МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Мартьянов Евгений Вячеславович

Факторизуемость G-пространств

Специальность 01.01.04 - «геометрия и топология»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2019

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии Механико–математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научные руководители: **Козлов Константин Леонидович**,
доктор физико–математических наук, доцент
Садовничий Юрий Викторович,
доктор физико–математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Чобан Митрофан Михайлович**,
доктор физико–математических наук, профессор,
Тираспольский государственный университет,
факультет математической физики и
информационных технологий, кафедра алгебры,
геометрии и топологии, заведующий кафедрой
Семёнов Павел Владимирович,
доктор физико–математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
институт «Высшая школа экономики» факультет
математики, профессор
Щепин Евгений Витальевич,
доктор физико–математических наук,
член-корреспондент РАН, Математический
институт им. В. А. Стеклова РАН,
ведущий научный сотрудник

Защита диссертации состоится 25 октября 2019 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08. E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС "Истина": https://istina.msu.ru/dissertations/235636638/

Автореферат разослан 25 сентября 2019 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ,
член-корреспондент РАН Шафаревич А.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

Настоящая работа посвящена исследованию факторизуемости G-пространств. Действенным методом исследования математических объектов является аппроксимация их более простыми, в каком-то смысле близкими к исходным, объектами. Существуют разные способы аппроксимации математических объектов. Факторизация является одним из таких способов и представляет собой разложение отображения в виде композиции двух других, отвечающих заданным условиям. Наиболее общо задачу факторизации для произвольного топологического пространства X можно сформулировать следующим образом: пусть задан класс пространств Ξ и класс непрерывных отображений F, тогда для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ из F существуют непрерывные отображения $g\colon X \to Z$ и $h\colon Z \to Y$ такие, что $f = h \circ g$, причём $Z \in \Xi$ (дополнительно можно накладывать требования на отображения g и h).

Одним из первых результатов в этом направлении (факторизация по весу и размерности) был получен С. Мардешичем: любое непрерывное отображение n-мерного компакта X в компакт Y, веса $\leq \tau$, можно профакторизовать через n-мерный компакт Z, веса $\leq \tau$. Б. А. Пасынковым доказана факторизационная теорема для отображений в метризуемые пространства. В первом случае F — класс отображений n-мерного компакта X в компакты веса $\leq \tau$, Ξ — класс n-мерных компактов веса $\leq \tau$. Во втором случае F — класс отображений n-мерного тихоновского пространства X в метризуемые пространства, веса $\leq \tau$, Ξ — класс n-мерных метризуемых пространств веса $\leq \tau$. Данные результаты позволили построить спектральные представления n-мерных пространств в виде n-мерных пространств более простой природы, распространить основные теоремы теории размерности на неметризуемые пространства, установить существование компактификаций и расширений пространств заданных веса и размерности, доказать существование универсальных пространств в классах компактных и метрических пространств.

Задача о зависимости функции, определённой на тихоновском произведении $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, от счётного числа координат является частным случаем факторизации. При определённых условиях непрерывная функция на несчётном тихоновском произведении может быть представлена в виде композиции проектирования на некоторую счётную грань произведения и функции на этой грани. Здесь F — класс непрерывных функций на произведении X, Ξ — пространства, являющиеся счетными подпроизведениями X. Данный результат лег в основу спектральной теории, построенной Е. В. Щепиным для компактов, и распространенной А. Ч. Чигогидзе на вещественно полные пространства.

Следующая теорема Л.С. Понтрягина[1] послужила началом изучения $\mathbb{R}$-факторизуемых топологических групп: если f — непрерывная вещественная функция на компактной топологической группе G, то существует такой замкнутый нормальный делитель N группы G, что факторгруппа G/N метризуема и функция f постоянна на каждом смежном классе. Здесь F — класс непрерывных функций на компактной группе G, Ξ — метризуемые компактные группы. Дополнительно, отображение $g\colon G \to G/N$ — открытый гомоморфизм. Е. В. Щепин установил, что любую непрерывную вещественнозначную функцию на слабо линделефовой топологической группе G можно профакторизовать через топологическую группу H счетного псевдохарактера, и отображение $g\colon G \to H$ — открытый гомоморфизм.

Понятие $\mathbb{R}$-факторизуемой топологической группы введено М. Г. Ткаченко[2]. Топологическая группа G называется $\mathbb{R}$-факторизуемой, если для любой непрерывной вещественнозначной функции f на G существуют: непрерывный гомоморфизм $\pi\colon G \to K$ на группу K со счетной базой и непрерывная функция h такие, что $f = h \circ \pi$. Если в определении $\mathbb{R}$-факторизуемой группы заменить класс непрерывных функций на непрерывные отображения в произвольные метрические пространства, то получим определение m-факторизуемой топологической группы, а если, кроме того, рассматривать в качестве класса Ξ класс метризуемых групп, то получим определение M-факторизуемой топологической группы. А. В. Архангельским сформулировано общее понятие топологической группы, факторизуемой относительно класса $\mathcal{P}$ топологических групп. $\mathbb{R}$-факторизуемые группы в точности те топологические группы, которые топологически изоморфны C-вложенным подгруппам произведений групп со счетной базой.

Аналогично случаю топологических групп, М. Санчесом и М. Г. Ткаченко[3] было введено понятие $\mathbb{R}_i$-факторизуемой паратопологической группы для $i \in \{1, 2, 3, 3.5\}$. Необходимость в различных индексах связана с тем, что классы T_0, T_2, регулярных и вполне регулярных паратопологических групп различны.

[1]Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G., Topological groups and related structures, Atlantis Press, Paris, 2008.

[2]Tkachenko M. G., Introduction to topological groups, Topol. Appl., 86 (3), 1998, 179–231.

[3]Sanchis M., Tkachenko M. G., $\mathbb{R}$ - factorizable paratopological groups, Topol. Appl., 157, N 14, 2010, 800–808.

Обобщением факторизуемости топологических групп является факторизуемость G-пространств, то есть топологических пространств, снабжённых непрерывным действием топологических групп. Структура G-пространства возникает естественным образом при решении различных задач математики. Например, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений для автономной системы $\dot{x}(t) = F(x(t))$ на многообразии M доказывается существование и единственность решения — дифференцируемого отображения $\pi_x\colon \mathbb{R} \to M$ такого, что $\pi_x(0) = x$, $\dot{\pi}_x(t) = F(\pi_x(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Во многих случаях решение π_x зависит непрерывно от начальных условий, то есть отображение $\pi\colon (t, x) \mapsto \pi_x(t)\colon \mathbb{R} \times M \to M$ непрерывно. Таким образом, многообразие M вместе с непрерывным действием π (аддитивной) группы $\mathbb{R}$ является G-пространством. Понятие G-пространства является основополагающим в теории динамических систем и эргодической теории. G-пространства эффективно используются при исследовании однородности топологических пространств[4].

Любой топологической группе G естественным образом соответствует G-пространство (G, G, α_G), где α_G — действие группы G на себе левыми сдвигами. Понятие $\mathbb{R}$-факторизуемого G-пространства, введенное К. Л. Козловым[5], стало естественным обобщением понятия $\mathbb{R}$-факторизуемости топологической группы. Оно позволило распространить результаты о пополнении $\mathbb{R}$-факторизуемых групп по Хьюитту и их спектральном представлении на аналогичные для фактор-пространств $\mathbb{R}$-факторизуемых групп.

Цели и задачи

Определить и исследовать различные типы факторизуемостей G-пространств. Исследовать сохранение факторизуемостей G-расширениями. Дать необходимые и достаточные условия для факторизуемостей G-пространств. Исследовать сохранение факторизуемостей в сторону эквивариантного образа.

Научная новизна

Автором диссертации впервые дана характеризация факторизуемостей G-пространств; установлена взаимосвязь между различными ти-

[4] Hart K. P., van Mill J., Simon P., Recent Progress in General Topology III, Atlantis Press and the authors, 2014.

[5] Kozlov K. L., $\mathbb{R}$ - factorizable G - spaces, Topol. Appl., 227 (3), 2017, 146–164.

пами факторизуемостей G-пространств. Также впервые дана характеризация $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych** при переходе к G-компактификации. Автором установлено при каких дополнительных условиях факторизуемости сохраняются эквивариантными отображениями.

Положения выносимые на защиту

- Вводятся понятия эквиравномерного факторпространства и G-факторпространства. Эквиравномерное фактопространство (G-факторпространство) обладает свойством универсальности. Даётся описание эквиравномерного факторпространства (G-факторпространства) в случаях открытого и d-открытого действий.

- Вводятся различные понятия факторизуемостей G-пространств и даются их характеризации. G-пространство с транзитивно действующей $\mathbb{R}$-факторизуемой группой, фазовое пространство которого обладает свойством Бэра, является $\mathbb{R}$-факторизуемым в категории **G-Tych**. G-пространство с ω-узкой действующей группой, фазовое пространство которого компактно, является $\mathbb{R}$-факторизуемым в категории **G-Tych**.

- Даются необходимые и достаточные условия сохранения $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych** при переходе к G-компактификации. В случае $\mathbb{R}$-факторизуемой действующей группы G-пространство $(G, \mu G, \alpha_\mu)$ $\mathbb{R}$-факторизуемо в категории **G-Tych**, где μG — пополнение группы G по Дьедонне.

- $\mathbb{R}$-факторизуемость G-пространств с d-открытым действием ω-узких P-групп сохраняется эквивариантными отображениями. $\mathbb{R}$-факторизуемость, m-факторизуемость и M-факторизуемость G-пространств сохраняются эквивариантными d-открыми отображениями.

Методология и методы исследования

В работе используется общекатегорные конструкции топологической алгебры и общей топологии. Активно применяются методы равномерной топологии.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты и методы настоящей работы могут найти применение в топологической алгебре и эквивариантной топологии.

Апробация работы и публикации автора

Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

- XXIII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2016» (г. Москва, МГУ, 11 - 15 апреля 2016);
- Международная научная конференция «Александровские чтения-2016» (г. Москва, МГУ, 23-25 мая 2016);
- XXIV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017» (г. Москва, МГУ, 10 - 14 апреля 2017);
- XXV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018» (г. Москва, МГУ, 9 - 13 апреля 2018);
- Международная научная конференция «Топологическая алгебра и теоретико-множественная топология», посвященная 80-летию профессора А. В. Архангельского (г. Москва, МГУ, Россия, 23-28 августа 2018);
- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019» (г. Москва, МГУ, 8 - 12 апреля 2019).

Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров: научно-исследовательский семинар им. П. С. Александрова под руководством профессора Ю. В. Садовничего, научно-исследовательский семинар «Некоторые конструкции и задачи общей топологии с приложениями в топологической алгебре и пространствам функций» под руководством профессора А. В. Архангельского.

Публикации автора

Основные результаты по теме диссертации изданы в 3 статьях [1], [2] и [3]. Статьи [1] — [3] опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности, и соответствуют пункту 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения, четырёх глав основной части и заключения. Текст диссертации изложен на 88 страницах. Список литературы содержит 31 наименование.

Основное содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней приводятся основные понятия и определения из теории равномерных пространств, топологической алгебры и эквивариантной топологии.

Во второй главе определяется категория **EUnif**, вводятся понятия эквиравномерного факторпространства и G-факторпространства, доказывается их универсальность.

Материал второй главы основан на результатах работы [2].

Определение 2.1.1 G-пространство $(G/N, (X/\mathfrak{A}_N, \overline{\mathfrak{A}_N}), \beta)$ называется *эквиравномерным факторпространством* G-пространства $(G, (X, \mathfrak{A}_X), \alpha)$, а эквивариантное отображение $(\pi, f)\colon (G, (X, \mathfrak{A}_X), \alpha) \to (G/N, (X/\mathfrak{A}_N, \overline{\mathfrak{A}_N}), \beta)$ — *эквивариантным факторотображением*, где f — равномерное факторотображение.

Определение 2.2.1 G-пространство $(G/N, X/\mathfrak{A}_N^{max}, \beta)$ называется G-*факторпространством* G-тихоновского пространства (G, X, α), а эквивариантное отображение $(\pi, f)\colon (G, X, \alpha) \to (G/N, X/\mathfrak{A}_N^{max}, \beta)$ — G-*факторотображением*, где f — равномерное факторотображение.

Перечислим основные результаты главы:

- **Предложение 2.1.1** Пусть (G, X, α) — G-пространство, $\pi\colon G \to$

G' — эпиморфизм, $N = \mathfrak{Ker}\pi$, $\mathfrak{A}$ — инвариантная псевдоравномерность на пространстве X такая, что $\mathfrak{A}_\pi \succcurlyeq \mathfrak{A}$.

Тогда $(G', (X/\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{A}}), \beta) \in \mathbf{EUnif}$, где $\overline{\mathfrak{A}}$ — факторная равномерность, $\beta(g', [x]) = [\alpha(g, y)]$, $g \in \pi^{-1}(g')$, $y \in [x]$, $(\pi, f)\colon (G, X, \alpha) \to (G', X/\mathfrak{A}, \beta)$ — эквивариантное отображение, $f\colon (X, \mathfrak{A}) \to (X/\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{A}})$ — равномерное факторотображение.

- **Следствие 2.1.1** Пусть $(G, (X, \mathfrak{A}_X), \alpha) \in \mathbf{EUnif}$, $\pi\colon G \to G'$ — эпиморфизм. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_X \bigwedge \mathfrak{A}_\pi$ — псевдоэквиравномерность относительно π на X, $(G', (X/\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{A}}), \beta) \in \mathbf{EUnif}$ и отображение $(\pi, f)\colon (G, (X, \mathfrak{A}_X \bigwedge \mathfrak{A}_\pi), \alpha) \to (G', (X/(\mathfrak{A}_X \bigwedge \mathfrak{A}_\pi), \overline{\mathfrak{A}_X \bigwedge \mathfrak{A}_\pi}), \beta)$ является эквивариантным.

- **Теорема 2.1.1** Для любого морфизма $(\kappa, h)\colon (G, (X, \mathfrak{A}_X), \alpha) \to (K, (Y, \mathfrak{A}_Y), \zeta)$ категории $\mathbf{EUnif}$ такого, что $N \subseteq \mathfrak{Ker}\kappa$ существует единственный морфизм $(\kappa', h')\colon (G/N, (X/\mathfrak{A}_N, \overline{\mathfrak{A}_N}), \beta) \to (K, (Y, \mathfrak{A}_Y), \zeta)$ категории $\mathbf{EUnif}$ и верно равенство $(\kappa, h) = (\kappa', h') \circ (\pi, f)$, где (π, f) — эквивариантное факторотображение.

- **Теорема 2.2.1** Для эквивариантного отображения $(\kappa, h)\colon (G, X, \alpha) \to (K, Y, \zeta)$ G-тихоновских пространств такого, что $N \subseteq \mathfrak{Ker}\kappa$ существует единственное эквивариантное отображение (κ', h') G-факторпространства $(G/N, X/\mathfrak{A}_N^{max}, \beta)$ в G-пространство (K, Y, ζ) и верно равенство $(\kappa, h) = (\kappa', h') \circ (\pi, f)$, где (π, f) — G-факторотображение.

- **Теорема 2.1.2** Пусть $(G, (X, \tilde{\mathfrak{A}}_G), \alpha) \in \mathbf{EUnif}$ с d-открытым действием и максимальной эквиравномерностью $\tilde{\mathfrak{A}}_G$, $\pi\colon G \to G'$ — эпиморфизм. Тогда $\{\gamma_{\pi^{-1}(O)} = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi^{-1}(O)x)) | x \in X\} | O \in N_{G'}(e)\}$ является базой псевдоэквиравномерности $\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi$ на X, максимальная эквиравномерность $\tilde{\mathfrak{A}}_{G'}$ на пространстве $X/(\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi)$ совпадает с факторравномерностью $\overline{\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi}$, действие β — d-открыто и $(G', (X/(\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi), \overline{\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi}), \beta) \in \mathbf{EUnif}$.

  Если $(G, (X, \mathfrak{A}_G), \alpha) \in \mathbf{EUnif}$ с открытым действием и максимальной эквиравномерностью $\mathfrak{A}_G$, то $\{\varkappa_{\pi^{-1}(O)} = \{\pi^{-1}(O)x | x \in X\} | O \in N_{G'}(e)\}$ является базой псевдоэквиравномерности $\mathfrak{A}_\pi$ на X, максимальная эквиравномерность $\mathfrak{A}_{G'}$ на пространстве $X/\mathfrak{A}_\pi$ совпадает с факторравномерностью $\overline{\mathfrak{A}_\pi}$, действие β — открыто и $(G', (X/\mathfrak{A}_\pi, \overline{\mathfrak{A}_\pi}), \beta) \in \mathbf{EUnif}$.

В частности, если π — открытый эпиморфизм с ядром N, то $(G', (X/\mathfrak{A}_\pi, \overline{\mathfrak{A}_\pi}), \beta)$ и $(G', (X/(\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi), \widetilde{\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi}), \beta)$ совпадают с соответствующими эквиравномерными факторпространствами.

- **Теорема 2.2.2** Пусть (G, X, α) с d-открытым действием и максимальной эквиравномерностью $\tilde{\mathfrak{A}}_G$, $\pi\colon G \to G'$ — эпиморфизм. Тогда множество $\{\gamma_{\pi^{-1}(O)} = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi^{-1}(O)x)) | x \in X\} | O \in N_{G'}(e)\}$ является базой псевдоэквиравномерности $\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi$ на X, действие β — d-открыто и $(G', X/(\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi), \beta)$ — G-тихоновское пространство.

  Если (G, X, α) с открытым действием и максимальной эквиравномерностью $\mathfrak{A}_G$, то $\{\varkappa_{\pi^{-1}(O)} = \{\pi^{-1}(O)x | x \in X\} | O \in N_{G'}(e)\}$ является базой псевдоэквиравномерности $\mathfrak{A}_\pi$ на X, действие β — открыто и $(G', X/\mathfrak{A}_\pi, \beta)$ — G-тихоновское пространство.

  В частности, если π — открытый эпиморфизм с ядром N, то $(G', X/\mathfrak{A}_\pi, \beta)$ и $(G', X/(\tilde{\mathfrak{A}}_G \bigwedge \mathfrak{A}_\pi), \beta)$ совпадают с соответствующими G-факторпространствами.

Понятие равномерного факторпространства было введено в работе[6]. Для случая G-пространств с фиксированной действующей группой оно было обобщено в работе[7]: пусть $\mathfrak{A}$ инвариантная и квазиограниченная псевдоравномерность на X относительно непрерывного действия $\alpha\colon G \times X \to X$, тогда существует $\tilde{\mathfrak{A}}$-инвариантное непрерывное действие $\tilde{\alpha}\colon G \times X/\mathfrak{A} \to X/\mathfrak{A}$ на факторпространстве $X/\mathfrak{A}$. Случай d-открытого действия факторгруппы на равномерном факторпространстве подробно рассмотрен в работах[8,9]. Так предложение 3 работы[9] утверждает, что факторотображение $h\colon X \to X/\mathfrak{A}$ является эквивариантным, если псевдоравномерность $\mathfrak{A}$ на пространстве X с действием группы G инвариантна. Теорема 2.14 работы[10] (см. также теорему 3.3 работы[8]) устанавливает факт существования G-факторпространства для случая d-открытого действия: пусть G-пространство (G, X, α) с (d)-открытым действием и N — ядро эпиморфизма $\pi\colon G \to G'$, тогда

[6] W. Kulpa, Factorization and inverse expansion theorems for uniformities, Colloq. Math., 21 (2), 1970, 217–227.

[7] M. G. Megrelishvili, Compactification and factorization in the category of G-spaces, Categorical Topology and its Relation to Analysis, Algebra and Combinatorics (J. Adamek, S. MacLane, eds.), World Scientifics, Singapore, 1989, 220-237.

[8] K. L. Kozlov, Spectral decompositions of spaces induced by spectral decompositions of acting groups, Topol. Appl., 160 (11), 2013, 1188–1205.

[9] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, Топологические группы преобразований и компакты Дугунджи, Мат. Сб., 201, № 1, 2010, 103–128

[10] K. L. Kozlov, $\mathbb{R}$ - factorizable G - spaces, Topol. Appl., 227 (3), 2017, 146–164.

G-пространство $(G', X/\mathfrak{A}, \beta)$ с (d)-открытым действием β является эквивариантным образом (G, X, α).

Понятие G-факторпространства естественным образом обобщает соответствующие понятия для топологических групп и равномерных пространств и является универсальным элементом для некоторого функтора. Предложение 2.1.1 является обобщением предложения 3 работы[9] и теоремы 2.14 работы[10]. Теорема 2.1.1 соответственно теорема 2.2.1 устанавливают универсальность эквивариантного факторпространства соответственно G-факторпространства. Теорема 2.2.2 показывает, что G-пространство с d-открытым действием факторгруппы на равномерном факторпространстве является частным случаем G-факторпространства.

В третьей главе даётся характеризация $\mathbb{R}$-факторизуемости G-пространств с d-открытым действием. Вводятся понятия m-факторизуемости, M-факторизуемости и $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych**, даются их характеризации. Устанавливается связь между различными типами факторизуемостей G-пространств.

Материал третьей главы основан на результатах работ [1] и [3].

Перечислим основные определения и результаты главы:

Определение 3.1.1[10]. G-пространство X называется $\mathbb{R}$-*факторизуемым*, если для любой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ существуют эквивариантное отображение $(\pi, h)\colon (G, X, \alpha) \to (K, Y, \beta)$ в сепарабельное метризуемое G-пространство (K, Y — сепарабельные метризуемые пространства) и непрерывная функция $g\colon Y \to \mathbb{R}$ такие, что $f = g \circ h$.

Определение 3.2.1 G-пространство (G, X, α) называется *m-факторизуемым* (*M-факторизуемым*), если для любого непрерывного отображения $f\colon X \to M$, где M — произвольное метрическое пространство, существуют эквивариантное отображение $(\pi, h)\colon (G, X, \alpha) \to (K, Y, \beta)$ в сепарабельное метризуемое (метризуемое) G-пространство (K, Y — сепарабельные метризуемые (метризуемые) пространства) и непрерывное отображение $k\colon Y \to M$ такие, что $f = k \circ h$.

Определение 3.3.1 G-пространство (G, X, α) называется *$\mathbb{R}$-факторизуемым в категории* **G-Tych**, если для любой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ существуют эквивариантное отображение $(\pi, h)\colon (G, X, \alpha) \to (K, Y, \beta)$, где (K, Y, β) — G-тихоновское сепарабельное метризуемое G-пространство (K, Y — сепарабельные метризуемые пространства), и непрерывная функция $k\colon Y \to \mathbb{R}$ такие, что $f = k \circ h$.

Определение 3.1.2 G-пространство (G, X, α) с d-открытым действием *обладает свойством ω-U*, если для любой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ существует счётное семейство $A_f \subseteq N_G(e)$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ найдется окрестность $U \in A_f$ для которой $f(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ux))) \subset O_\varepsilon(f(x))$.

Определение 3.2.2 G-пространство (G, X, α) с d-открытым действием *обладает сильным свойством ω-U*, если для любого непрерывного отображения $f\colon X \to M$, где M — произвольное метрическое пространство, существует счётное семейство $A_f \subseteq N_G(e)$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ найдется окрестность $U \in A_f$, для которой $f(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ux))) \subseteq O_\varepsilon(f(x))$.

- **Теорема 3.1.1** G-пространство (G, X, α) является $\mathbb{R}$-факторизуемым тогда и только тогда, когда существует эквивариантное отображение $(\pi, 1_X)\colon (G, X, \alpha) \to (K, X, \beta)$ в $\mathbb{R}$-факторизуемое G-пространство (K, X, β) с ω-узкой действующей группой K.

- **Теорема 3.1.2** G-пространство (G, X, α) с d-открытым действием ω-узкой группы является $\mathbb{R}$-факторизуемым тогда и только тогда, когда оно обладает свойством ω-U.

- **Теорема 3.2.2** G-пространство (G, X, α) с d-открытым действием ω-узкой (ω-уравновешенной) группы является m-факторизуемым (M-факторизуемым) тогда и только тогда, когда оно обладает сильным свойством ω-U.

- **Теорема 3.3.1** G-пространство (G, X, α) является $\mathbb{R}$-факторизуемым в категории **G-Tych** тогда и только тогда, когда существует эквивариантное отображение $(\pi, 1_X)\colon (G, X, \alpha) \to (K, X, \beta)$, где (K, X, β) — G-тихоновское пространство с ω-узкой действующей группой K, которое $\mathbb{R}$-факторизуемо в категории **G-Tych**.

- **Теорема 3.3.2** Пусть (G, X, α) — G-пространство с d-открытым действием. Следующие условия эквивалентны:

  (1) (G, X, α) — $\mathbb{R}$-факторизуемо;

  (2) (G, X, α) — $\mathbb{R}$-факторизуемо в категории **G-Tych**.

- **Предложение 3.3.1** Пусть (G, X, α) — $\mathbb{R}$-факторизуемое G-пространство с транзитивным действием, X — пространство со свойством Бэра. Тогда (G, X, α) — $\mathbb{R}$-факторизуемо в категории **G-Tych**.

- **Теорема 3.3.3** Для G-пространства (G, X, α) следующие условия эквивалентны:

  (1) (G, X, α) — $\mathbb{R}$-факторизуемо в категории **G-Tych**;

  (2) для любой непрерывной функции f на X существует инвариантная, вполне ограниченная псевдоравномерность $\mathfrak{A}$ счётного веса на пространстве X такая, что действие α ограничено ею и f непрерывна на $(X, \tau_{\mathfrak{A}})$;

  (3) для любой непрерывной функции f на X существует вполне ограниченная G-псевдометрика ρ такая, что f непрерывна на (X, τ_ρ).

Для топологических групп понятие свойства ω-U и сильного свойства ω-U было дано в работе[11]. Вышеприведённые определения обобщают указанные понятия для случая G-пространств. Теорема 4.9 работы[11] характеризует $\mathbb{R}$-факторизуемость топологических групп: топологическая группа $\mathbb{R}$-факторизуема тогда и только тогда, когда она ω-узкая и обладает свойством ω-U. Характеризация тихоновских $\mathbb{R}$-факторизуемых паратопологических групп дана в работе[12].

В работе[10] было введено понятие $\mathbb{R}$-факторизуемого G-пространства, естественным образом распространяющее $\mathbb{R}$-факторизуемость с топологических групп на G-пространства. Теорема 3.1.1 (теорема 3.3.1) устанавливает возможность замены действующей группы G на ω-узкую группу K. При этой замене сохраняются $\mathbb{R}$-факторизуемость ($\mathbb{R}$-факторизуемость в категории **G-Tych**) и такие свойства действий как транзитивность и d-открытость. Теорема 3.1.2 (теорема 3.2.2) является обобщением теоремы 4.9 работы[11] на случай G-пространств с d-открытым действием. Теорема 3.3.2 устанавливает эквивалентность $\mathbb{R}$-факторизуемости и $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych** для G-пространств с d-открыто действующими группами. Как следствие, предложение 3.3.1 даёт частичный ответ на вопрос о том, когда из $\mathbb{R}$-факторизуемости G-пространства следует его $\mathbb{R}$-факторизуемость в категории **G-Tych**. Теорема 3.3.3 характеризует $\mathbb{R}$-факторизуемость G-пространств в категории **G-Tych**.

---

[11] L. H. Xie, S. Lin, $\mathbb{R}$ - factorizability and uniform continuity in topological groups, Topol. Appl., 159, N 11-12, 2012, 2711–2720.

[12] L. H. Xie, S. Lin, M. G. Tkachenko, Factorization properties of paratopological groups, Topol. Appl., 160, N 14, 2013, 1902–1917.

В четвертой главе исследуется факторизуемость G-расширений и её сохранение в сторону эквивариантных образов.

Материал четвертой главы основан на результатах работ [1] и [3]. Основными результатами главы являются: теорема 4.1.1, предложение 4.1.3, следствие 4.1.2.

- **Предложение 4.1.2** Пусть H — всюду плотная C-вложенная подгруппа группы G и α — ограничение действия $\alpha_G\colon G\times G \to G$ на $H \times G$. Тогда из $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych** G-пространства (H, G, α) следует $\mathbb{R}$-факторизуемость группы H.

- **Следствие 4.1.2** Пусть G — PT-группа. Тогда G-пространство $(G, \mu G, \alpha_\mu)$ — $\mathbb{R}$-факторизуемо в категории **G-Tych** тогда и только тогда, когда G — $\mathbb{R}$-факторизуемая группа, где α_μ — ограничение на $G \times \mu G$ действия $\alpha_{\mu G}$.

- **Предложение 4.1.3** Всякое G-пространство с ω-узкой действующей группой и компактным фазовым пространством является $\mathbb{R}$-факторизуемым в категории **G-Tych**.

- **Теорема 4.1.1** Пусть G-пространство (G, X, α) — $\mathbb{R}$-факторизуемо в категории **G-Tych**. Тогда любое G-расширение $(G, \tilde{X}^{\mathfrak{A}_X}, \tilde{\alpha})$ по вполне ограниченной эквиравномерности $\mathfrak{A}_X$ является $\mathbb{R}$-факторизуемым в категории **G-Tych** тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\pi\colon G \to K$ на ω-узкую группу K и выполняется соотношение $\mathfrak{A}_\pi \succcurlyeq \mathfrak{A}_X$.

- **Следствие 4.1.5** Пусть X — компактное пространство. G-пространство (G, X, α) с открытым транзитивным действием некоторой группы G является $\mathbb{R}$-факторизуемым в том и только том случае, когда X — факторпространство ω-узкой группы.

- **Теорема 4.2.1** Пусть (π, f) — эквивариантное отображение G-пространства (G, X, α) на G-пространство (K, Y, β), где G и K — ω-узкие P-группы, α и β — d-открытые действия. Тогда если (G, X, α) — $\mathbb{R}$-факторизуемо, то и (K, Y, β) — $\mathbb{R}$-факторизуемо.

- **Теорема 4.2.2** Пусть (π, f) — эквивариантное отображение m-факторизуемого соответственно $\mathbb{R}$-факторизуемого (M-факторизуемого) G-пространства (G, X, α) на G-пространство (K, Y, β), причём π, f — d-открытые отображения, α — d-открытое действие, G — ω-узкая (ω-уравновешенная) группа. Тогда (K, Y, β)

— m-факторизуемое соответственно $\mathbb{R}$-факторизуемое (M-факторизуемое) G-пространство.

- **Следствие 4.2.1** Пусть (G, X, α) — G-пространство с d-открытым действием ω-узкой (ω-уравновешенной) группы. Тогда если G-пространство (G, X, α) — m-факторизуемо соответственно $\mathbb{R}$-факторизуемо (M-факторизуемо), то и G-факторпространство $(G/N, X/\mathfrak{A}_N^{max}, \alpha')$ — m-факторизуемо соответственно $\mathbb{R}$-факторизуемо (M-факторизуемо).

Предложение 4.1.2 устанавливает связь между $\mathbb{R}$-факторизуемостью в категории **G-Tych** G-пространства (H, G, α) и $\mathbb{R}$-факторизуемостью подгруппы H группы G. Как следствие, в случае $\mathbb{R}$-факторизуемой группы G, G-пространство $(G, \mu G, \alpha_\mu)$ является $\mathbb{R}$-факторизуемым в категории **G-Tych**, где μG — пополнения группы G по Дьедонне (следствие 4.1.2). Предложение 4.1.3 обобщает теорему Л.С. Понтрягина[1]: если f — непрерывная вещественная функция на компактной топологической группе G, то существует такой замкнутый нормальный делитель N группы G, что факторгруппа G/N метризуема и функция f постоянна на каждом смежном классе. Теорема 4.1.1 даёт необходимые и достаточные условия сохранения $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych** при переходе к G-компактификации. В доказательствах предложения 4.1.3 и теоремы 4.1.1 использовалась лемма 4.1.1, которая является обобщением факторизационной теоремы (для факторизации по весу равномерности) в случае G-пространств (см. теорему 2.5 работы[7]). Теорема 4.2.1 и теорема 4.2.2 дают частичный ответ на вопрос: сохраняется ли $\mathbb{R}$-факторизуемость G-пространства в сторону эквивариантного образа? Для топологических групп вопрос о сохранении $\mathbb{R}$-факторизуемости в сторону гомоморфного образа открыт. Следствие 4.2.1 обобщает теорему 8.4.2[1]: факторгруппа $\mathbb{R}$-факторизуемой группы $\mathbb{R}$-факторизуема.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям: профессору К.Л. Козлову и профессору Ю. В. Садовничему за постановку задачи, научные идеи, поддержку, постоянное внимание к работе и ценные советы. Автор глубоко благодарен профессору В. И. Пономарёву за преподавание основ общей топологии и плодотворные дискуссии. Автор благодарен всему коллективу кафедры общей топологии и геометрии за творческую атмосферу и научную поддержку в

процессе написания диссертации.

Заключение

В диссертации были рассмотрены различные факторизуемости G-пространств. Рассмотренные факторизуемости являются факторизациями непрерывных отображений на фазовых пространствах в пространства счётного веса и в метрические пространства. Основные результаты исследования:

- определено понятие G-факторпространства для G-тихоновского пространства, доказана его универсальность; дано явное описание G-факторпространств в случае (d)-открытого действия: указана база соответствующей псевдоравномерности на фазовом пространстве;
- определено понятие G-пространства, $\mathbb{R}$-факторизуемого в категории **G-Tych**, для случая d-открытого действия установлена эквивалентность $\mathbb{R}$-факторизуемости и $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych**; получены необходимые и достаточные условия для $\mathbb{R}$-факторизуемости G-пространства и его $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych**;
- даны необходимые и достаточные условия сохранения $\mathbb{R}$-факторизуемости в категории **G-Tych** при переходе к G-компактификациям;
- показано сохранение различных факторизуемостей G-пространств d-открытыми эквивариантными отображениями.

Дальнейшие исследования могут проводиться по следующим направлениям:

- исследование взаимосвязи между факторизуемостью G-пространства и его действующей группы;
- сохранение факторизуемостей эквивариантными отображениями;
- сохранение факторизуемостей произведениями, копроизведениями, при переходе к пределам прямого и обратного спектров;

- исследование различий в свойствах G-пространств и топологических групп, удовлетворяющих различным условиям факторизуемости.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

[1] Мартьянов Е. В., *Характеризация $\mathbb{R}$-факторизуемых G-пространств*, Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика., № 2, 2017, 7-12. Импакт-фактор: РИНЦ — 0,264; Scopus — 0,111.

[2] Мартьянов Е. В., *Эквиравномерные факторпространства*, Мат. Зам., 104 (6), 2018, 872-894. Импакт-фактор: РИНЦ — 0,795; Scopus — 0,380; Web of Science — 0,612.

[3] Мартьянов Е. В., *$\mathbb{R}$-факторизуемость G-пространств в категории* **G-Tych**, Изв. РАН. Сер. матем., **83**, № 2, 2019, 126-141. Импакт-фактор: РИНЦ — 0,727; Scopus — 0,660; Web of Science — 1,030.