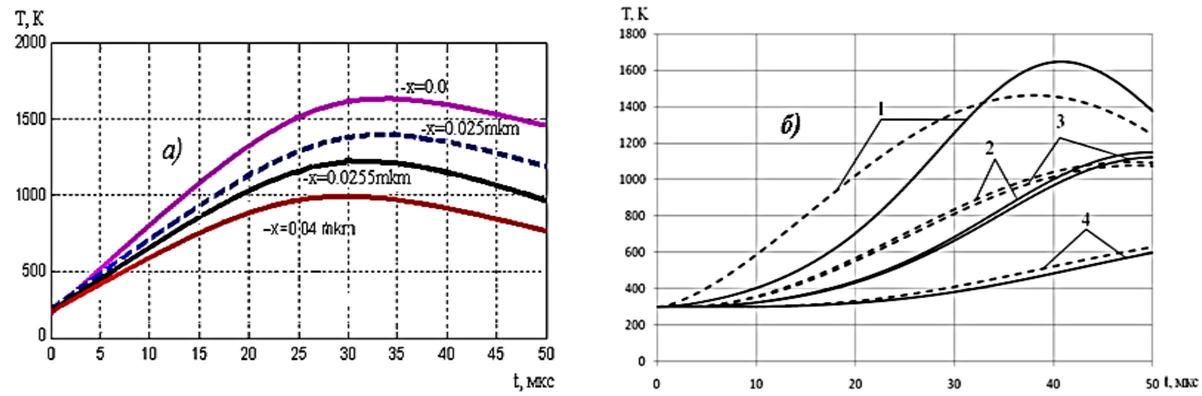


Рис. 4.7. Изменение температуры стали марки 40Х во времени при действии лазерного излучения при различных значениях толщины проникновения тепла (*а*): 1-при $x=0$; 2-при $x=0{,}025$ мкм; 3-при $x=0{,}0255$ мкм; 4-при $x=0{,}04$ мкм, расчет по формуле (4.6); *б*- результаты работы [7].

проводности $\lambda = 40{,}62 \quad Вт/(м \cdot К)$, плотность $\rho = 7{,}918 \cdot 10^4 \ кг/м^3$, теплоёмкость $c_\rho = 364.726 \ Дж/(кг \cdot К)$. Время действия лазерного излучения- 5 нс.

На рис.4.7 *б* приведены результаты численных расчетов, полученных в работах [6,7]. В этих работах был проведен расчет температурного поля в молибденовом образце, температурные зависимости свойств которого имеют вид полиномов, полученных на основе табличных данных методом наименьших квадратов [5-7]:

$$\lambda(T) = 173.8 - 9.20 \cdot 10^{-2} \cdot T + 4.29 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 - 7.59 \cdot 10^{-9} \cdot T^3, \ Вт/(м \cdot К);$$

$$c(T) = 216.7 + 0.103 \cdot T - 6.8 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 2.01 \cdot 10^{-8} \cdot T^3, \ Дж/(кг \cdot К);$$

$$\rho(T) = 1.02 \cdot 10^4 - 3.8 \cdot 10^{-2} \cdot T, \ кг/м^3; \quad A(T) = 0.99 \cdot 10^{-4} \cdot T.$$

В качестве следующего материала основы была взята сталь 40Х, температурные зависимости свойств которой имеют вид полиномов, полученных на основе табличных данных методом наименьших квадратов [5-7]:

$$\lambda(T) = 40.62 + 0.013 \cdot T - 4.847 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 2.405 \cdot 10^{-8} \cdot T^3, Вт/(м \cdot К);$$

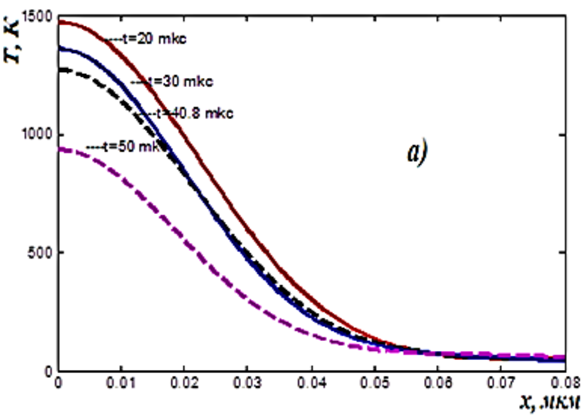
$$c(T) = 364.726 + 0.407 \cdot T - 1.048 \cdot 10^{-4} \cdot T^2, \ Дж/(кг \cdot К);$$

$$\rho(T) = 7.918 \cdot 10^4 - 0.32 \cdot T, \ кг/м^3.$$

Начальная температура материала T_0 принималась равной 300 К, начальная скорость изменения температуры полагалась равной 0. Время релаксации теплового потока для обоих материалов принималась равной $\tau_r = 5 \cdot 10^{-10}$ с. Плотность потока энергии лазерного излучения определялась функцией времени $q(t) = q_{\max} \sin(\pi t/t_k)$. На рис. 4.7 *б* приведено изменение температуры во времени.

На рис. 4.7 *б* сплошные линии соответствуют решениям нелинейных задач, а штриховые-решениям линейных задач: *1* – при $x = 0$; *2* – при $x = 0.025$ мм*; 3* – при $x = 0.0255$ мм; 4 – при $x = 0.04$ мм. Решения линейных задач получены при среднеинтегральных значениях теплофизических и оптических характеристик в диапазоне температур от 300 К до температуры плавления 3659 К: $\lambda = 33.8\, Вт/(м \cdot К)$, $c_p = 4.605 \cdot 10^6\, Дж/(м^3 \cdot К)$, $A = 0.098$. Толщина покрытия принималась $S_1 = 0.4$ мкм, общая толщина системы выбиралась с учетом глубины проникновения тепла $S_2 = 0.4$ мкм. Конечное время воздействия лазерного излучения $t_k = 5$ нс.

На рис. 4.8 *а* представлены результаты численных расчетов зависимости температуры от толщины слоя *(х)* проникновения тепла в тело при различных значениях времени действия лазерного луча.



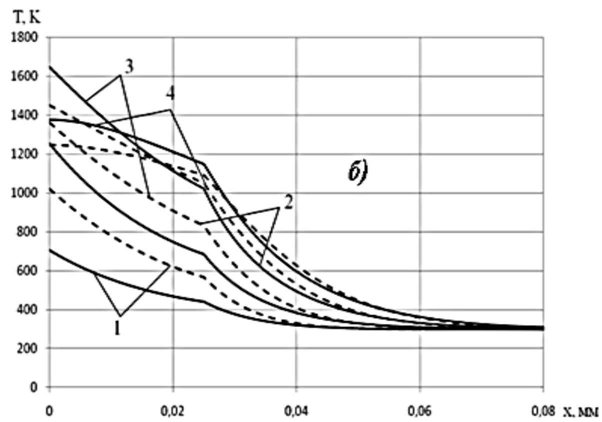


Рис. 4.8. Изменение температуры в стали марки 40Х от толщины слоя x тела при различных значениях времени действия лазерного луча (*а*): 1 –при 20 мкс; 2 –при 30 мкс; 3 –при 40,8 мкс; 4 –при 50 мкс. а) результаты численного расчета по формулы (4.6); *б*- результаты работы [7].

На рис. 4.8 *б* сплошные линии соответствуют решениям нелинейных задач, а штриховые – решениям линейных задач: *1* – при $t = 4.14$ нс *; 2* – при $t = 5$ нс*; 3* – при $t = 2$ нс; 4 – при $t = 2.7$ нс.

Из сравнения этих рисунков следует, что результаты расчёта качественно совпадают с результатами работы [7].

Пятая глава диссертации посвящена описанию методов анализа и алгоритмов вычисления параметров полупроводниковых лазеров на основе симметричных гетеронаноструктур. Подробно проанализированны результаты численного эксперимента и оптимизации температурной зависимости излучательных характеристик нанослойных инжекционных лазеров на основе симетричных гетероструктур. Теоретически рассмотрены и оптимизированы параметры квантоворазмерной ассиметричной двойной гетеронаноструктуры AlGaAs/InGaAs/GaAs.

В частности, в разделе 5.1 подробно проанализированы волноводные модели нанослойных гетероструктур, такие как метод конечных разностей и метод обратных задач. Однако анализ указанных методов показывает, что при существовании точки срыва генерации они не пригодны. Следовательно, для подробного анализа температурной зависимости порогового тока гетеролазеров вблизи точки срыва генерации, целесообразным является использование метода модулирующих функций (ММФ).

В основе ММ исследуемой задачи лежит уравнение Гельмгольца для TE-мод поляризации в форме

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(x) - \beta^2\right)u(x) = 0, \qquad (5.1)$$

где x – это координата по поперечной к слоям оси, ω – частота оптического излучения, $\varepsilon(x) = n^2(x)$-комплексная диэлектрическая проницаемость, $n(x)$-комплексный показатель преломления, β- продольная (по оси z**)** постоянная распространения волны, $u(x)$- амплитудные профили мод-собственные функции (СФ).

Идея ММФ состоит в решении уравнения (5.1) и определении величины β^2 с помощью функции $u(x)$. Процедура нахождения собственных значений (СЗ) модулирующей функции (МФ) в многослойных гетероструктурах с активным волноводом, состоит в решении задачи о распространения электромагнитной волны в гетеросреде. Согласно методике, разработанной во второй главе, охарактеризуем электромагнитное поле в каждом слое структуры функциями u и φ с показателем преломления n. Соответственно, в рассматриваемом случае уравнение (5.1) можно разделить на два взаимозависимых уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \varphi - \eta u, \\ \dfrac{d\varphi}{dx} = -\eta\varphi, \end{cases} \qquad (5.2)$$

где $u = E_y, \varphi = \omega\mu H_z, E_y$ и H_z -компоненты оптического поля ТЕ - моды, μ – магнитная проницаемость, $\eta = \sqrt{n^2k_0^2 - \beta^2}\,tg\left(x\sqrt{n^2k_0^2-\beta^2}\right)$- МФ, $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ - волновое число в вакууме.

Общее решение уравнений (5.2) для каждого слоя имеет вид

$$\begin{cases} u = A cos\left(x\sqrt{n^2k_0^2 - \beta^2}\right) + B\dfrac{sin\left(x\sqrt{n^2k_0^2-\beta^2}\right)}{\sqrt{n^2k_0^2-\beta^2}}, \\ \varphi = \dfrac{B}{cos\left(x\sqrt{n^2k_0^2-\beta^2}\right)}, \end{cases} \qquad (5.3)$$

где A, B - амплитуды падающей и отраженной волны на границе раздела слоев, $\sqrt{n_m^2k_0^2 - \beta^2}$ –поперечная постоянная распространения в соответствующих слоях (m- номер слоя).

Отсюда следует, что СЗ

$$\beta_m = \sqrt{n^2k_0^2 - \frac{\pi m}{L}}, \quad m = 0,1,2, \text{ и т.д.} \qquad (5.4)$$

Из условия $\beta \le \sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(L)}$ и выражения (5.4) следует, что СЗ β имеет положительное значение, которое соответствует определенному значению МФ. Следовательно, для любой ограниченной функции $\varphi(x)$ при

$x \in [-L, L]$ существует ограниченное нетривиальное решение уравнения (5.1), относящееся к слоистым средам.

В разделе 5.2 в качестве объекта исследования рассматривается квантоворазмерная гетероструктура на основе системы InGaAs/AlGaAs/GaAs, используемая для изготовления лазеров диапазона 0,94-1,14 мкм. Указанная полупроводниковая система нами выбрана как наиболее хорошо технологически отработанная, но предложенная в работе МФ и подходы оптимизации применимы также и для многослойных наноструктур на основе других твёрдых растворов. Поэтому вычислим зависимость модового усиления g_M от величины локального усиления g в активном слое (величины накачки). В качестве оптической модели активной области инжекционного лазера на основе наноструктур рассмотрим плоский многослойный диэлектрический волновод с комплексными значениями диэлектрической проницаемости ε_0 во всех слоях. Мнимые части ε_n $(n = 0, 1, 2,$ и т.д.) соответствуют коэффициентам поглощения α_n $(n = 0, 1, 2,$ и т.д.) в широкозонных слоях и считаются постоянными.

Комплексная диэлектрическая проницаемость ε_0 активного слоя представляет сумму постоянной величины $\varepsilon_0' + i\varepsilon_0''$ и переменной комплексной добавки $\delta\varepsilon$, учитывающей изменение локального значения коэффициента усиления g и показателя преломления при изменении концентрации инжектированных электронов N (накачки лазеров). Таким образом, для ε_n имеем:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0' + i\varepsilon_0'' + \delta\varepsilon, \;\; \varepsilon_0'' = \alpha_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_0'}}{k}, \;\; \delta\varepsilon = -(R + i)g\frac{\sqrt{\varepsilon_0'}}{k},$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n' + i\varepsilon_n'', \varepsilon_n'' = \alpha_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n'}}{k} (n = 1, 2, \cdots),$$

где R - материальный коэффициент амплитудно-фазовой связи, равный отношению реальной части производной $\partial\varepsilon / \partial N$ к её мнимой части $R = \dfrac{Re\partial\varepsilon / \partial N}{Im\partial\varepsilon / \partial N}$.

Таким образом, используя выражения (5.4) и (5.5), можно определит комплексную константу распространения β волны и комплексную амплитуду поперечного распределения поля $u(x)$. Удвоенная мнимая часть β есть модовый коэффициент усиления g_M :

$$g_M = -2Im\beta .$$

На рис.5.1 представлены результаты численных экпериментов зависимости модового усиления гетеронанолазера g_M от значения локального усиления g. При проведении численных экспериментов мы использовали пас-

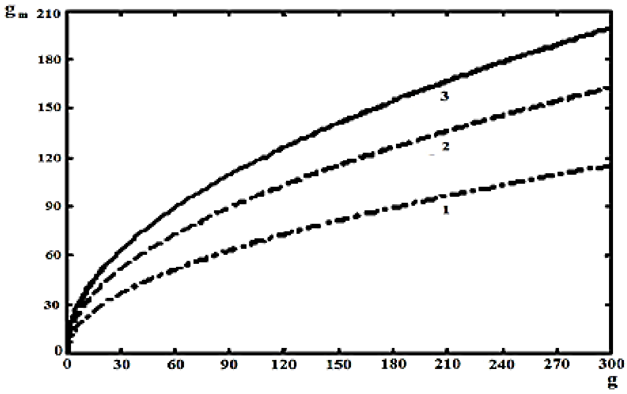


Рис. 5.1. Расчёт зависимости модового усиления g_m от значения локального усиления g. Параметрами кривых является толщина активной области d_0 (мкм). 1- 0.004 мкм, 2-0.008 мкм, 3-0.012мкм. R=6, λ=1.14мкм.

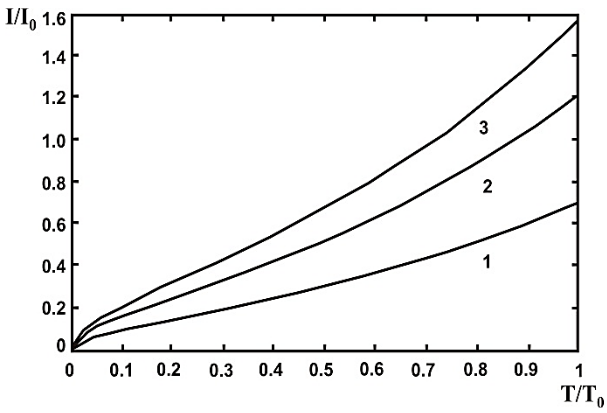


Рис. 5.2. Температурная зависимость порогового тока гетеролазеров. Параметрами кривых являются модовые усиления $g_м\,(см^{-1})$. 1-40 $см^{-1}$, 2-120 $см^{-1}$, 3-200 $см^{-1}$. Остальные параметры совпадают с рис. 5.1.

портные данные одной из типичных квантоворазмерных структур, приведенные в работе [8]. На основе полученных результатов можно заключить, что для инжекционных лазеров при уменьшении толщины активной области зависимость модового усиления от локального усиления g (величины накачки) носит существенно сублинейный характер. Причиной тому является антиволноводное действие электронов, инжектированных в активную область. Очевидно, что это обстоятельство должно влиять и на ход температурной зависимости порогового тока.

Результаты расчёта температурной зависимости порогового тока представлены на рис.5.2, где варьируется величина порогового усиления g_M, d_0=8 нм, а остальные параметры совпадают с данными рис.5.1.

Таким образом, на основании выполненных численных экспериментов можно заключить, что аномальное поведение температурной зависимости порогового тока в лазерах на основе наноструктур есть результат относительно слабых волноводных свойств их активной области.

Недостатком широкого волновода является более низкий фактор оптического ограничения для квантовой ямы и, соответственно, более низкое модальное усиление. Чтобы увеличить модальное усиление необходимо увеличить толщину слоя или количество квантовых ям.

При наличии двух и более квантовых ям температурная зависимость излучательных характеристик инжекционных лазеров будет другой. Для проведения численного эксперимента мы использовали состав слоёв и их назначение для базовой наногетероструктуры согласно [9]. Толщина активных квантоворазмерных областей бралась равной 8 нм, а состав соответствовал длине волны генерации 980 нм.

На рис. 5.3 приведены результаты численного эксперимента зависимости модового усиления g_M от величины локального усиления g активного слоя для наногетероструктуры с одной и двумя квантовыми ямами, а на рис. 5.4 приведены расчётные температурные зависимости порогового тока AlGaAs/InGaAs/GaAs-гетеролазеров с одной и двумя квантовыми ямами.

Из рис. 5.3. видно, что температурные зависимости порогового тока инжекционных лазеров на основе наноструктур с двумя квантовыми ямами улучшается. Это связно с тем, что в структурах с двумя квантовыми ямами увеличивается эффективная толщина активного слоя, что приводит к замедлению чувствительности порогового тока к изменению температуры.

Оптимизация температурной зависимости излучательных характеристик квантоворазмерных наногетероструктур на основе системы In GaAs/

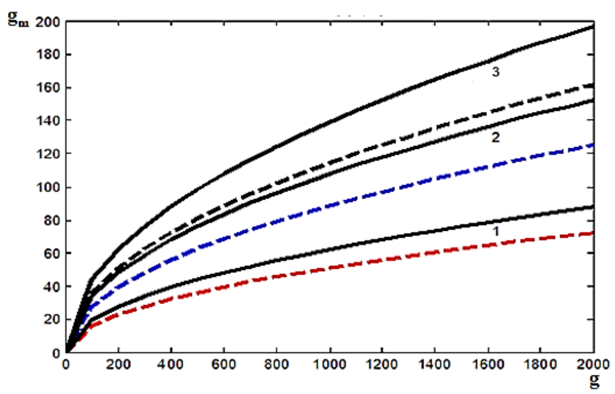


Рис. 5.3. Зависимость модового усиления g_M от величины локального усиления g активного слоя для наногетероструктуры с одной (штрихи) и двумя (сплошные) квантовыми ямами. R=6, λ=1.14мкм. d_0 (мкм): 1- 0.004; 2- 0.008; 3-0.012.

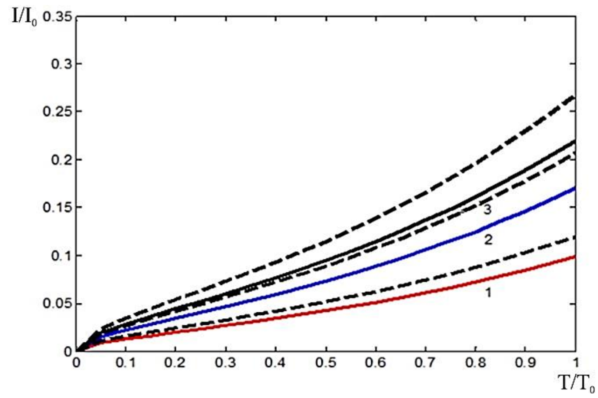


Рис. 5.4. Температурная зависимость порогового тока AlGaAs/ InGaAs/Ga As-гетеролазеров с одной (штрихи) и двумя (сплошные) квантовыми ямами. R=6, λ=1.14 мкм. g_m ($см^{-1}$): 1-40$см^{-1}$; 2-120$см^{-1}$; 3-200 $см^{-1}$. Остальные параметры совпадают с данными рис.1.

AlGaAs/ GaAs, выполненная для толщин активной области 4нм и 8нм, представлена на рис.5.5. Для этих структур оптимизированная толщина волноводного слоя *w* получается 0,19 мкм и 0,13 мкм соответственно.

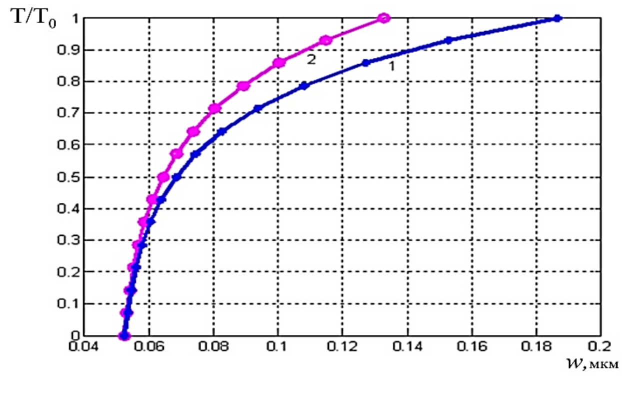


Рис.5.5. Оптимизация толщины волноводного слоя гетеронанолазера:1-d_0=4нм; 2-d_0=8 нм; R=6; $\lambda = 1.15$ мкм; g_M=120$см^{-1}$; $\varepsilon_4 = \varepsilon_6 = 11.8336$; T=70 °C.

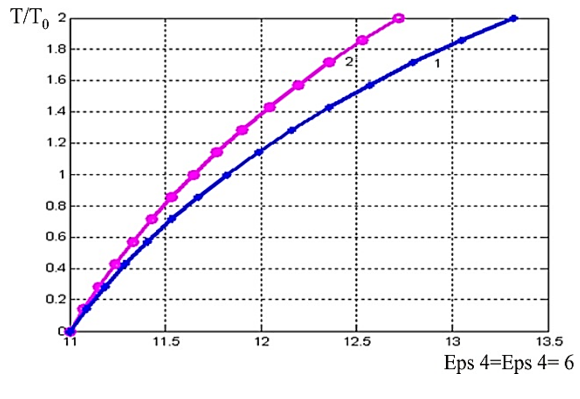


Рис.5.6. Оптимизация материала волноводного слоя гетеронанолазера: 1- d_0= 4 нм; 2- d_0 =8нм; R=6; $\lambda = 1.15$ мкм; g_M=120$см^{-1}$; w=0.12 мкм; T=70 °C.

Таким образом, можно оптимизировать значения показателя преломления нанослоёв (рис.5.5 и 5.6). Для этих структур оптимизированный состав волноводного слоя будет $\varepsilon = 12{,}75$ и $\varepsilon = 13{,}3$ соответственно

В разделе 5.3 приведены результаты численного расчёта влияния асимметрии гетеронаноструктуры на температурную зависимость излучательных характеристик гетеролазеров. Показано, что излучательные характеристики лазеров зависят от состава нанослоёв. Проведено сравнение экспериментальных данных с результатами расчёта температурной зависимости порогового тока гетеронанолазеров на основе асимметричных AlGaAs/InGaAs/GaAs- гетероструктур от толщины и состава слоёв.

В лазерных структурах в качестве активной области использовался слой напряженного твердого раствора $In_xGa_{1-x}As$ толщиной 5-9 нм.

Были исследованы гетеронаноструктуры с различным материалом волноводного слоя. В первом типе структурактивная область была расположена непосредственно между слоями GaAs, во втором типе активная область распо-ложена между волноводными слоями $Al_{0,9}Ga_{0,9}As$. В третьем типе состав твердого раствора волноводногослоя был максимальным $Al_{0,2}Ga_{0,8}As$. Четвёртый тип лазерной гетероструктуры отличался от предыдущих составом твердой раствороактивной области, а генерация в непрерывном режиме осуществлялась на длине волны 1015 нм.

Результаты численного эксперимента температурной зависимости поро-гового тока AlGaAs/InGaAs/GaAs- гетеронанолазеров с одной квантовой ямой (1-асимметричная структура, 2-симметричная структура) приведены на рис. 5.7.

Согласно экспериментальным результатам [10], изменение толщины слоя активной области в гетероструктурах на основе системы твердых растворов AlGaAs/InGaAs/GaAs, излучающих на длине волны 1060-1150 нм, существенно влияет на параметры лазерной структуры. Поэтому в данной параграфе был проведен расчет влияния толщины активного слоя на температурную зависимость порогового тока инжекционных лазеров на основе

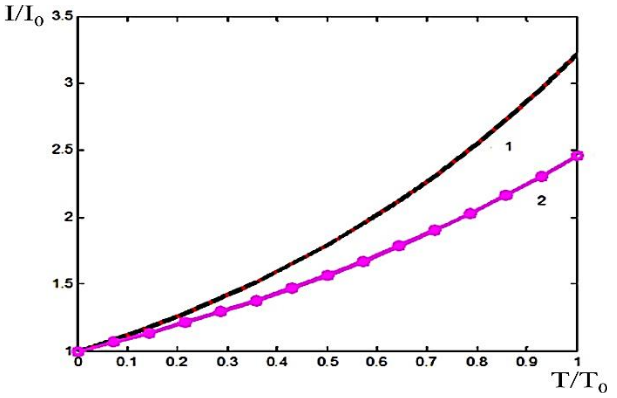


Рис.5.7. Температурная зависимость порогового тока AlGaAs/InGaAs/GaAs - гетеронанолазеров с одной квантовой ямой: 1-асимм. структура; 2-симм. структура; $R = 6$; $\lambda = 1{,}06$ мкм; $g_м$=120 см$^{-1}$. Другие параметры согл. табл. 2.d_0=0.0117мкм.

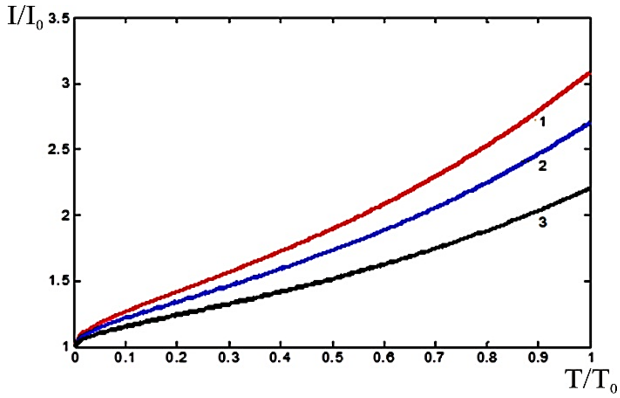


Рис.5.8. Температурные зависимости порогового тока асиметричных лазерных гетеронаноструктур:1-d_0 =3 нм; 2 – d_0 =6 нм; 3- d_0 =9 нм; $R = 6;$ $\lambda = 1.15$ мкм; $g_м$=120см$^{-1}$. Другие параметры согл. табл. 2.

асимметричных гетероструктур раздельного ограничения с расширенным волноводом, излучающих в диапазоне длин волн 1000-1150 нм.

Результаты расчета температурной зависимости порогового тока от толщины активной области асимметричных гетеронанолазеров с одной квантовой ямой приведены на рис. 5.8. Изменение толщины активной области оказывает существенное влияние на пороговую плотность тока в асимметричных гетеронаноструктурах раздельного ограничения. Полученные результаты показывают, что в асимметричной лазерной наноструктуре раздельного ограничения с расширенным волноводом с увеличением толщины активной области температурная зависимость излучательных характеристик улучшается.

На рис. 5.9 приведен характерный вид температурных зависимостей пороговой плотности тока для лазеров с длиной резонатора порядка 3 мм, изготовленных из трех типов лазерных структур [11]. В зависимостях при некоторой температуре наблюдается резкий рост пороговой плотности тока и, соответственно, снижение температурной стабильности. Эта температура

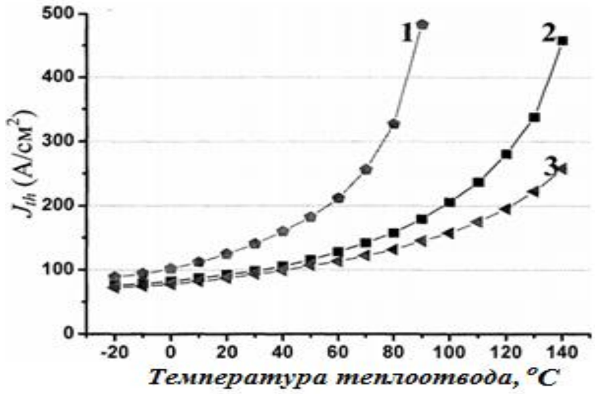


Рис.5.9. Температурные зависимости пороговой плотности тока J_{th} для гетероструктур с разным материалом волновода: 1-GaAs;2-$Al_{0,1}Ga_{0,9}As$;3 - $Al_{0,2}Ga_{0,8}As$[11].

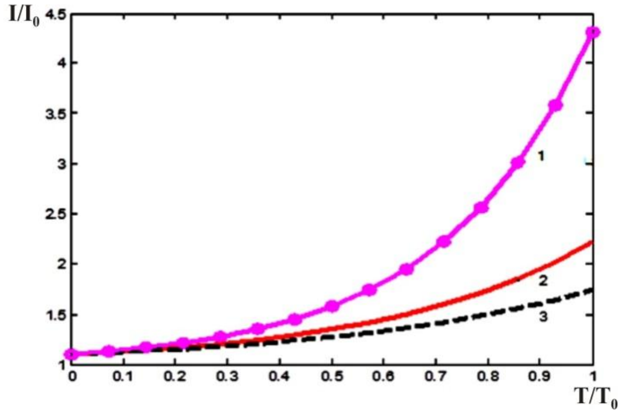


Рис.5.10. Температурные зависимости порогового тока лазерных гетеронаноструктур для разных материалов волноводного нанослоя: $\varepsilon_4 = \varepsilon_6$;R=6; $\lambda = 1,06$ мкм; $g_м$=120см$^{-1}$; d_0=4 нм; 1-11.64; 2-11.373; 3-11.3.

максимальна для лазеров из гетероструктуры с $A1_{0,2}Ga_{0,8}As$ волноводом с максимальной глубиной квантовой ямы в активной области.

Используя параметры этих лазеров, нами проводен численный расчет температурной зависимости порогового тока по нашей модели (см.рис. 5.10). Сравнение экспериментальных данных с результатами расчета указывает на правомочность модели, основанной на антиволноводном действии инжектированных носителей в активную область гетеронанолазеров.

Далее был приведен численный расчет температурной зависимости порогового тока для структур с асимметричным волноводом для толщин активного слоя 4 нм и 8 нм. Полученные результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными результатами.

Также проведен численных расчет зависимости параметра T_0 от толщины активной области. Установлено, что изменение толщины активной области оказывает существенное влияние на пороговую плотность тока в асимметричных лазерных гетеронаноструктурах раздельного ограничения, которая находится в удовлетворительном согласий с результатами работы [11].

Из этих экспериментальных результатов видно, что в лазерах на основе асимметричных гетеронаноструктур раздельного ограничения с расширенным волноводом с увеличением толщины квантово размерной активной области наблюдается линейный рост характеристического параметра T_0. Видно также, что характеристическая температура T_0 сублинейно увеличивается с увеличением толщины активной области.

В шестой главе рассмотрен процесс переноса массы в средах с различными геометрическими формами. В общем случае, согласно методу искусственной гиперболизации, уравнение массопереноса принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(D(r)\frac{\partial u_\alpha}{\partial r}\right)=\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \qquad (6.1)$$

где $u_\alpha = u_\alpha(r,t)$ – функция, характеризующая плотность вещества; $D(r)$– коэффициент диффузии.

В разделе 6.2 исследован процесс переноса массы в сосуде плоской геометрической формы. При заданных граничных условиях

$$u(x,t)\big|_{x=h}=f(t), \qquad -D\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=h}=g(t)$$

решение уравнения (6.1) принимает вид

$$u_\alpha(x,t)= f(t)+\sum_{k=1}^{N}\frac{(h-x)^{2k}}{D^k(2k)!}\sum_{n=1}^{k}C_n^k\alpha^{k-n}\frac{d^{2(k-n)}f(t)}{dt^n}-$$

$$-(h-x)g(t)+\sum_{k=1}^{N}\frac{(h-x)^{2k+1}}{D^k(2k+1)!}\sum_{n=0}^{k}C_n^k\alpha^{k-n}\frac{d^{2(k-n)}g(t)}{dt^{2(k-n)}}. \qquad (6.2)$$

Для анализа зависимости плотности потока вещества от времени течения потока на основе выражения (6.2) проведен численный расчет на примере потока воды, где: плотность воды $\rho = 1000\,кг/м^3$, удельная теплоемкость $c_\rho = 4200\,Дж/(кг\cdot K)$, коэффициент диффузии $D = 0.276\cdot 10^{-4}\,м^2/с$, характерное время процесса $\alpha = 5\cdot 10^{-11} с$.

Результаты численных расчетов для различных значений x представлены на рис. 6.1(*а*), а на рис. 6.1(*б*) приведены результаты численного расчета из работы [12].

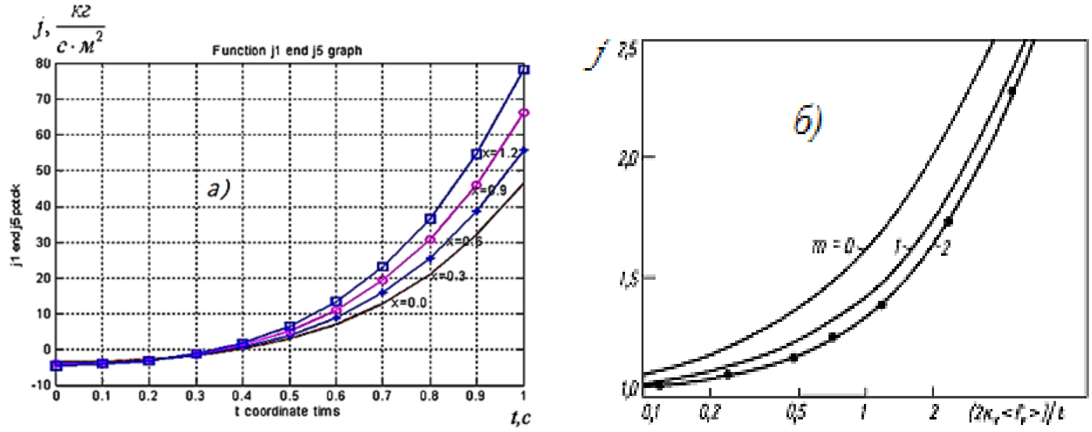


Рис.6.1. *а*- результаты численных расчетов зависимости плотности потока воды от времени течения потока; *б*- результаты работы [12].

Как видно из рис. 6.1*а*, с возрастанием времени течения плотность потока воды нелинейно возрастает, что находится в удовлетворительном согласии с результатами работы [12].

В следующих параграфах этой главы на основе методики, разработанной в разделе 6.2, исследованы процессы переноса массы в сосудах цилиндрической и сферической формы соответственно. Полученные результаты качественно совпадают с результатами других авторов.

Основные результаты и выводы

По результатам исследования процессов переноса энергии, массы и оптимизации их температурной зависимости в различных конденсированных средах с учетом регуляризации начального и граничного условий можно сделать следующие выводы:

1. Предложен метод приближенного аналитического решения прямой и обратной задач математической физики путём использования интегрального преобразования, разделения переменных и разложения в ряды с помощью методов регуляризации.

2. Разработана обобщённая ММ для описания стационарных физических процессов в различных средах с учетом регуляризации теплового потока и

температурной зависимости теплофизических характеристик. Установлена закономерность стационарного распространения температуры в среде. Определены условия теплообмена и состояния равновесия в конденсированной среде, при которых тепловой поток и температура в фазовой плоскости перемещаются и разлагаются в устойчивую и неустойчивую области.

3. Разработан математический аппарат в аналитическом виде, отличающихся от известных ранее тем, что с его помощью можно решать существенно новые прикладные задачи на основе стационарного УМФ с переменными и постоянными коэффициентами.

4. Разработаны методы расчета и компьютерные программы для определения распределения температуры и теплового потока в осесимметричных конденсированных средах в окрестности особой точки, то есть в критических условиях процессов горения и взрыва.

5. Предложена возможность применения аналитического метода построения семейства РА начальной и граничной задачи для стационарного и нестационарного УМФ на основе суммирования рядов и интегрального преобразования Фурье.

6. Разработан удобный метод численного расчёта плоского активного оптического волновода лазеров на основе многослойных гетеронаноструктур с привлечением метода МФ и разработан удобный метод оптимизации параметров инжекционных лазеров на основе гетеронаноструктур с целью улучшения температурных зависимостей излучательных характеристик гетеролазеров.

7. Проведён численный расчёт температурной зависимости излучательных характеристик инжекционных лазеров на основе наноструктур от параметров гетероструктуры и установлена зависимость температурного поведения порого-вого тока инжекционных лазеров на основе асимметричных AlGaAs/InGaAs-/GaAs гетеронаноструктур с одной и двумя квантовыми ямами от толщины и материального состава нанослоёв. Установлено, что температурная зависимость порогового тока лазеров на основе асимметричных гете-

ронаноструктур по сравнению с лазерами на основе симметричных гетеронаноструктур меняется в сторону ухудшения.

8. Предложена новая ММ, описывающая восстановление начальных распределений температуры и потока вещества, а также получено приближенное аналитическое решение уравнения гиперболического типа, описывающего распределение температуры и переноса массы в средах с различной геометрической формой;

9. Разработана ММ лазерного нагрева твердых тел на основе метода искусственной гиперболизации и установлена непрерывная зависимость распределения температуры и потока вещества от их начального распределения. Предложены условия стабилизации и согласования параметра регуляризации для этих задач, способы выбора сглаживающих и модулирующих функций, а также зависимость параметра регуляризации от погрешности.

Цитируемая литература

1. Зимин В. П. Изображение и анализ граничных условий для уравнения теплопроводности на фазовых плоскостях // Изв. Томского политех. ун-та, 2011.-–Т.318.-№4.–С.29-33.

2. Саргсян В.Г., Хачикян А.С. О решении некорректной задачи теплопроводности с переопределенными исходными данными //Изв. НАН Армении. Механика, 2008.-Т.61.-№3.-С.58-63.

3. Волков А.И., Жарский И.М. Большой химический справочник // Минск: Современная школа, 2005.-608 с.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика // М.: Наука, 1986. -733 с.

5. Ю.А.Малая, А.И.Губин . Математическое моделирование лазерного нагрева тел с покрытиями на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности // Вістник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інчтитут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. –Харків: НТУ «ХПІ», 2012.-№7.-С.174-180.

6. Mehdi Jadidi. Non-fourier heat conduction in a long cylindrical media with insulated boundaries and arbitrary conditions / Jadidi Mehdi // Australian journal of basic and applied sciences, 2009. – No 3(2). – PP.652-663.
7. David J.N. Wall. Invariant imbedding and hyperbolic heat waves / J.N. David J.N. Wall // J. Math. Phys. 38(3), 1997.-PP.1723-1749.
8."PropertiesofAluminumGalliumArsenide" editedbySadaoAdachi,Publishedby: INSPEC, theInstitutionofElectricalEngineers, (London,1993).
9. БогатовА. П, Т.И. Гущик, А.Е. Дракин, А.П. Некрасов, В.В. Попович. Оптимизация волноводных параметров лазерных гетероструктур InGaAs/ AlGaAs/GaAs с целью наибольшего увеличения ширины пучка в резонаторе и получения максимальной лазерной мощности //Квантовая электроника, 2008.-№10.-С.935-939.
10. ВинокуровД.А., ВасильеваВ.В. и др. Влияние толщины активной области на характеристики полупроводниковых лазеров на основе ассиметричных гетероструктурAlGaAs/GaAs/InGaAsс расширенным волноводом // Физика и техника полупроводников, 2010.-Т.44.-Вып.2.-С.246-250.
11. Ладугин М.А., Лютецкий А.В., Мармалюк А.А., Падалица А.А., Пихтин Н.А., Подоскин А.А., Рудова Н.А., Слипченко С.О., Шашкин И.С., Бондарев А.Д., Тарасов И.С. Температурная зависимость пороговой плотности тока и внешней дифференциальной квантовой эффективности в полупроводниковых лазерах (λ =900-920 нм) // Физика и техника полупроводников, 2010.-Т.44.-Вып.10.-С.1417-1420.
12. В.В Дильман, А.Д.Полянин. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии // М.: Химия, 1990. -304 с.
13. Ю.П. Гупало, А.Д. Полянин, Ю.С. Рязанцев. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком // М.: Наука, 1985.-336 с.

Основные публикации по теме диссертации

[A1] **Джураев Х.Ш.** Об одном регуляризирующем алгоритме неустойчивой задачи о продолжении потенциального поля // Вестник Таджикского государственного национального университета, ТГНУ, 2006.-№5.–С.40-43. ISSN-

2074-1847.
[A2] **Джураев Х.Ш.** Об одном подходе к проблеме регуляризации задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Дифференциальные уравнения, 2007.–Т.43.-№5.-С.726-733. ISSN-0374-0641
[А3] **Джураев Х.Ш.** О регуляризации скорости сигналов в линии при одновременном управлении //Доклады АН Республики Таджикистан, 2009.-Т.52.-№1.-С.23.
[А4] **Джураев Х.Ш.** О регуляризации стационарного поля температуры в среде //Известия АН Республики Таджикистан. Отд. физ.-мат. –хим. –геолог. и тех. наук, 2010.–№2(139). –С.27-33. ISSN-0002-3485.
[А5] **Джураев Х.Ш.** Об одном подходе к проблеме регуляризации задачи Коши для уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2010.- №3(59). –С.16-27.
[А6] **Джураев Х.Ш.** О регуляризирующем алгоритме решений многомерных задачи Коши для эллиптических дифференциальных уравнений // Материалы второй междунар. конф. «Математическая физика и ее приложения». Самара, 2010.-С.109-110.
[А7] **Джураев Х.Ш.** О регуляризации задачи распространения волн в анизотропной неоднородной среде // Доклады АН Республики Таджикистан, 2010.–Т.53.-№2.–С.104-109.
[А8] **Джураев Х.Ш.** О регуляризирующем алгоритме задачи распространения волн в анизотропной неоднородной среде // Математическое моделирование и краевые задачи. Часть 3. Самара: СамГУ, 2010.–С.88-92.
[А9] **Джураев Х.Ш.,** Норматов З.С. Об одном устойчивом методе определения приближенного решения уравнения тепло- и массопереноса // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2010.-№?-С.50-57.
[А10] **Джураев Х.Ш.,** Норматов З.С., Собирова Г.К. Искусственная гиперболизация уравнения теплопроводности // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2011.-№4(68).-С.3-7.

[A11] **Джураев Х.Ш.,** Норматов З.С. Метод искусственной гиперболизации для обратной задачи теплопроводности // Вестник Таджикского технического университета, 2011.-№2.-С.3-7. ISSN-2075-177X.

[A12] **Джураев Х.Ш.** Регуляризация краевых задач для гиперболического уравнения //Научно-технический вестник Поволжья, 2011. –№6.–С.33-36. ISSN-2079-5920.

[A13] **Джураев Х.Ш.**, Наджмиддинов А.М. Распространение тепла в твердом теле при незави-симости источников от температуры, содержащих параметр // Вестник Таджикского национального университет. Серия естественных наук, 2012.-№1(52), -С.22-24. ISSN-2074-1847.

[A14] **Джураев Х.Ш.** О решениях краевых задач для волнового уравнения //В мире научных открытий. Математика. Механика. Информатика, 2012. –№1.1 (25).–С.129-142. ISSN-2072-0831.

[A15] **Джураев Х.Ш.** Регуляризация граничных задач для гипербо-лического уравнения //Математические заметки, 2013.–Вып. 2.-№1.-С.202-209. ISSN-0025-567X.

[A16] **ДжураевХ.Ш.**, Наджмиддинов А.М. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными точками // Инновации и инвестиции, 2014.-№5.-С.181-183. ISSN-2307-180X.

[A17] **Джураев Х.Ш.,** Махсудов Б.И., Каримов З.Д. Метод модулирующих функций и его применение при изучении волноводных свойтв многослойных квантоворазмерных гетеро-структур // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2014.- №1/3.–С.70-76. ISSN-2074-1847.

[A18] **ДжураевХ.Ш.**, Наджмиддинов А.М. Асимптотическое разложение тепла в твердом теле при независимости источников от температуры, содержащих параметр // Вестник Таджикского национального университет. Серия естественных наук, 2014.-№1/1(126).-С.68-71.

[A19] Махсудов Б.И., **Джураев Х.Ш.,** Каримов З.Д. Температурная зависимость порогового тока полупроводниковых лазеров на основе наноструктур

// Материалы международной конференции «НАНО-2014». Душанбе, 2014. – С.71-77.
[А20] **Джураев Х.Ш.,** Каримов З.Д., Махсудов Б.И. Исследование поля многослойной волноводной структуры методом матриц переноса // Материалы Республиканской научной конференции «Современные проблемы физики конденсированного состояния». Душанбе, 2015.-С.94-97.
[А21] **Джураев Х.Ш.,** Каримов З.Д., Махсудов Б.И. Обратные задачи при изучение волноводных свойств многослойных квантоворазмерных гетероструктур // Научно–технический вестник Поволожья, 2015.-№5.-С.25-27. ISSN-2079-5920.
[А22] **Джураев Х.Ш.** Регуляризации задачи Коши для уравнения Гельмгольца // Тезисы докладов междунар. конф. «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского. М.: МИАН, 2015.-С.133-135.
[А23] **Джураев Х.Ш.** Регуляризации задачи Коши для уравнения Гельмгольца // Научно-технический вестник Поволжья, 2015.-№5.-С.22-24. ISSN-2079-5920.
[А24] Комилов К., **Джураев Х.Ш.,** Норматов З.С. Исследование теплопроводности в неограниченных средах методом искусственной гиперболизации // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2015.-№1/4(168).-С.75-82. ISSN-2074-1847.
[А25] **Джураев Х.Ш.,** Комилов К., Норматов З.С. Исследование распространения теплового потока в неограниченной среде при наличии внешнего источника // Научно-технический вестник Поволжья, 2015.- №6.-С.10-13. ISSN-2079-5920.
[А26] **Джураев Х.Ш.,** Комилов К., Норматов З.С. Исследование теплопроводности в ограниченной среде методом искусственной гиперболизации // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2015.-№1/5(188).-С.53-61. ISSN-2074-1847.
[А27] **Джураев Х.Ш.,** Комилов К., Наджмиддинов А.М. Исследование зависимости стационарного распределение теплового потока от температуры в

конденсированных средах // Вестник Таджикского национального универ-ситет. Серия естественных наук, 2016.-№1/1 (192).-С.114-120. ISSN-2074-1847.

[А28] Махсудов Б.И., **Джураев Х.Ш.**, Каримов З.Д., Нарзуллоев Н. Моделирование температурной зависимости излуча-тельных характеристик нанослойных ижексионных лазеров на основе симметричных гетероструктур с двумя квантовыми ямами // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2016.-№1/3(200).-С.132-137.ISSN-2074-1847.

[А29] **Джураев Х.Ш.,** Комилов К., Норматов З.С. Исследование процессов массопереноса методом искусственной гиперболизации //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2016.-№ 1/3 (200)-С.151-155. ISSN-2074-1847.

[А30] **Джураев Х.Ш.,** Комилов К., Наджмиддинов А.М. Стационарное распределение плотности теплового потока от температуры в конденсированных средах //Молодёжный научный вестник. Электронный научно-практический журнал, 2016.-№3.–С.3-9.

[А31] **Джураев Х.Ш.** Устойчивость краевых задач для гиперболического уравнения // Труды IX Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи: М33». Ч.3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара: СамГТУ, 2016.-С.23-29. ил. ISBN 978-5-7964-1624-2.

[А32] **Джураев Х.Ш.,** Комилов К., Норматов З.С. Исследование процессов массопереноса методом искусственной гиперболизации // Труды IX Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи: М33. Ч.2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами. Информационные технологии в математическом моделировании». Самара: СамГТУ, 2016.-С.35-38. ил. ISBN 978-5-7964-1904-5.

[А33] Наджмиддинов А.М., Шаршеев К., **Джураев Х.Ш.,** Мамытбеков У.К. Стационарное распространение тепла в среде цилиндрической формы // Наука в современном мире: теория и практика, 2016.-№1(4).-с.99-103.

[A34] Махсудов Б.И., **Джураев Х.Ш.**, Каримов З.Д. Моделирование температурной зависимости излучательных характеристик нанослойных инжекционных лазеров на основе симметричных гетероструктур // Известия вузов. Физика, 2017.-Т.60.-№3.-С.157-162. ISSN-0021-3411.
[A35] **Джураев Х.Ш.** Стационарное распределение тепла в бесконечной полосе //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017.-№1/5. -С.83-87. ISSN-2074-1847.
[A36] **Джураев Х.Ш.** Стационарное распределение тепла с помощью математической модели процесса теплопроводности // Проблемы автоматики и управления. ИАИТ НАН КР, 2017.-№2(33).-С.10-20.
[A37] **Джураев Х.Ш.,** Нажмиддинов А.М., Хасанов С.Ш. Приближенные аналитические решения нелинейной стационарной задачи теплопроводности при нагреве внутренними источниками, зависящими от температуры // Проблемы автоматики и управления. ИАИТ НАН КР.-2017, №2 (33).–С.27-31. ISSN 1694-5050.
[A38] Махсудов Б.И., **Джураев Х.Ш.**, Каримов З.Д. Влияние толщины активного нанослоя на темпера-турную зависимость порогового тока инжекционных лазеров на основе асимметричных AlGaAs/InGaAs/GaAs – гетероструктур с двумя квантовыми ямами //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017.-№1/3.-С.170-173. ISSN-2074-1847.
[A39] Махсудов Б.И., **Джураев Х.Ш.**, Каримов З.Д. Влияние толщины активного нанослоя на температурную зависимость порогового тока инжекционных лазеров на основе асимметричных AIGaAs/InGaAs/GaAs-гетероструктур // Тез. докл. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников, и аспирантов (с международным участием) БГТУ. Минск,1-12 февраля 2017.-С.59-61.
[A40] Махсудов Б.И., **Джураев Х.Ш.**, Каримов З.Д. Влияние асимметрии наногетероструктуры на температурную зависимость излучательных характеристик гетерорлазеров // Мат. междунар. конф. «Перспективы развития физического науки». Душанбе, 2017.-С.9-14.

[А41] **Джураев Х.Ш.,** Комилов К., Норматов З.С. Моделирование лазерного нагрева твердых тел методом искусственной гиперболизации // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2018.-№3.-С.105-110. ISSN-2413-452X.

[А42] **Джураев Х.Ш.,** Комилов К., Норматов З.С. Исследование процессов тепло и массопереноса в конденсированных средах методом искусственной гиперболизации [монография] // Душанбе: Сино, 2019.-101 с. ISBN 978-99975-54-87-1.

[А43] Махсудов Б.И., **Джураев Х.Ш.**, Каримов З.Д. Волноводные и температурные характеристики инжекционных лазеров на основе гетеронаноструктур [монография] // Душанбе: Сино, 2019.-168 с. ISBN 978-99975-54-86-4.

[А44] **Джураев Х.Ш.**, Нажмиддинов А.М. Математическое моделирование нелинейных явлений стационарной теплопроводности [монография] // Душанбе: Ирфон, 2017.-120 с. ISBN 978-99975-0-816-4.

[А45] **Джураев Х.Ш.** Некорректно поставленные задачи стационарное и нестационарное явлений теории переноса тепло в конденсированных средах // Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing.-2012.-156 с. ISBN 978-3-8454-7814-2.