Нацiональна академiя наук України Iнститут кiбернетики iменi В. М. Глушкова На правах рукопису Кнопова Вiкторiя Павлiвна УДК 519.21 Локальнi властивостi розподiлу та траєкторiй процесiв типу Левi 01.01.05 — теорiя ймовiрностей i математична статистика Дисертацiя на здобуття наукового ступеня доктора фiзико-математичних наук Науковий консультант Кулик Олексiй Михайлович, доктор фiзико-математичних наук Київ — 2016 2 ЗМIСТ Вступ 6 Роздiл 1. Огляд лiтератури за темою дисертацiї 27 1.1. Процеси Левi: загальнi факти та позначення . . . . . . . . . . . . . 27 1.2. Властивостi розподiлу процесу Левi: огляд лiтератури до Роздiлу 2 28 1.3. Асимптотична поведiнка функцiоналiв вiд процесу Левi: огляд лiтератури до Роздiлу 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33 1.4. Процеси типу Левi: огляд лiтератури до Роздiлу 4 . . . . . . . . . . 35 1.5. Застосування результатiв роздiлу 4: огляд лiтератури до Роздiлу 5 40 1.6. Властивостi траєкторiї процесiв типу Левi: огляд лiтератури до Роздiлу 6 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42 1.7. Функцiональнi простори, пов’язанi з дослiдженням процесiв типу Левi: огляд лiтератури до Роздiлу 7 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44 Роздiл 2. Умови iснування та властивостi щiльностi розподiлу процесу Левi 48 2.1. Умови iснування iмовiрнiсної щiльностi процесу Левi . . . . . . . . 49 2.1.1. Основнi результати . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49 2.1.2. Узагальнення . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56 2.2. Верхня оцiнка iмовiнiсної щiльностi процесу Левi при умовi iснування експоненцiйних моментiв . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61 2.3. Оцiнки iмовiрнiсної щiльностi процесу Левi у малому часi . . . . . 65 2.3.1. Загальний випадок: оцiнки ”типу згортки” . . . . . . . . . . 65 2.3.2. Оцiнки iмовiрнiсної щiльностi процесу Левi у випадку, коли вiдповiднi мiра Левi має суб-експоненцiйнi “хвости” . . . . . 75 2.4. Структура iмовiрнiсної щiльностi деяких нескiнченно подiльних розподiлiв та процесiв Левi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81 3 2.5. Швидкiсть збiжностi до нескiнченно подiльного розподiлу в локальнiй граничнiй теоремi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95 Висновки до роздiлу 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105 Роздiл 3. Асимптотична поведiнка функцiоналiв вiд процесу Левi 106 3.1. Вступ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106 3.2. Основний результат . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110 3.3. Частковi випадки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123 3.3.1. Випадок 𝑡 = 𝑐𝑜𝑛𝑠𝑡: загальний результат . . . . . . . . . . . . 123 3.3.2. Випадок самоопдiбного ядра . . . . . . . . . . . . . . . . . . 129 3.3.3. Застосування Теореми 3.3.1: гранична теорема для вiдношення щiльностей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132 3.3.4. Приклади . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135 3.4. Дробовий рух Левi, 0 < 𝐻 < 1/2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142 3.4.1. Iснування iнтегралу (3.4.1). . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143 3.4.2. Iснвання щiльностi розподiлу 𝑍 𝐻 𝑡 . . . . . . . . . . . . . . . . 146 3.4.3. Асимптотична поведiнка щiльностi розподiлу 𝑍 𝐻 у випадку 0 6 𝐻 < 1/2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 147 3.4.4. Доведення Теореми 3.4.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148 3.4.5. Приклади . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 157 Висновки до роздiлу 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160 Роздiл 4. Процеси типу Левi: побудова та локальнi властивостi розподiлу 161 4.1. Постановка задачi та схема доведення . . . . . . . . . . . . . . . . . 162 4.2. Основнi результати . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166 4.3. Доведення Теореми 4.2.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 172 4.3.1. Коректна визначенiсть 𝑝 0 𝑡 (𝑥, 𝑦) . . . . . . . . . . . . . . . . . 172 4.3.2. Оцiнювання функцiї Φ𝑡(𝑥, 𝑦) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 172 4.3.3. Оцiнювання згорток: загальнi твердження . . . . . . . . . . 189 4.3.4. Оцiнювання Φ ~𝑘 𝑡 (𝑥, 𝑦) та Ψ𝑡(𝑥, 𝑦) . . . . . . . . . . . . . . . . 193 4 4.3.5. Завершення доведення Теореми 4.2.1 . . . . . . . . . . . . . . 199 4.3.6. Завершення доведень Теорем 4.2.5 4.2.6, 4.2.7, та доведення Наслiдку 4.2.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 202 4.4. Неперервнiсть оператору 𝑇𝑡 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 203 4.5. Допомiжнi результати. Доведення Теореми 4.2.2 . . . . . . . . . . . 206 4.5.1. Властивостi оператору 𝑇𝑡,𝜀 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 208 4.5.2. Застосування принципу максимуму до наближеного фундаментального розв’язку. Доведення Теореми 4.2.2 . . . . . . . 213 4.6. Похiднi за часом. Доведення Теорем 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10 . . . . . . . . 216 4.7. Доведення Теорем 4.2.3 та 4.2.4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 221 Висновки до роздiлу 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 222 Роздiл 5. Процеси типу Левi: деякi застосування результатiв роздiлу 4 223 5.1. Клас Като мiр, пов’язаний зi щiльнiстю перехiдної iмовiрностi процесу типу Левi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223 5.2. Напiвгрупа Фейнмана-Каца, побудована за процесом типу Левi . . 233 5.2.1. Основнi результати . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 233 5.2.2. Доведення Теореми 5.2.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 237 5.2.3. Доведення Твердження 5.2.2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246 Висновки до роздiлу 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 247 Роздiл 6. Властивостi траєкторiї процесiв типу Левi 248 6.1. Закон повторного логарифму Чанга для процесiв типу Левi . . . . 249 6.2. Нижня оцiнка розмiрностi Хаусдорфа образу траєкторiй процесу типу Левi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 265 6.3. Розмiрностi Хаусдорфа множин рiвня та множин зiткнень . . . . . 266 6.3.1. Деякi результати з теорiї потенцiалу . . . . . . . . . . . . . . 269 6.3.2. Доведення Теореми 6.3.1 та Твердження 6.3.1 . . . . . . . . . 274 6.3.3. Доведення Теореми 6.3.2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 277 6.3.4. Приклад . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 284 5 Висновки до роздiлу 6 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 286 Роздiл 7. Деякi функцiональнi простори, пов’язанi з дослiдженням процесiв типу Левi 287 7.1. Простори узагальненої гладкостi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 287 7.2. Псевдо-диференцiальнi оператори на пiвпросторi . . . . . . . . . . . 294 7.3. Еквiвалентне зображення квазi-норми у просторi 𝐹 𝜎,𝑁 𝑝𝑞 . . . . . . . 299 7.4. Узагальнення теореми Макенхоупа-Уiдена . . . . . . . . . . . . . . 306 Висновки до роздiлу 7 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 311 ВИСНОВКИ 312 Список використаних джерел 315 Список публiкацiй автора 339 Додаток 343

ВИСНОВКИ У дисертацiйнiй роботi отримано наступнi результати. Роздiл 2: — Для певного класу процесiв Левi показано, що умова Хартмана-Вiнтнера є необхiдною та достатньою для iснування гладкої щiльностi перехiдної iмовiрностi. Доведено також узагальнення умови Хартмана-Вiнтнера. — Побудовано верхню оцiнку на щiльнiсть перехiдної iмовiрностi процесу Левi за умови iснування експонцiйних моментiв мiри Левi на нескiнченностi. — Побудовано оцiнки “типу згортки” на щiльностi перехiдної iмовiрностi процесу Левi у малому часi. — Наведено достатнi умови, за яких характеристична функцiя нескiнченноподiльного розподiлу є (з точнiстю до нормуючого множника) щiльнiстю iншого нескiнченно-подiльного розподiлу. — Побудовано оцiнку на швидкiсть збiжностi у локальнiй граничнiй теоремi до щiльностi нескiнченно-подiльного розподiлу. Роздiл 3: — За допомогою модифiкацiї методу сiдлової точки знайдено асимптотичну поведiнку на нескiнченностi щiльностi розподiлу процесу, що задається функцiоналом вiд процесу Левi. Розглянуто частковi випадки цього результату, коли процес є процесом Орнштейна-Уленбека з шумом Левi, та дробовим рухом Левi iз параметром Хурста 1/2 < 𝐻 < 1. Зокрема, а) Для дробового руху Левi знайдено необхiднi та достатнi умови iснування щiльностi розподiлу. б) При фiксованому параметрi часу, знайдено асимптотичну поведiнку на нескiнченностi щiльностi розподiлу дробового руху Левi. 313 Роздiл 4: — Запропоновано версiю методу параметриксу для побудови функцiї 𝑝𝑡(𝑥, 𝑦), що виявляється фундаментальним розв’язком задачi Кошi для оператора ∂𝑡 − 𝐴 , де 𝐴 є замиканням оператору (𝐿, 𝐶2 ∞(R𝑛 ) в 𝐶∞(R𝑛 ). Також, а) Доведено неперервнiсть функцiї 𝑝𝑡(𝑥, 𝑦) за (𝑡, 𝑥, 𝑦) ∈ (0,∞) × R𝑛 × R𝑛 . b) Доведено властивостi неперервнiсть оператору 𝑇𝑡 (ядром якого є 𝑝𝑡(𝑥, 𝑦)) в 𝐶∞(R𝑛 ), та сильну неперервнiсть 𝑇𝑡 в 0 в просторi 𝐶∞(R𝑛 ). c) Побудовано верхню та нижнi оцiнки на функцiю 𝑝𝑡(𝑥, 𝑦). d) Доведено, що функцiя 𝑝𝑡(𝑥, 𝑦) є диференцiйовною за 𝑡, неперервнiсть функцiї ∂𝑡𝑝𝑡(𝑥, 𝑦), та побудовано оцiнки на похiднi функцiї ∂𝑡𝑝𝑡(𝑥, 𝑦). Роздiл 5: — Наведено необхiдну та достатню умови того, що (знакозмiнна) мiра належить класу Като вiдносно щiльностi перехiдної iмовiрностi 𝑝𝑇(𝛾) (𝑥, 𝑦) процесу𝑋𝑇 (𝛾) 𝑡 , де 𝑇 (𝛾) є 𝛾 –сталим субординатором. — У випадку, коли 𝑝𝑡(𝑥, 𝑦) допускає компактну оцiнку зверху степеневого типу, знайдено необхiдну i достатню умову того, що (знакозмiнна) мiра належить класу Като вiдносно 𝑝𝑡(𝑥, 𝑦). — Для неперервного адитивного функцiоналу 𝐴𝑡 , що вiдповiдає мiрi, яка належить класу Като вiдносно 𝑝𝑡(𝑥, 𝑦), показано, що напiвгрупа ФейнманаКаца 𝑇 𝐴 𝑡 є коректно визначеною, її ядро є абсолютно неперервним вiдносно мiри Лебега. Побудовано верхнi та нижнi оцiнки на щiльнiсть 𝑝 𝐴 𝑡 (𝑥, 𝑦).