На правах рукописи
*УДК 517.9*

Шишкина Элина Леонидовна

# МЕТОД КОМПОЗИЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И ЕГО ДРОБНЫМИ СТЕПЕНЯМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

**Автореферат**
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет».

**Научный консультант:**

**Ситник Сергей Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры дифференциальных уравнений института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета.

**Официальные оппоненты:**

**Колокольцов Василий Никитич**, доктор физико-математических наук, профессор департамента статистики Варвикского университета;

**Муравник Андрей Борисович**, доктор физико-математических наук, руководитель проекта, аппарат научного руководителя, АО «Концерн «Созвездие»;

**Солдатов Александр Павлович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела прикладной математической физики ВЦ им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН.

**Ведущая организация:**

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Защита состоится 4 июня 2019 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.203.27 при ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов" по адресу г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, аудитория $495^a$.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте "Диссертационные советы РУДН" в сети интернет (http://dissovet.rudn.ru).

Автореферат разослан ____ ________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д. ф.-м. н. Савин Антон Юрьевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ.

Основные законы, на которых основано изучение процессов и явлений окружающего мира, обычно выражаются уравнениями с частными производными, часто сингулярным или вырождающимся. Их исследование требует применения различных методов современной математики и является актуальной областью исследования, как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Особый интерес представляет случай, когда дифференциальное уравнение в частных производных является сингулярным, то есть по крайней мере один из коэффициентов при неизвестной функции или при какой-либо ее производной стремится к бесконечности на границе или внутри рассматриваемой области. Важность рассмотрения сингулярных дифференциальных уравнений объясняется как внутренними потребностями теории дифференциальных уравнений в частных производных, так и прикладным значением сингулярных дифференциальных уравнений.

Диссертация посвящена методам решения дифференциальных уравнений в частных производных дробного и целого порядка с сингулярным дифференциальным оператором[1] Бесселя, который имеет вид

$$(B_\gamma)_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}, \qquad \gamma > 0. \tag{1}$$

Такие дифференциальные уравнения в частных производных являются сингулярными, поскольку коэффициенты при первых частных производных неизвестной функции стремятся к бесконечности на границе или внутри рассматриваемой области. А именно, рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i} - (B_k)_t\right] u = c^2 u, \quad k \in \mathbb{R}, \quad c > 0, \quad u = u(x,t), \tag{2}$$

$$\left[(B_{\gamma_1})_{x_1} - \sum_{i=2}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}\right]^\alpha u(x) = f(x), \qquad \alpha > 0, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}\right)^\alpha u(x) = f(x), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

[1]Здесь и далее операторами, следуя традиции, называется то, что, возможно, более точно следует называть дифференциальными выражениями.

$$\left[\sum_{i=1}^{p}(B_{\gamma_i})_{x_i} - \sum_{i=p+1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}\right]^m u(x) = f(x), \quad m\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

и

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{2(\alpha+k)}(B_\gamma)_x^{\alpha+k} f(x) = h(x), \qquad x > 0, \qquad \alpha > 0, \tag{6}$$

где $t > 0$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i > 0$, $i = 1, ..., n$, $A_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, ..., 1$.

Одной их основополагающих работ, побудивших интерес к краевым задачам для эллиптических сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных, была работа М. В. Келдыша[2], в которой были выявлены основные особенности постановки краевых условий в таких задачах. Задача Коши для сингулярных гиперболических уравнений изучалась Ж. Л. Лионсом[3], Р. Кэрроллом, Р. Шоуолтером[4] (см. также библиографию в этих книгах), С. А. Терсеновым[5]. Сингулярные параболические уравнения рассматривались Я. И. Житомирским[6], М. И. Матийчуком[7] и др. Сингулярные функционально-дифференциальные параболические уравнения, были рассмотрены А. Б. Муравником с применением методов А. Л. Скубачевского.

Основоположником школы по сингулярным дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя в Воронеже является И. А. Киприянов. Начиная с 60-х годов XX века Киприянов начинает рассматривать задачи с оператором Бесселя. И. А. Киприянов предложил использовать интегральное преобразование Фурье–Бесселя (Ханкеля) при построении весовых функциональных пространств и при решении задач с оператором Бесселя и другими сингулярными дифференциальными и интегро-дифференциальными операторами, соответствующими этому преобразованию. В 80-х годах XX века И. А. Киприяновым совместно с Л. А. Ивановым изучались фундаментальные решения B-эллиптических

[2] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 1. — С. 181–183.

[3] Lions J. L. Equations differentielles operationnelles et problémes aux limites / — Springer, 1961. — 292 p.

[4] Carroll R. W., Showalter R. E. Singular and degenerate Cauchy problems. — N.Y. : Academic Press, 1976. — 333 p.

[5] Терсенов, С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. — Новосибирск : НГУ, 1973. — 143 с.

[6] Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя / Матем. сб. — 1955. — Т. 36(78), № 2. — С. 299–310.

[7] Матійчук, М. І. Параболічні сингулярні крайові задачі.— Київ : Ін-т математики НАН України, 1999. — 176 с.

и B-гиперболических уравнений (гиперболических уравнений с оператором Бесселя вместо всех или некоторых вторых производных). Затем, И. А. Киприяновым совместно с В. В. Катраховым изучались краевые задачи для эллиптических уравнений, с особенностями типа существенных особенностей аналитических функций. В. В. Катраховым изучались спектральные задачи для систем с операторами Бесселя с переменными коэффициентами и свойства спектральной функции для них. Л. Н. Ляховым были изучены вопросы о мультипликаторах смешанного преобразования Фурье–Бесселя (Ханкеля), дробные степени B-эллиптических операторов (эллиптических операторов с оператором Бесселя вместо всех или некоторых вторых производных), сферические B-гармоники, и обобщенные гиперсингулярные интегралы и другие вопросы.

Методы решения задач для эллиптических уравнений с оператором Бесселя достаточно подробно разработаны А. Ванштейном и И. А. Киприяновым и др. В работах Я. И. Житомирского, М. И. Матийчука и др. были построены методы для решения задач для параболических линейных уравнений в частных производных, содержащих оператор Бесселя. Методы решения задач для уравнения гиперболического типа с оператором Бесселя, действующим по времени, которое называется классическим уравнением Эйлера–Пуассона–Дарбу развивались в работах Р. В. Кэррола, Р. И. Шоуолтера, Д. В. Брестерса, А. Ванштейна, М. М. Смирнова, С. А. Терсенова, Ш. Т. Каримова и др.

Уравнения с оператором Бесселя имеют много приложений. Ряд физических проблем, в таких разнообразных областях, как теория колебаний, электростатическая теория поля, распространение тепла, гидродинамика, теория упругости, сводятся к изучению сингулярных дифференциальных уравнений с оператором (1). Так, к гиперболическим уравнением с оператором Бесселя, в случае, когда число $\nu$ в (1) натуральное приводят модели, в которых присутствует симметрия по всем переменным или по группам переменных. К таким проблемам относится, например, проблема колебаний вращающегося диска (шара), которая привлекает внимание исследователей из-за важности ее применения к моделированию турбин, гироскопов и высокоскоростных камер. Случай, когда $\nu$ произвольное вещественное, крайне интересен с теоретической точки зрения, но также возникает в приложениях (например, — в задачах о случайном блуждании частицы, в газовой динамике и механике сплошных сред).

Методы применения теории обобщенных функций, порожденных квадратичной формой, к классическим дифференциальным уравнениям в частных производных, разработаны И. М. Гельфандом, Г. Е. Шиловым, Л. Хермандером. Весовые обобщенные функции, порожденные квадратичной формой, с весом, взятым по одной переменной, рассматривались и применялись к исследованию дифференциальным уравнениям в частных производных с оператором Бесселя И. А. Киприяновым, Л. А. Ивановым. Оценки выражений, содержащих весовые обобщенные функции, порожденные индефинитной квадратичной формой, получены А. Б. Муравником. В диссертации рассматриваются классы весовых обобщенных функций, порожденных неопределенной квадратичной формой, изучаются производные таких функций, описывается поведение этих функций в особых точках, найдено их преобразование Ханкеля.

Отдельный класс дифференциальных уравнений с оператором Бесселя составляют уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу вида

$$Au = (B_k)_t\, u, \qquad u = u(x,t;k), \tag{7}$$

где $A$ — линейный оператор, действующий только по переменным $x = (x_1, ..., x_n)$. Задачи Коши для уравнения $(B_k)_t u(x,t) = \Delta u(x,t)$ изучалась С. А. Терсеновым. А. В. Глушаком изучались абстрактные дифференциальные уравнения с оператором Бесселя вида (7), где $A$ — замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве. В частности, им исследован вопрос об устойчивости свойства равномерной корректности задачи Коши для указанных уравнений и изучены условия разрешимости таких задач с фредгольмовым оператором при производных. Уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и его обобщения имеют широкое применение в газовой и гидро-динамике[8], теории оболочек[9], в различных разделах механики сплошных сред[10], в теории распространения звука[11], при изучении столкновения гравитационных волн[12], в квантовой механике и теории относительности[13]. Гиперболическое уравнение типа Клейна–Гордона с оператором Бесселя, действующим по каждой из переменных, обобщающее уравнение типа Эйлера–Пуассона–Дарбу, описывает распространение волн в физически неоднородной среде с жесткостью. В одномерном случае такое уравнение с произвольными с переменными коэффициентами

[8] Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собрание соч., т. 2 / — М. — Л. : Гостехиздат, 1948. — 644 с.

[9] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Vol. 2. — Paris : Gauthier-Villars, 1915. — 579 p.

[10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред : Гидродинамика и теория упругости. — М. ; Л. : ОГИЗ : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1944. —- 624 с.

[11] Baker B. B., Copson E. T. The Mathematical Theory of Huygens' Principle. — New York : Oxford University Press, 1939. — 160 p.

[12] Hauser I., Ernst F. J. Initial value problem for colliding gravitational plane wave/ J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30, no. 4. — P. 872–887.

[13] Stewart J. M. The Euler–Poisson–Darboux equation for relativists/ General Relativity and Gravitation. — 2009. — Vol. 41, I. 9. — P. 2045–2071.

при первых производных описывающее, например, распространение волн по струне с переменной плотностью, было рассмотрено А. В. Боровских. В диссертации рассматривается уравнение типа Эйлера–Пуассона–Дарбу вида (2) и его обобщения вида (3) и (5).

Специальный класс представляют дифференциальные уравнения с оператором Бесселя (1) дробного порядка вида (3) и (4). В качестве метода решения этого уравнения выбран метод потенциалов Рисса. Метод потенциалов к решению задач для уравнений Лапласа, Гельмгольца и волнового уравнения был применен в работах М. Рисса, Л. Шварца, И. Т. Копсона. Теория потенциалов Рисса приведена в книгах Л. Шварца, И. Стейна, С. Хелгасона, С. Г. Самко и в работе В. А. Ногина и Е. В. Сухинина. Исследования М. Л. Гольдмана и В. С. Гулиева внесли существенный вклад в теорию операторов типа потенциала Рисса. Приложения метода потенциалов в теории обобщённых аналитических функций рассматривались А. П. Солдатовым[14]

Прикладной аспект гиперболических уравнений с оператором Бесселя дробного порядка тесно связан с различными методами визуализации, которые представляют большой интерес в различных областях современных исследований, имеющих дело с изображениями в некоторых типах томографических экспериментов, в том числе оптоакустической томографии, термоакустической томографии, радиолокации и эхолокации.

Большой интерес представляют впервые рассмотренные в диссертации дифференциальные уравнения с дробными степенями оператора Бесселя вида (6). Исследование дробных степеней оператора Бесселя было начато в работах И. Г. Шпринхайзен–Купер и А. Макбрайда. И. Димовски и В. Кирякова исследовали более общий гипербесселев оператор, а также его дробные степени в терминах преобразования Н. Д. Обрешкова.

Уравнения с дробной степенью оператора Бесселя моделируют случайное блуждание частницы. Такие модели рассмотрены И. Орсинтером и Р. Гаррой. Дробно-дифференциальные уравнения, описывающие случайные блуждания в непрерывном времени рассмотрены в В. Н. Колокольцовым.

Общим методом решения перечисленных задач для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя является метод операторов преобразования. Ненулевой оператор $T$ называется *оператором преобразования* для пары операторов $(A, B)$, если выполняется соотношение $TA = BT$. Использование операторов преобразования позволяет получать формулы связи между решениями возмущенного и невозмущенного уравнений, в

[14]Солдатов А. П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. — М.: Высшая школа, 1991. — 206 с.

том числе, обобщать известные формулы, связанные со вторыми производными, на случай, когда вместо второй производной применяется оператор Бесселя. Метод операторов преобразования также с успехом применяется к решению обратных задач, задач теории рассеяния, оптимального управления и при исследовании специальных классов динамических систем.

В. В. Катраховым и С. М. Ситником[15],[16] был предложен композиционный метод построения операторов преобразования, который впоследствии был существенно развит С. М. Ситником. Этот метод позволяет указать алгоритмы не только для получения новых операторов преобразования, но также и для построения дробных степеней любых подходящих операторов. Важным результатом применения схемы композиционного метода являются различные классы потенциалов, при помощи которых можно вводить и изучать дробные степени дифференциальных операторов, рассматривать дифференциальные уравнения дробного порядка, а также получать интегральные представления решений дифференциальных уравнений целого и дробных порядков. По той же схеме в специальном случае строятся классические псевдо-дифференциальные операторы[17].

Таким образом, тема диссертации «Метод композиционных интегральных преобразований для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя и его дробными степенями» является актуальной для теории дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.

**ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ.**

Основной целью диссертационного исследования является создание и разработка методов решения сингулярных гиперболических уравнений с операторами Бесселя дробного и целого порядка. Особое внимание уделяется обоснованию существования решения дифференциального гиперболического уравнения с операторами Бесселя дробного порядка в виде обобщенного потенциала и получению априорных оценок для этого решения. Для достижения поставленной цели в диссертации были решены следующие задачи.

1. Ввести классы весовых обобщенных функций, порожденной неопре-

[15] Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / СМФН. — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 211–426.

[16] Катрахов В. В., Ситник С. М. Композиционный метод построения $B$-эллиптических, $B$-параболических и $B$-гиперболических операторов преобразования / Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 3. — С. 307–311.

[17] Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения с неотриц характерист формой.— М., МГУ, 2010. — 360 с.

деленной квадратичной формой, изучить производные таких функций, описать поведение функций в особых точках, найти их преобразование Ханкеля.

2. Применить результаты, полученные для весовых обобщенных функций, к построению фундаментального решения итерированного ультрагиперболического уравнения с оператором Бесселя, действующим по каждой из переменных.

3. Разработать методы решения смешанной задачи для уравнения типа Эйлера–Пуассона–Дарбу.

4. Найти решение дифференциального уравнения с оператором Бесселя гиперболического типа дробного порядка. Исследовать решение на ограниченность в весовых функциональных классах, найти аналитическое продолжение этого решения.

5. Выработать метод решения смешанных задач для общего неоднородного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, с использованием гиперболических потенциалов, обобщающих потенциалы Рисса.

6. Исследовать дробные интегралы и производные Бесселя и сконструировать метод решениях дифференциальных уравнений с дробной производной Бесселя.

**МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.**

В диссертации разработаны оригинальные методы решения дифференциальных уравнений с оператором Бесселя целого и дробного порядков. Основным методом получения новых объектов и инструментов исследования является композиционный метод или метод факторизации. Кроме того, в работе используются методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, теории специальных функций, теории операторов преобразования, теории интегральных преобразований, теории дробного интегродифференцирования, интерполяционные методы, аппроксимативный метод регуляризации расходящихся интегралов.

**НАУЧНАЯ НОВИЗНА.**

Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором. На защиту выносятся утверждения, полученные лично автором. Перечислим главные из них.

1. Введены и изучены весовые обобщенные функции, порожденной неопределенной квадратичной формой.

2. Впервые построены и исследованы дробные степени гиперболического оператора, в котором по каждой из переменных действует оператор Бесселя.

3. Найдено решение дифференциального уравнения с оператором Бесселя гиперболического типа дробного порядка.

4. Построено аналитическое продолжение и получены оценки в весовых функциональных классах решения дифференциального уравнения с оператором Бесселя гиперболического типа дробного порядка.

5. Весовые обобщенные функции, порожденной неопределенной квадратичной формой применены к построению фундаментального решения итерированного ультрагиперболического уравнения с оператором Бесселя, действующим по каждой из переменных.

6. Представлен новый метод решения смешанной задачи для общего однородного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, с использованием преобразования Ханкеля и весовых обобщенных функций, порожденных неопределенной квадратичной формой.

7. Выработан оригинальный метод решения смешанных задач для общего неоднородного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, с использованием гиперболических потенциалов, обобщающих потенциалы Рисса.

8. Выполнено оригинальное исследование дробных интегралов и производных Бесселя и сконструирован метод решения дифференциальных уравнений с дробной производной Бесселя.

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ.**

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений в частных производных, теории интегродифференциальных уравнений, теории общего дробно-дифференциального интегрирования, теории вложения пространств, теории оптимального управления, в интегральной геометрии, в частности к обращению преобразования Радона на многообразиях. К практическим приложениям результатов диссертации относятся приложения к стохастическим методам изучения случайного блуждания частиц, приложения к задачам компьютерной томографии, приложения к обратным задачам и теории рассеяния, к задачам фильтрации, геофизики, трансзвуковой газодинамики и теоретической механики. Результаты диссертации будут полезны в научных исследованиях, проводимых в Российском университете дружбы народов, МГУ им.

М. В. Ломоносова, Южном математическом институте Владикавказского научного центра РАН, исследовательском Мексиканском математическом центре Синвестав, Самарском, Казанском, Воронежском, Ферганском, Бакинском госуниверситетах, Южном федеральном университете, Белгородском государственном национальном исследовательском университете и других российских и зарубежных математических центрах.

**СТЕПЕНЬ ДОСТОВЕРНОСТИ И АПРОБАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ.**

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на многих научных семинарах, в том числе

1. на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН под руководством члена-корреспондента РАН О. В. Бесова (2018 г.);

2. на семинаре отдела математической физики в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН под руководством члена-корреспондента РАН И. В. Воловича (2018 г.);

3. на семинаре по математической физике им. В.И. Смирнова в Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН под руководством профессора А. И. Назарова (2018 г.);

4. на семинаре по аналитической теории дифференциальных уравнений в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН под руководством профессора В. П. Лексина (2018 г.);

5. на семинаре "Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения" в РУДН под руководством профессора А. Л. Скубачевского (неоднократно, 2017, 2018 гг.);

6. на семинаре "Экстремальные задачи и нелинейный анализ" в РУДН под руководством профессора В. И. Буренкова и профессора А. В. Арутюнова (2018 г.);

7. на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством профессора И. В. Асташовой, профессора А. В. Боровских, профессора Н. Х. Розова, профессора И. Н. Сергеева. (неоднократно, 2017, 2018 гг.) и др.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались более чем на 50 международных конференциях. за период с 2005 по 2018 годы, в том числе на

1. 7-м Европейском математическом конгрессе (Берлин, Германия, 2016 г.);
2. Международном научном семинаре AMADE (Analytic Methods of Analysis and Differential Equations) (Минск, Беларусь, 2015, 2018 гг.);
3. Международной конференции "Operator theory" (Timisoara, Romania, 2018 г.);
4. Международной конференции "Transform methods and special functions" (Sofia, Bulgaria, 2018 г.);
5. Международной конференции "Waves in Science and Engineering" (Кэрэтаро, Мексика, 2016 г.);
6. Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Владимир, Россия, 2008, 2017 гг.);
7. Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (Владикавказ, Россия, 2015, 2017 гг.);
8. Международной конференции: "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения" (Ростов-на-Дону, Россия, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 гг.);
9. Восьмой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, Россия, 2017 г.);
10. Международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященной памяти академика А. В. Бицадзе (Москва, Россия, 2016 г.);
11. Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, Россия, 2009 г.);
12. Международной научной конференции, посвященной 150-летию со дня рождения А. М. Ляпунова (Харьков, Украина, 2007 г.);
13. Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы посвященной памяти И.Г. Петровского. (Москва, Россия, 2007 г.);

14. Международной научной конференции "Analysis and related topics" (Львов, Украина, 2005 г.);

15. Международной конференции "Современные методы и проблемы метематической гидродинамики - 2018" (Воронеж, Россия, 2018 г.);

16. Международной конференции, посвященной 90-летию В. А. Ильина (Москва, Россия, 2018 г.);

17. Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования" (Москва, Россия, 2018 г.);

18. Воронежской зимней математической школе (Воронеж, Россия, 2016 г.) и др.

**ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.**

По теме диссертации опубликовано 30 статей в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК (см. [1–30]), 23 из которых (или их переводы) опубликованы в изданиях, входящих в международные реферативные базы и системы цитирования Web of Science, Scopus, MathSciNet.

Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Из совместных статей [2–7,10–12,14,15,17,19,21,23,24,29,30] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично автором.

**СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИССЕРТАЦИИ.**

Диссертация изложена на 313 страницах и состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 270 наименования. Каждая глава состоит из нескольких разделов; объемные разделы разделены на пункты. Принята своя нумерация разделов в каждой из глав.

В списке цитированной литературы в алфавитном порядке идут сначала работы на русском, а затем — на иностранных языках.

**ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ.**

Во ВВЕДЕНИИ указаны цели и методы исследования, обоснованы актуальность, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, дано краткое изложение содержания диссертации. Основной текст диссертации разбит на пять глав. Первая глава содержит предварительные сведения и обозначения, которые используются в работе, касающиеся специальных функций, функциональных пространств, интегральных преобразований и основных классов операторов преобразований. Во второй главе изучены некоторые классы весовых обобщенных функций, связанных с неопределенной квадратичной формой, которые затем использованы для решения сингулярных гиперболических дифференциальных уравнений с оператором Бесселя. Третья глава посвящена методу потенциалов Рисса решения гиперболических дифференциальных уравнений дробного порядка с оператором Бесселя. В четвертой главе найдено фундаментальное решение итерированного ультрагиперболического уравнения с операторами Бесселя, действующими по каждой из переменных, а также представлен и реализован метод решения смешанных задач для гиперболических уравнений с оператором Бесселя. В пятой главе решено дифференциальное уравнение с правосторонней дробной производной Бесселя на полуоси, реализующей дробную положительную степень оператора Бесселя.

Перейдем к более подробному изложению содержания работы.

ГЛАВА 1 состоит из трех разделов. В ней приведены необходимые определения, обозначения и, используемые в дальнейшем для решения сингулярных дифференциальных уравнений, результаты, а также описан композиционный метод и представлены используемые далее операторы преобразования, построенные этим методом. В содержание первой главы входят сведения о специальных функциях, весовых пространствах, интегральных преобразованиях, а также в этой главе введено обобщение пространства Лизоркина–Самко, описаны дробные производные и интегралы, построены операторы преобразования. Эта часть работы служит фундаментом для систематического изучения в последующих четырех главах весовых обобщенных функций; дробных степеней гиперболического оператора, в котором по каждой из переменных действует оператор Бесселя; решения дифференциальных уравнений с оператором Бесселя гиперболического типа дробного и целого порядков; решения дифференциальных уравнений с дробной производной Бесселя.

В разделе 1 первой главы приведены определения таких специальных функций как: гамма-функция, бета-функция, символ Похгаммера, функция ошибок, функции Бесселя, гипергеометрическая функция Гаусса, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, функции Уиттекера обобщенная гипергеометрическая функция.

В разделе 2 первой главы приведены следующие классы функций.

Класс $C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ состоящий из функций $f\in C^m(\overline{\Omega}_+)$, таких, что $\left.\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}}\right|_{x=0}=0$ для всех неотрицательных целых $k$, таких, что $2k+1\leq m$ при $i=1,...,n$, где через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначено подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по $x_i$ для любого

$i$=1, ..., $n$ непрерывно продолжаются на $x_i$=0, $\Omega_+=\Omega\cap\mathbb{R}^n_+$, $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i$=0, $i$=1, ..., $n$, а $\mathbb{R}^n_+$ — ортант $\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$, $\overline{\Omega}_+ = \Omega\cap\overline{\mathbb{R}}{}^n_+$, $\overline{\mathbb{R}}{}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\}$. При этом $C^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+)=\bigcap\limits_{m=0}^{\infty}C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ и полагаем для краткости $C^m_{ev}=C^m_{ev}(\overline{\mathbb{R}}{}^n_+)$, $m$=0, 1, 2, ..., $\infty$.

Часть пространства Шварца $S_{ev}$ определяется следующим образом $S_{ev}=S_{ev}(\mathbb{R}^n_+)=\left\{f\in C^\infty_{ev}:\sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|<\infty\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_+\right\}$, где $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$, $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_n$ — целые неотрицательные числа, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta=D^{\beta_1}_{x_1}...D^{\beta_n}_{x_n}$, $D_{x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Пусть мультииндекс $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i>0$, $i$=1, ..., $n$, $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

Пространство $L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)=L^\gamma_p$, $1\leq p<\infty$ состоит из измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций, четных по каждой из своих переменных $x_i$, $i=1,...,n$ таких, что если $f\in L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)$, то $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx<\infty$, $x^\gamma=\prod\limits_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Для вещественного числа $p\geq 1$ $L^\gamma_p$–норма функции $f\in L^\gamma_p$ определяется формулой

$$||f||_{L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)}=||f||_{p,\gamma}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{1/p}. \qquad (8)$$

Через $L^\gamma_{p,loc}$ будем обозначать множество функций $u$, определенных почти всюду на $\mathbb{R}^n_+$, таких что $u\varphi\in L^\gamma_p$ для всех $\varphi\in S_+$. Пусть $S'_+$ — сопряжённое к $S_+$ пространство. Каждой функции $u\in L^\gamma_{1,loc}$ сопоставляется *регулярная весовая обобщенная функция* $u\in S'_+$ действующая по правилу

$$(u,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}u(x)\,\varphi(x)\,x^\gamma\,dx,\quad \varphi\in S_+.$$

Все остальные линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции) $u\in S'_+$ будем называть *сингулярными весовыми обобщенными функциями.* Например, сингулярной весовой обобщенной функцией является функция $(\delta_\gamma,\varphi)_\gamma=\varphi(0)$, $\varphi\in S_+$.

Преобразование Ханкеля функции $f\in L^\gamma_1(\mathbb{R}^n_+)$ определяется равенством

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\mathbf{F}_\gamma f=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dx,$$

где $\mathbf{j}_\gamma(x;\xi) = \prod\limits_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)$, $\gamma_1 > 0, ..., \gamma_n > 0$, $j_\nu(x) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\ J_\nu(x)$ — нормированная функция Бесселя, $J_\nu$ — функция Бесселя первого рода.

Для $f \in S_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ обратное многомерное преобразование Ханкеля имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1}_\gamma[\widehat{f}(\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^\gamma\, d\xi.$$

Пусть $\Psi^\gamma_V$ обозначает класс функций $S_{ev}$, исчезающих вместе со всеми своими производными на заданном замкнутом множестве $V$: $\Psi^\gamma_V = \{\psi \in S_{ev}(\mathbb{R}^n_+) : (D^k\psi)(x) = 0, x \in V, |k| = 0,1,2,...\}$. Пространство $\Psi^\gamma_V$ является двойственным в смысле преобразования Ханкеля к $\Phi^\gamma_V$: $\Phi^\gamma_V = \{\varphi : \mathbf{F}_\gamma\varphi \in \Psi^\gamma_V\}$.

В разделе 3 первой главы приведены определения обобщенного сдвига ${}^\gamma T^y_x$ функции $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1_+$:

$${}^\gamma T^y_x f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}) \sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi, \tag{9}$$

многомерного обобщенного сдвига:

$$({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x) = {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) = ({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1} ... {}^{\gamma_n}T^{y_n}_{x_n} f)(x), \tag{10}$$

где каждый из обобщенных сдвигов ${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}$ определен при $i=1,...,n$ выражением (9) и весового сферического среднего функции $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n_+$ при $n \geq 2$:

$$M^\gamma_t[f(x)] = \frac{1}{|S^+_1(n)|_\gamma} \int\limits_{S^+_1(n)} {}^\gamma\mathbf{T}^{t\theta}_x f(x)\theta^\gamma dS, \tag{11}$$

где $\theta^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} \theta_i^{\gamma_i}$, $S^+_1(n) = \{\theta : |\theta| = 1, \theta \in \mathbb{R}^n_+\}$ — часть сферы в $\mathbb{R}^n_+$, а $|S^+_1(n)|_\gamma = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}$. При $n = 1$ полагаем $M^\gamma_t[f(x)] = {}^\gamma T^t_x f(x)$.

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом ${}^\gamma\mathbf{T}^y_x$ называется выражение

$$(f * g)_\gamma(x) = (f * g)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x) y^\gamma\, dy. \tag{12}$$

Основное утверждение раздела 2 первой главы состоит в том, что если $f \in C^2_{ev}$, то $M_t^\gamma[f] \in C^2_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ по $x$, $M_t^\gamma[f] \in C^2_{ev}(\mathbb{R}^1_+)$ по $t$ и весовое сферическое среднее $M_t^\gamma$ есть оператор преобразования, сплетающий $(\Delta_\gamma)_x$ и $(B_{n+|\gamma|-1})_t$:

$$(B_{n+|\gamma|-1})_t M_t^\gamma[f(x)] = M_t^\gamma[(\Delta_\gamma)_x f(x)], \qquad (\Delta_\gamma)_x = \sum_{i=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_i}. \tag{13}$$

ГЛАВА 2 состоит из четырех разделов. Во второй главе изучены некоторые классы весовых обобщенных функций, связанных с неопределенной квадратичной формой, которые затем использованы для решения дифференциальных уравнений вида

$$\left( (B_{\gamma_1})_{x_1} - \sum_{i=2}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_i} \right)^\alpha u(x) = f(x), \qquad \alpha > 0$$

и

$$\left[ \sum_{i=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_i} - (B_k)_t \right] u = c^2 u, \quad k \in \mathbb{R}, \quad c > 0, \quad u = u(x,t),$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i > 0$, $i = 1, ..., n$, $t > 0$. Более конкретно, во второй главе определена весовая обобщенная функции, сосредоточенная на части конуса, для которой доказаны теоремы о представлении ее производных; определены весовые обобщенные функции, реализующие степени неопределенных квадратичных форм; рассмотрены их особые точки; найдены вычеты в этих особых точках; введен класс общих весовых обобщенных функций, прожденных неопределенной квадратичной формой, связанных в частных случаях с функциями Бесселя; найдены преобразования Ханкеля рассмотренных функций. Весовые обобщенные функции, порожденные индефинитной квадратичной формой, с весом, взятым по всем переменным, а также более общие весовые обобщенные функции, порожденные функциями Бесселя являются основными составляющими при построении решения дифференциальных уравнений с оператором Бесселя гиперболического типа дробного и целого порядков, а также через них выражается фундаментальное решение ультрагиперболического дифференциального уравнения с операторами Бесселя, действующими по каждой из переменных.

В первом разделе второй главы расмматривается весовая обобщенная функция, сосредоточенная на части конуса, находятся вычеты в ее особых точках и ее производные.

Во втором разделе второй главы определены весовые обобщенные функции, реализующие степени неопределенных квадратичных форм. А именно, пусть $p\geq 1$, $q\geq 1$, $\gamma=(\gamma',\gamma'')$, $\gamma'=(\gamma_1,...,\gamma_p)$, $\gamma''=(\gamma_{p+1},...,\gamma_n)$, $\gamma_i>0$, $i=1,...,n$ и

$$P(x)=x_1^2+...+x_p^2-x_{p+1}^2-...-x_{p+q}^2, \qquad n=p+q.$$

Весовые обобщенные функции $P^{\lambda}_{\gamma,+}$ и $P^{\lambda}_{\gamma,-}$ определяются формулами

$$(P^{\lambda}_{\gamma,+},\varphi)_{\gamma}=\int\limits_{\{P(x)>0\}^+} P^{\lambda}(x)\varphi(x)x^{\gamma}dx, \qquad \varphi\in S_{ev} \tag{14}$$

и

$$(P^{\lambda}_{\gamma,-},\varphi)_{\gamma}=\int\limits_{\{P(x)<0\}^+} (-P(x))^{\lambda}\varphi(x)x^{\gamma}dx, \qquad \varphi\in S_{ev}, \tag{15}$$

где $\{P(x)>0\}^+=\{x\in\mathbb{R}^n_+ : P(x)>0\}$, $\{P(x)<0\}^+=\{x\in\mathbb{R}^n_+ : P(x)<0\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

Кроме того,

$$(P+i0)^{\lambda}_{\gamma}=P^{\lambda}_{\gamma,+}+e^{\pi\lambda i}P^{\lambda}_{\gamma,-}, \tag{16}$$

$$(P-i0)^{\lambda}_{\gamma}=P^{\lambda}_{\gamma,+}+e^{-\pi\lambda i}P^{\lambda}_{\gamma,-}. \tag{17}$$

В третьем разделе второй главы рассмотрены более общие весовые обобщенные функции, порожденные неопределенной квадратичной формой.

Пусть $\varphi\in S_{ev}$, $f(z,\lambda)$ — целая функция от $z$ и $\lambda$. Весовые обобщенные функции $\mathscr{P}^{\lambda}_{\gamma}f(\mathscr{P},\lambda)$ определяются равенством

$$(\mathscr{P}^{\lambda}_{\gamma}f(\mathscr{P},\lambda),\varphi(x))_{\gamma}=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathscr{P}^{\lambda}_{\gamma}\cdot f(\mathscr{P},\lambda)\varphi(x)dx,$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$, $Re\,\lambda>-1$, $\mathscr{P}$ — комплексная квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью. При $Re\,\lambda>-1$ функция $\mathscr{P}^{\lambda}_{\gamma}f(\mathscr{P},\lambda)$ является аналитической от $\lambda$. На другие значения весовая обобщенная функция $\mathscr{P}^{\lambda}_{\gamma}f(\mathscr{P},\lambda)$ распространяется при помощи аналитического продолжения.

В четвертом разделе второй главы найдены преобразования Ханкеля рассмотренных весовых обобщенных функций, порожденных неопределенной квадратичной формой.

**Теорема 9.** *Преобразования Ханкеля* $(P \pm i0)^\lambda_\gamma$ *для* $\lambda{\neq}k$, $\lambda{\neq}-\left(\frac{n+|\gamma|}{2}{+}k\right)$, $k{=}0,1,2,...$ *вычисляются по формулам*

$$\mathbf{F}_\gamma[(P+i0)^\lambda_\gamma](\xi) = e^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}\beta_{n,\gamma}(\lambda)(Q-i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}, \tag{18}$$

$$\mathbf{F}_\gamma[(P-i0)^\lambda_\gamma](\xi) = e^{\frac{q+|\gamma''|}{2}i\pi}\beta_{n,\gamma}(\lambda)(Q+i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}-\lambda}, \tag{19}$$

*где* $Q = \xi_1^2 + ... + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - ... - \xi_{p+q}^2$,

$$\beta_{n,\gamma}(\lambda) = 2^{2\lambda+|\gamma|}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(-\lambda\right)}.$$

ГЛАВА 3 посвящена методу потенциалов Рисса решения дифференциальных уравнений дробного порядка вида

$$\left((B_{\gamma_1})_{x_1} - \sum_{i=2}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}\right)^\alpha u(x) = f(x), \tag{20}$$

и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}\right)^\alpha u(x) = f(x), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

где $B_{\gamma_i}$ — дифференциальный оператор Бесселя (1), $x{=}(x_1,...,x_n)$, $x_i{>}0$, $\gamma_i{>}0$, $i{=}1,...,n$, $\alpha{>}0$. Для указанного решения доказаны априорная оценка в весовых пространствах, абсолютная сходимость, ограниченность и полугрупповые свойства, построено аналитическое продолжение,а также приведены примеры. Решение дифференциального уравнения (20) методом теории потенциала потребовало преодоления целого ряда трудностей и доказательства нескольких сложных в техническом отношении теорем. Основные трудности, по сравнению с классическими дифференциальными уравнениями, связаны с использованием более общих дифференциальных уравнений с операторами Бесселя, а также намного более сложно устроенного оператора обобщенного сдвига.

В первом разделе третьей главы даны определения риссова дробного B-дифференцирования как предела усеченного сверточного выражения и гиперболического B-потенциала, исследованы усредняющие ядра, показана корректность перехода к пределу в определении риссова дробного B-дифференцирования.

Усеченными дробными B-производными Рисса будем называть выражения

$$(D^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma})_{\varepsilon,\delta}f=\left(\left(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)*f(x)\right)_{\gamma}=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}{}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}(y)({}^{\gamma}\mathbf{T}^y_x f(x))y^{\gamma}dy,$$

где

$${}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}(x)=\left(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)=$$

$$=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\mathbf{j}_{\gamma}(x,\xi)\xi^{\gamma}\,d\xi,$$

$m\in\mathbb{N}$, $m\geq n+|\gamma|-\frac{\alpha}{2}$, $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$.

Вводя обозначение

$$M_{\varepsilon,\delta}=\frac{(P\mp i0)^m e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m},$$

запишем

$${}^{\mp}g^{\alpha}_{\varepsilon,\delta}(x)=\left(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}(P\mp i0)^{\frac{\alpha}{2}}M_{\varepsilon,\delta}\right)(x).$$

Риссово дробное B-дифференцирование определим посредством предельного перехода

$$(D^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f)=\overset{L^{\gamma}_p}{\lim_{\delta\to 0}}\,\overset{L^{\gamma}_2}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left(\left(\mathbf{F}^{-1}_{\gamma}\frac{(P\mp i0)^{m+\frac{\alpha}{2}}e^{-\delta|\xi|}}{(P(\xi)+i\varepsilon|\xi|^2)^m}\right)(x)*f(x)\right)_{\gamma},\qquad f\in S_{ev},$$

где предел при $\delta\to 0$ понимается по норме $L^{\gamma}_p$, а предел при $\varepsilon\to 0$ понимается по норме $L^{\gamma}_2$.

Таким образом, при нецелых положительных $\alpha$

$$\left((B_{\gamma_1})_{x_1}-\sum_{i=2}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}\right)^{\alpha}u(x)=(D^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}u),$$

а при натуральных $\alpha=m$

$$(D^{m}_{P\pm i0,\gamma}f)=\left((B_{\gamma_1})_{x_1}-\sum_{i=2}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}\right)^{m}u(x).$$

Гиперболические В-потенциалы $I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}$ определяются формулами

$$(I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f)(x)=\frac{e^{\pm\frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{H_{n,\gamma}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(P\pm i0)_{\gamma}^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}({}^{\gamma}\mathbf{T}^y_x f)(x)y^{\gamma}dy, \qquad (22)$$

где $y^{\gamma}=\prod\limits_{i=1}^{n}y_i^{\gamma_i}$, $\gamma'=(\gamma_2,...,\gamma_n)$, $|\gamma'|=\gamma_2+...+\gamma_n$,

$$H_{n,\gamma}(\alpha)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{n-\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}.$$

**Теорема 15.** *Пусть* $f\in\Phi^{\gamma}_{V}$, $V=\{\xi\in\mathbb{R}^n_+ : P(\xi)=0\}$, $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$, *тогда* $\varphi=I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f$ *есть решение дифференциального уравнения дробного порядка вида*

$$(D^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}\varphi)(x)=f(x). \qquad (23)$$

Во втором разделе третьей главы получена априорная оценка решения дифференциального уравнения дробного порядка (23) и показана его абсолютная сходимость.

**Теорема 17.** *Пусть*

$$\varphi=I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f$$

*— решение уравнения* (23)*, существование которого доказано в теореме 15,* $n+|\gamma|-2<\alpha<n+|\gamma|$, $1\le p<\frac{n+|\gamma|}{\alpha}$. *Оценка*

$$||\varphi||_{q,\gamma}\le C_{n,\gamma,p}||f||_{p,\gamma}, \qquad f(x)\in S_{ev} \qquad (24)$$

*выполняется для него тогда и только тогда, когда* $q=\frac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}$. *Константа* $C_{n,\gamma,p}$ *не зависит от* $f$.

В третьем разделе третьей главы доказано полугрупповое свойство решения В-гиперболического дифференциального уравнения дробного порядка и приведены примеры.

**Теорема 19.** *Гиперболические В-потенциалы Рисса при* $f\in\Phi^{\gamma}_{V}$, $V=\{x\in\mathbb{R}^n_+ : P(x)=0\}$, *удовлетворяют равенству*

$$I^{\beta}_{P\pm i0,\gamma}I^{\alpha}_{P\pm i0,\gamma}f=I^{\alpha+\beta}_{P\pm i0,\gamma}f. \qquad (25)$$

В четвертом разделе третьей главы строится аналитическое продолжение гиперболического В-потенциала Рисса.

В пятом разделе третьей главы рассмотрено смешанное риссово дробное B-дифференцирование в случае, когда по одной из переменных действует вторая производная, а по остальным — операторы Бесселя. При этом сверточное выражение, необходимое для определения такого дифференцирования оказывается гораздо проще, чем в несмешанном случае.

В ГЛАВЕ 4 найдено фундаментальное решение итерированного уравнения

$$\left[\sum_{i=1}^{p}(B_{\gamma_i})_{x_i}-\sum_{i=p+1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}\right]^m u(x)=f(x),\qquad m{\in}\mathbb{N},$$

где $x=(x_1,...,x_n)$, $x_i>0$, $i=1,...,n$, а также представлены и реализованы методы решения смешанных задач для гиперболических уравнений с оператором Бесселя вида

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}-(B_k)_t\right]u=c^2u,\quad k\in\mathbb{R},\quad c>0,\quad u=u(x,t),$$

и

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}-(B_k)_t\right]u=f,\quad k\in\mathbb{R},\quad c>0,\quad u=u(x,t),$$

где $x=(x_1,...,x_n)$, $x_i>0$, $i=1,...,n$, $t>0$. В этой главе примение результатов второй главы позволило найти фундаментальное решение итерированного ультрагиперболического оператора с оператором Бесселя, действующим по каждой из переменных. Кроме того, преобразования Ханкеля весовых обобщенных функций, порожденных неопределенной квадратичной формой, полученные во второй главе, использовались для решения смешанных задач для гиперболических уравнений с оператором Бесселя. Наконец, метод потенциалов Рисса был применен для решения неоднородных гиперболических уравнений с оператором Бесселя.

В первом разделе главы 4 найдены решения из $S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+){\times}C^2_{ev}(0,\infty)$ обобщения уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на случай, когда по всем пространственным переменным действует оператор Бесселя. Принадлежность $u{\in}S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+){\times}C^2_{ev}(0,\infty)$ означает, что $u(x,t;k)$ принадлежит $S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ по $x$ и принадлежит $C^2_{ev}(0,\infty)$ по $t$.

**Теорема 31.** *Решение* $u{\in}S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+){\times}C^2_{ev}(0,\infty)$, $u{=}u(x,t;k)$, $(x,t){\in}\mathbb{R}^{n+1}_+$ *задачи*

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_k)_t\,]\,u=c^2u,\quad k\in\mathbb{R},\quad c>0,\tag{26}$$

$$u(x,0;k)=\varphi(x),\quad u_t(x,0;k)=0,\quad u_{x_i}(x,t;k)|_{x_i=0}=0,\quad i=1,...,n,\tag{27}$$

*для* $k{\neq}-1,-3,-5,\ldots$ *задается формулой*

$$u(x,t;k)=$$

$$=C_{n,\gamma,k}\left(t^{1-k}(t^2{-}|x|^2)_+^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\,j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((t^2{-}|x|^2)_+^{\frac{1}{2}}\cdot c\right)*\varphi(x)\right)_\gamma, \quad (28)$$

*где*

$$C_{n,\gamma,k}=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)},\qquad \varphi\in S'_{ev}(\mathbb{R}^n_+).$$

*При* $k\geq 0$ *решение* (28) *задачи (26)–(27) единственно. В случае* $k<0$ *решение (26)–(27) не единственно. При* $k<0$ *в случае когда* $k\neq -1,-3,-5,\ldots$ *разность между любыми двумя произвольными решениями имеет вид*

$$At^{1-k}u(t,x;2-k),\qquad A=const, \quad (29)$$

*где* $u(t,x;2-k)$ *— решение задачи*

$$[(\triangle_\gamma)_x-(B_{2-k})_t\,]\,u=c^2u,$$

$u(x,0;2-k)=\tau(x)$, $u_t(x,0;2-k)=0$, $u_{x_i}(x,t;2-k)|_{x_i=0}=0$, $i=1,...,n$,

$\tau(x)$ *— произвольная функция* $S_{ev}$ *или распределение* $S'_{ev}$. *При* $k{=}-1,-3,-5,\ldots$ *не единственное решение задачи (26)–(27) будет содержать слагаемое* (29) и

$$\frac{e^{\pm\frac{1}{2}\pi ni}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-k+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t^{1-k}\left((t^2-|x|^2-c^2\pm i0)_\gamma^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}*\varphi(x)\right)_\gamma.$$

Во втором разделе третьей главы с помощью результатов, полученных для весовых обобщенных функций, связанных с неопределенной квадратичной формой, найдено фундаментальное решение итерированного B-ультрагиперболического уравнения.

Пусть $x\in\mathbb{R}^n_+$, $n=p+q$, $p,q\in\mathbb{N}$. Ищется фундаментальное решение уравнения

$$\square_\gamma^k u=f, \quad (30)$$

где $k{\in}\mathbb{N}$, $\square_\gamma$ — однородный линейный дифференциальный оператор вида

$$\square_\gamma=(\Delta_{\gamma'})_{x'}-(\Delta_{\gamma''})_{x''}=B_{\gamma_1}+...+B_{\gamma_p}-B_{\gamma_{p+1}}-...-B_{\gamma_{p+q}},$$

$(\Delta_{\gamma'})_{x'} = \sum\limits_{i=1}^{p}(B_{\gamma_i})_{x_i}$, $(\Delta_{\gamma''})_{x''} = \sum\limits_{j=p+1}^{p+q}(B_{\gamma_j})_{x_j}$, $B_{\gamma_i}{=}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}{+}\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$.
Фундаментальным решением уравнения (30) будем называть обобщенную весовую функцию $u$, такую что

$$\Box_\gamma^k u = \delta_\gamma. \tag{31}$$

**Теорема 32.** *За исключением случая, когда* $n + |\gamma| = 2, 4, 6, ...$ *и* $k{\geq}\frac{n+|\gamma|}{2}$, *функции*

$$u = (-1)^k \frac{e^{\pm i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} - k\right)}{4^k(k-1)!|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} - 1\right)}(P \pm i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k} \tag{32}$$

*являются фундаментальными решениями уравнения* $\Box_\gamma^k u{=}f$ *в смысле* (31). *Если же* $n{+}|\gamma|{=}2, 4, 6, ...$ *и* $k{\geq}\frac{n+|\gamma|}{2}$, *то функция* $(P{+}i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}{=}(P{-}i0)_\gamma^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ *является решением однородного уравнения* $\Box_\gamma^k u = 0$.

В третьем разделе четвертой главы метод потенциалов Рисса и метод операторов преобразования применены к решению неоднородных итерированных уравнений типа Эйлера–Пуассона–Дарбу.

В ГЛАВЕ 5 решено дифференциальное уравнение с дробной производной Бесселя вида

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{2(\alpha+k)}(B_{\gamma,-}^{\alpha+k}f)(x) = h(x), \qquad x > 0, \qquad \alpha > 0,$$

где $A_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, ..., 1$, с правосторонней дробной производной Бесселя на полуоси, реализующей дробную положительную степень оператора (1), Приведены определения и элементарные свойства дробных степеней оператора Бесселя, интегральные преобразования Меллина и Ханкеля дробных степеней оператора Бесселя на полуоси, методом преобразования Меллина найдено решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с дробной производной Бесселя. Приведены примеры.

В первом разделе пятой главы даны определения дробных интегралов Бесселя на отрезке и полуоси с ядром, представляющим собой гипергеометрическую функцию Гаусса; получены формулы, выражающие дробные интегралы Бесселя через функции Лежандра и другие свойства.

Пусть $\alpha > 0$. Для функций $f(x){\in}L_1(0, \infty)$, $a \geq 0$ введем операторы $B_{\gamma,-}^{-\alpha}$ и $B_{\gamma,0+}^{-\alpha}$ , представляющие собой, соответственно, правосторонний и левосторонний дробные интегралы Бесселя на полуоси $[0,\infty)$

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,-}f)(x)=(IB^{\alpha}_{\gamma,-}f)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_x^\infty\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{x^2}{y^2}\right)f(y)dy \tag{33}$$

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=(IB^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma}\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{x^2}\right)f(y)dy. \tag{34}$$

Во втором разделе пятой главы определены дробные производные Бесселя на конечном промежутке и на полуоси и рассмотрены их свойства.

Пусть $\alpha>0$. Правостороннюю и левостороннюю дробные производные Бесселя на полуоси определим, соответственно, равенствами

$$(B^{\alpha}_{\gamma,-}f)(x)=(DB^{\alpha}_{\gamma,-}f)(x)=B^n_\gamma(IB^{n-\alpha}_{\gamma,-}f)(x),\qquad n=[\alpha]+1 \tag{35}$$

и

$$(B^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=(DB^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=B^n_\gamma(IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x),\qquad n=[\alpha]+1. \tag{36}$$

В третьем разделе пятой главы получены преобразования Меллина дробных интегралов и производных Бесселя, а также их преобразования Ханкеля и полугрупповые свойства.

**Теорема 39.** *Пусть $\alpha>0$, $x^kf(x)\in L_1(0,\infty)$ для всех $k=0,1,2,\ldots$. Преобразования Меллина от дробного интеграла $IB^{\alpha}_{\gamma,-}$ и дробной производной $DB^{\alpha}_{\gamma,-}$ Бесселя на полуоси имеют вид*

$$((IB^{\alpha}_{\gamma,-}f)(x))^*(s)=\frac{1}{2^{2\alpha}}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\\ \alpha+\frac{s}{2}-\frac{\gamma-1}{2}, & \alpha+\frac{s}{2}\end{array}\right]f^*(2\alpha+s), \tag{37}$$

$$((DB^{\alpha}_{\gamma,-}f)(x))^*(s)=2^{2\alpha}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc}\frac{s}{2}, & \frac{s}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\\ \frac{s}{2}-\alpha-\frac{\gamma-1}{2}, & \frac{s}{2}-\alpha\end{array}\right]f^*(s-2\alpha). \tag{38}$$

В четвертом разделе пятой главы преобразование Меллина использовано для получения частного решения дифференциального уравнения с дробной производной Бесселя вида

$$\sum_{k=0}^m A_kx^{2(\alpha+k)}(B^{\alpha+k}_{\gamma,-}f)(x)=h(x),\qquad x>0,\qquad \alpha>0, \tag{39}$$

где $A_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, ..., 1$, приведены примеры. Решение (39) имеет вид

$$f(x) = \int\limits_0^\infty G_{\alpha,\gamma}\left(\frac{x}{t}\right) h(t) \frac{dt}{t},$$

где

$$G_{\alpha,\gamma}(x) = \left(M^{-1}\left[\frac{1}{P_{\alpha,\gamma,m}(s)}\right]\right)(x),$$

$$P_{\alpha,\gamma,m}(s) = \sum_{k=0}^{m} A_k 2^{2(\alpha+k)}\,\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{2}+\alpha+k, & \frac{s-\gamma+1}{2}+\alpha+k \\ \frac{s}{2}, & \frac{s-\gamma+1}{2} \end{array}\right] \neq 0.$$

В заключении перечисленны представленные методы, решенные задачи и описаны алгоритмы, следуя которым представленные в работе методы могут быть обобщены на случай, когда вместо оператора Бесселя взят какой–либо другой оператор для которого может быть построен оператор обобщенного сдвига.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


1. Шишкина, Э. Л. Обобщенная весовая функция $r^\gamma$ / Э. Л. Шишкина // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2006. — No 1. — С. 215–221.

2. Шишкина, Э. Л. Обобщенные B-потенциалы Рисса смешанного типа / Э. Л. Шишкина, Л. Н. Ляхов // ДАН. — 2006. — Т. 406, No 3. — С. 303–307.

3. Шишкина, Э. Л. Общие B-гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой / Э. Л. Шишкина, Л. Н. Ляхов // ДАН. — 2007. — Т. 412, No 2. — С. 162–166.

4. Шишкина, Э. Л. Обращение общих B-потенциалов Рисса с однородной характеристикой в весовых пространствах / Э. Л. Шишкина, Л. Н. Ляхов // ДАН. — 2009. — Т. 426, No 4. — С. 443–447.

5. Шишкина, Э. Л. Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Э. Л. Шишкина, Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, No 4. — С. 516–528.

6. Шишкина, Э. Л. Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени / Э. Л. Шишкина, Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин // ДАН. — 2014. — Т. 459, No 5. — С. 533–538.

7. Шишкина, Э. Л. Решение общего уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, содержащее оператор Бесселя по всем переменным / Э. Л. Шишкина, О. П. Барабаш // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2016. — Т. 21, No 6. — С. 2146–2151.

8. Шишкина, Э. Л. Интегральное представление ядра оператора, аппроксимирующего обратный оператор для гиперболического B-

потенциала Рисса / Э. Л. Шишкина // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2016. — Т. 21, No 2. — С. 450–458.

9. Шишкина, Э. Л. О свойствах одного усредняющего ядра в весовом классе Лебега / Э. Л. Шишкина // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2016. — Т. 42, 6(227). — С. 12–19.

10. Шишкина, Э. Л. Об одном тождестве для итерированного весового сферического среднего и его приложениях / Э. Л. Шишкина, С. М. Ситник // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — Т. 13. — С. 849–860.

11. Шишкина, Э. Л. Об обобщении биноминальной теоремы, возникающем в теории дифференциальных уравнений / Э. Л. Шишкина, Д. С. Дончев, С. М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2017. — Т. 49, 27(276). — С. 19–25.

12. Шишкина, Э. Л. Об уточнениях неоклассического неравенства и его приложениях в теории стохастических дифференциальных уравнений и броуновского движения / Э. Л. Шишкина, Д. С. Дончев, С. М. Ситник // Челябинск. физ.-мат. ж. — 2017. — Т. 2, No 3. — С. 257–265.

13. Шишкина, Э. Л. Весовые обобщенные функции, отвечающие квадратичной форме с комплексными коэффициентами / Э. Л. Шишкина // Челябинск. физ.-мат. ж. — 2017. — Т. 2, No 1. — С. 88–98.

14. Шишкина, Э. Л. О дробных степенях оператора Бесселя на полуоси / Э. Л. Шишкина, С. М. Ситник // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1–10.

15. Шишкина, Э. Л. О представлении в виде ряда интегральных ядер операторов преобразования для возмущенных уравнений Бесселя/ В. В. Кравченко, Э. Л. Шишкина, С. М. Торба // Матем. заметки. — 2018. — Т. 104, № 4. — С. 552–570.

16. Shishkina, E. L. Inversion of integral of B-potential type with density from $\Phi_\gamma$ / E. L. Shishkina // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 160, no. 1. — P. 95–102.

17. Shishkina, E. L. Weighted mixed spherical means and singular ultrahyperbolic equation / E. L. Shishkina, L. N. Lyakhov // Analysis (Germany). — 2016. — Vol. 36, no. 2. — P. 65–70.

18. Shishkina, E. L. On weighted generalized functions associated with quadratic forms / E. L. Shishkina // Probl. Anal. Issues Anal. — 2016. — Vol. 5(23), no. 2. — P. 52–68.

19. Shishkina, E. L. Accompanying Distributions of Singular Differential Operators / E. L. Shishkina, L. N. Lyakhov, M. V. Polovinkina // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 219, no. 2. — P. 184–189.

20. Shishkina, E. L. On the boundedness of hyperbolic Riesz B-potential / E. L. Shishkina // Lith. Math. J. — 2016. — Vol. 56, no. 4. — P. 540–551.

21. Shishkina, E. L. On fractional powers of Bessel operators / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // J. Inequal. Spec. Funct. — 2017. — Vol. 8, no. 1. — P. 49–67.

22. Shishkina, E. L. Inversion of the mixed Riesz hyperbolic B–potentials / E. L. Shishkina // International Journal of Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 30, no. 6. — P. 487–500.

23. Shishkina, E. L. General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // Electron. J. Differ. Equ. — 2017. — Vol. 2017, no. 177. — P. 1–20.

24. Shishkina, E. L. Applications of integral transforms composition method to wave–type singular differential equations and index shift transmutations / E. L. Shishkina, A. Fitouhi, I. Jebabli and S. M. Sitnik // Electron. J. Differ. Equ. — 2018. — Vol. 2018, no. 130. — P. 1–27.

25. Shishkina, E. L. Generalized Euler—Poisson—Darboux equation and singular Klein—Gordon equation / E. L. Shishkina // J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — Vol. 973. — P. 1–21.

26. Shishkina, E. L. Solution of the singular Cauchy problem for a general inhomogeneous Euler–Poisson–Darboux equation / E. L. Shishkina // Carpathian Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 2. — P. 255–267.

27. Shishkina, E. L. Singular Cauchy problem for the general Euler–Poisson–Darboux equation / E. L. Shishkina // Open Mathematics. — 2018. — Vol. 16. — P. 23–31.

28. Shishkina, E. L. Properties of Mixed Hyperbolic B–Potential / E. L. Shishkina // Progress in Fractional Differentiation and Applications. — 2018. — Vol. 4, no. 2. — P. 83–98.

29. Shishkina, E. L. Singular Cauchy problem for generalized homogeneous Euler–Poisson–Darboux equation / E. L. Shishkina, M. Karabacak // Математические заметки СВФУ. — 2018. — Т. 25, No 2. — С. 85–96.

30. Shishkina, E. L. Method of Riesz potentials applied to solution to nonhomogeneous singular wave equation / E. L. Shishkina, S. Abbas // Математические заметки СВФУ. — 2018. — Т. 25, No 3. — С. 68–91.

## Метод композиционных интегральных преобразований для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя и его дробными степенями

**Шишкина Э. Л.**

В диссертации предложены методы решения дифференциальных уравнений в частных производных дробного и целого порядка с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя. Применением композиционного метода найдено решение дифференциального уравнения дробного порядка гиперболического типа с операторами Бесселя, действующими по каждой из переменных. Методом потенциалов Рисса и при помощи преобразований Ханкеля решены смешанные задачи для неоднородного и однородного общих уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу. Выполнено оригинальное исследование дробные интегралов и производных Бесселя и сконструирован метод решения дифференциальных уравнений с дробной производной Бесселя.

## Integral transforms composition method for singular differential equations with the Bessel operator and its fractional powers

**Shishkina E. L.**

The thesis proposed methods for solving differential equations in partial derivatives of fractional and integer order with a singular differential Bessel operator. Using the compositional method, a solution of a differential equation of fractional order of a hyperbolic type with Bessel operators acting by each of the variables was found. Using the Riesz potential method and the Hankel transforms solutions to mixed problems for inhomogeneous and homogeneous general Euler–Poisson–Darboux equations were obtained. An original study of fractional Bessel integrals and Bessel derivatives was done and a method for solving differential equations with the fractional Bessel derivative has been constructed.