**Запатрин, Роман Романович.**

## Полугрупповая координатизация решеток : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.06. - Санкт-Петербург, 1999. - 44 с.

## Введение диссертации (часть автореферата)на тему «Полугрупповая координатизация решеток»

Восходящая к античной математике проблема координатизации была в явном виде сформулирована Г.Биркгофом для геометрических решеток как проблема представления их "замкнутыми" подмножествами некоторой алгебраической системы, например, подпространствами или "плоскикми подмножествами" векторного или аффинного пространства [1]. Для булевых алгебр исчерпывающее решение этой проблемы было найдено М.Стоуном, установившим взаимно однозначное соответствие между булевыми алгебрами и вполне несвязными компактными Тг-пространствами [2].

Помимо своего чисто алгебраического контекста, проблема координатизации возникает еще и в логике и в теоретической физике. В рамках логики булевы алгебры являются стандартными моделями для классических исчислений высказываний. Вопросы, возникающие в теории неклассических логик, потребовали развития алгебраических методов анализа их моделей. В 1936 году появилась статья Г.Биркгофа и Дж. Фон Неймана "О логике квантовой механики" [3], в которой был проведен анализ наблюдаемых свойств квантовомеханических систем. Они указали, что простейшая проверка дистрибутивности для алгебры свойств основывается на перестановочности и повторяемости физических наблюдений, что, в свою очередь, противоречит квантовой механике, математическая структура которой описывает свойства квантовых систем как замкнутые подпространства гильбертова пространства. Отправляясь от эвристических соображений об аналогии с решеткой всех замкнутых подпространств, они предположили "ослабленную булевость" решетки свойств физической системы. Это свойство было названо ортомодулярностью (см. ниже Определение 7).

Проблема координатизации ортомодулярных решеток была решена Д.Фулисом [4,5]. Он установил взаимно однозначное соответствие между ортомодулярными решетками и решетками замкнутых проекторов бэро-вских полугрупп (бэровская полугруппа — это мультипликативная полугруппа кольца с единицей, каждый левый аннулятор которого порожден идемпотентом, такие кольца также называются бэровскими [6,7]).

Недавние исследования в области квантовой гравитации привели к рассмотрению более общих решеток свойств, которые могут не обладать и свойством ортомодулярности [8,9,10]. Проблеме координатизации некоторых классов решеток и посвящена настоящая диссертация. Изложение структурировано следующим образом.

В Главе 1 вводятся основные определения и понятия.

В Главе 2, применяя методы, разработанные Фулисом в [4], коорди-натизируются атомарно порожденные полные орторешетки: для любой такой решетки L строится полугруппа S(L) такая, что L изоморфно решетке левых аннуляторов полугруппы S(L). Согласно Фулису [4], полугруппа S(L) была построена из эндоморфизмов решетки L, что делало такую конструкцию неэффективной.

В Главе 3 построено представление полугруппы S(L) открыто-замкнутыми бинарными отношениями на множестве атомов решетки L. При таком представлении композиция двух эндоморфизмов из S(L) переходит в замыкание обычного произведения отношений на множестве атомов решетки L, а частичный порядок на S(L) переходит в теоретико-множественное включение отношений.

В Главе 4 координатизируется более общий класс решеток — так называемые САС (complete atomistic coatomistic) решетки, т.е. полные решетки L такие, что каждый их элемент может быть представлен как сумма атомов, равно как и пересечение коатомов решетки Ь. В частности, все решетки, рассматриваемые в [8], попадают в класс САС. Используемые при этом вполне 0-простые рисовские полугруппы позволяют кооординатизировать и произвольные конечные решетки.

Результаты, представленные в Главах 2,3, опубликованны в [11], а результаты Главы 4 — в [12,13].

1 Основные понятия и определения

Для замкнутости изложения в этом разделе сведены основные понятия и определения, используемые в диссертации.

1.1 Частично упорядоченные множества и решетки.

Объектом исследования в настоящей работе являются различные классы решеток, для которых сформулированы теоремы представления. Одной из основных особенностей решеток является двоякое их толкование: их можно рассматривать с одной стороны, как множества с отношением ("релятив") либо как множество с заданными на нем операциями ("операционал"). Техническое содержание работы базируется на сочетании этих двух подходов.