Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Гриценко Валерий Алексеевич

**Приложения автоморфных форм
в алгебраической геометрии**

Резюме диссертации на соискание ученой степени
доктора математических наук

Москва - 2021

ВВЕДЕНИЕ

Термин «КЗ поверхность» был предложен А. Вейлем в 1957 г. в его известной программе по исследованию этих специальных поверхностей и их модулей. В течение многих лет последним открытым вопросом программы Вейля оставался вопрос о геометрическом типе пространств модулей поляризованных КЗ поверхностей. В статье [D4] эта проблема была решена через 50 лет после ее постановки. Это один из главных результатов диссертации, кратко изложенный в §5. (См. также доклад К. Вуазен на семинаре Бурбаки [Vo2] и наш большой обзор [GHS1] в первом томе монографии “Handbook of Moduli”.) В очень краткой форме результат можно сформулировать так:

Пространство модулей $\mathcal{F}_{2d}$ поляризованных КЗ поверхностей степени $2d$ имеет общий тип для всех $d > 61$.

Для доказательства этого утверждения был разработан достаточно общий и эффективный метод, который с успехом применяется для различных модулярных многообразий ортогонального типа. Доказательство общего типа модулярных многообразий использует алгебраическую геометрию, модулярные формы относительно неопределенной ортогональной группы $O(2, n)$, автоморфные произведения Борчердса, комбинаторику систем корней и арифметическую теорию квадратичных форм. *Это общий метод – основной результат диссертации.*

Необходимость изучения модулярных форм на ортогональных группах типа $O(2, n)$ была впервые отмечена А. Вейлем в конце 50-х годов прошлого века в его программе по изучению КЗ поверхностей: “*One interesting feature here is the occurrence, in a problem of moduli, of the automorphic functions belonging to the group of unites of a quadratic form of signature $(n, 2)$ (with $n = 19$ in the present case).*” (См. “Final report on research contract AF 18(603)-57”, [We, стр. 390–395].)

Ниже мы приводим результаты автора в теории автоморфных форм на ортогональных группах, которые позволили решить некоторые классические проблемы в теории модулей поляризованных абелевых поверхностей и соответствующих им поверхностей Куммера, поляризованных КЗ поверхностей и поляризованных гиперкэлеровых многообразий. Тексты статей [D1]–[D10], выносимых на защиту, собраны в Приложениях А–J данной диссертации. Их точное библиографическое описание дано ниже на странице 3. Кратко сформулируем основные результаты диссертации.

- 1) Доказана иррациональность (неотрицательность размерности Кодаиры) пространств модулей $(1, t)$ -поляризованных абелевых поверхностей (вопрос Зигеля) для всех t кроме двадцати исключительных поляризации.
- 2) Доказан общий тип пространств модулей поляризованных КЗ поверхностей степени $2d$ при $d > 61$. Это была последняя открытая проблема программы А. Вейля о КЗ поверхностях.
- 3) В середине 1980-х годов были открыты многомерные аналоги КЗ поверхностей – неприводимые голоморфные симплектические многообразия или гиперкэлеровые многообразия. В диссертации установлен общий тип пространств модулей поляризованных гиперкэлеровых многообразий типа $K3^{[2]}$ (размерность модулей равна 20) и пространств модулей поляризованных 10-мерных многообразий О’Грэди (размерность модулей равна 21).
- 4) Доказана иррациональность пространств модулей поверхностей Куммера, построенных по поляризованным абелевым поверхностям. Этот вопрос был открыт с 1996 года.

Ключевыми для решения этих алгебро-геометрических проблем являются результаты автора в области модулярных форм относительно ортогональных групп. Перечислим основные автоморфные результаты.

5) Предложен метод подъема форм Якоби до модулярных форм на парамодулярных группах Зигеля рода 2 и на ортогональных группах сигнатуры $(2, n)$. Эта конструкция позволяет строить канонические дифференциальные формы на модулярных многообразиях.

6) Доказаны два автоморфных критерия: “*Low weight cusp form trick*” для доказательства общего типа и *автоморфный критерий унитарности* модулярных многообразий. Оба критерия технически связаны с рефлексивными модулярными формами.

7) Найдено новое представление автоморфных произведений Борчердса в терминах форм Якоби в одномерных каспах ортогональной модулярной группы. Этот подход позволяет строить автоморфные формы для двух автоморфных критериев, отмеченных выше. Это основная трансцендентная часть доказательства алгебро-геометрических результатов пунктов 1) – 4). Кроме того, данный подход позволяет находить обобщенную матрицу Картана и кратность всех положительных корней лоренцевых алгебр Каца–Муди.

8) Автоморфные произведения в терминах форм Якоби от одной переменной имеют интерпретацию в физике как вторичное квантование эллиптического рода многообразий Калаби–Яу. Мы изучили автоморфные свойства эллиптического рода и его вторичного квантования.

Список публикаций, выносимых на защиту

[D1] V. Gritsenko, *Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces* (Иррациональность пространства модулей поляризованных абелевых поверхностей).

International Mathematics Research Notices **6** (1994), 235–243.

[D2] В. А. Гриценко, *Рефлексивные модулярные формы и их приложения. Успехи Математических Наук* **73:5** (2018), 53–122; *Reflective modular forms and applications*.

Russian Mathematical Surveys **73:5** (2018), 797–864.

[D3] V. Gritsenko, V.V. Nikulin, *Lorentzian Kac-Moody algebras with Weyl groups of 2-reflections* (Лоренцевы алгебры Каца–Муди с группой Вейля 2-отражений).

Proceedings of the London Mathematical Society **116:3** (2018), 485–533.

[D4] V. Gritsenko, K. Hulek, G. Sankaran, *The Kodaira dimension of the moduli of K3 surfaces* (Размерность Кодaira модулей K3 поверхностей).

Inventiones Mathematicae **169** (2007), 519–567.

[D5] V. Gritsenko, K. Hulek, G. Sankaran, *Moduli spaces of irreducible symplectic manifolds* (Пространства модулей неприводимых симплектических многообразий).

Compositio Mathematica **146** (2010), 404–434.

[D6] V. Gritsenko, K. Hulek, G. Sankaran, *Moduli spaces of polarised symplectic O’Grady varieties and Borcherds products* (Пространства модулей поляризованных симплектических многообразий О’Грэди и произведения Борчердса).

Journal of Differential Geometry **88** (2011), 61–85.

[D7] V. Gritsenko, K. Hulek, *Uniruledness of orthogonal modular varieties* (Унилинейчатость ортогональных модулярных многообразий).

Journal of Algebraic Geometry **23** (2014), 711–725.

[D8] V. Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi–Yau manifolds and Jacobi and Siegel modular forms* (Эллиптический род многообразий Калаби-Яу и модулярные формы Якоби и Зигеля).

Алгебра и Анализ **11**:5 (1999), 100–125; St. Petersburg Mathematical Journal **11**:5 (2000), 781–804 (with Appendix of F. Hirzebruch, *On the Euler characteristic of manifolds with $c_1 = 0$. A letter to V. Gritsenko.* 805–807).

[D9] V. Gritsenko, C. Poor, D. S. Yuen, *Antisymmetric Paramodular Forms of Weights 2 and 3* (Антисимметричные парамодулярные формы веса 2 и 3).

International Mathematics Research Notices, Issue **20** (2020), 6926–6946.

[D10] В. А. Гриценко, Х. Ванг, *Антисимметричные парамодулярные формы веса 3*.

Математический Сборник **210**:12 (2019), 43–64; *Antisymmetric paramodular forms of weight 3*. Sbornik: Mathematics, **210**:12 (2019), 1702–1723.

1 Модулярные многообразия и модулярные формы

Прежде всего мы определим важный для алгебраической геометрии класс многообразий – модулярные многообразия ортогонального типа. Пусть L – целочисленная решетка, а именно, свободный $\mathbb{Z}$ -модуль конечного ранга с четной целочисленной симметричной билинейной формой $(\cdot, \cdot) : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ сигнатуры $(2, n)$ над $\mathbb{R}$. Определим ассоциированную с L классическую эрмитову однородную n -мерную область

$$\mathcal{D}(L) = \{[Z] \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) \mid (Z, Z) = 0, (Z, \bar{Z}) > 0\}^+,$$

где $+$ означает одну из двух компонент связности.

Обозначим через $O^+(L)$ подгруппу индекса 2 целочисленной ортогональной группы $O(L)$, сохраняющую $\mathcal{D}(L)$. Пусть Γ – подгруппа конечного индекса в $O^+(L)$. Любая такая группа действует на $\mathcal{D}(L)$ как дискретная группа автоморфизмов. Определим факторпространство

$$\mathcal{M}_L(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{D}(L),$$

которое называется **ортогональным модулярным многообразием**.

Для геометрических приложений самыми важными арифметическими группами являются *стабильная ортогональная группа* и ее специальная подгруппа

$$\tilde{O}^+(L) = \{g \in O^+(L) \mid g|_{L^\vee/L} = \text{id}\}, \quad \tilde{SO}^+(L) = SO(L) \cap \tilde{O}^+(L), \quad (1)$$

где $L^\vee$ – двойственная решетка и $L^\vee/L$ конечная дискриминантная группа порядка $|\det(L)|$.

Многие классические пространства модулей являются ортогональными модулярными многообразиями. Ниже приведены некоторые важные примеры таких многообразий, которые были исследованы в диссертации.

Пространства модулей.

- (1) Пространство $\mathcal{A}_t$ модулей $(1, t)$ -поляризованных абелевых поверхностей и пространство $\mathcal{K}_t$ куммеровых поверхностей, построенных по $(1, t)$ -поляризованным абелевым поверхностям. Это следующие зигелевы модулярные 3-фолды

$$L_t = U \oplus U \oplus \langle -2t \rangle, \quad \text{sign}(L_t) = (2, 3), \quad (2)$$

$$\mathcal{A}_t = \widetilde{\text{SO}}^+(L_t) \setminus \mathcal{D}(L_t), \quad \mathcal{K}_t = \text{O}^+(L_t) \setminus \mathcal{D}(L_t), \quad \dim \mathcal{A}_t = \dim \mathcal{K}_t = 3, \quad (3)$$

где $U \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – гиперболическая плоскость, $\langle -2t \rangle$ – решетка ранга 1 с матрицей Грамма $(-2t)$.

- (2) Пространство $\mathcal{M}_{2d}$ модулей поляризованных КЗ поверхностей степени $2d$

$$L_{2d} = 2U \oplus 2E_8(-1) \oplus \langle -2d \rangle, \quad \text{sign}(L_t) = (2, 19), \quad (4)$$

$$\mathcal{M}_{2d} = \widetilde{\text{O}}^+(L_{2d}) \setminus \mathcal{D}(L_{2d}), \quad (5)$$

где $2E_8(-1)$ две ортогональные копии отрицательно определенной решетки $E_8(-1)$.

- (3) Пространство модулей поляризованных неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа КЗ^[2] с расщепимой поляризацией степени Богомолова–Бовиля $2d$ (см. [D5], [GHS1])

$$L_{2,2d} = 2U \oplus 2E_8(-1) \oplus \langle -2 \rangle \oplus \langle -2d \rangle, \quad \text{sign}(L_{2,2d}) = (2, 20), \quad (6)$$

$$\mathcal{M}_{\text{КЗ}^{[2]}, 2d}^{\text{split}} = \widetilde{\text{O}}^+(L_{2,2d}) \setminus \mathcal{D}(L_{2,2d}). \quad (7)$$

- (4) Пространство модулей поляризованных 10-мерных многообразий О’Грэди с расщепимой поляризацией степени Богомолова–Бовиля $2d$ (см. [D6], [GHS1])

$$L_{A_2, 2d} = 2U \oplus 2E_8(-1) \oplus \langle A_2(-1) \rangle \oplus \langle -2d \rangle, \quad \text{sign}(L_{A_2, 2d}) = (2, 21), \quad (8)$$

$$\mathcal{M}_{O'G_{10}, 2d}^{\text{split}} = \widetilde{\text{O}}^+(L_{A_2, 2d}) \setminus \mathcal{D}(L_{2, 2d}). \quad (9)$$

По построению, ортогональное модулярное многообразие является комплексным аналитическим пространством. Его компактификация типа Сатаке, а именно, компактификация Бейли–Бореля, была построена в [BB]. Граница компактификации Бейли–Бореля распадается в дизъюнктное объединение компонент $F_{\mathcal{P}}$, являющихся в свою очередь симметрическими пространствами, соответствующими рациональным параболическим подгруппам ортогональной группы сигнатуры $(2, n)$, которые являются стабилизаторами изотропных пространств в $L \otimes \mathbb{Q}$. Имеет место следующий результат (см. [BB]): *компактификация Бейли–Бореля $\mathcal{M}_L(\Gamma)^*$ является неприводимым нормальным проективным многообразием над $\mathbb{C}$ и распадется в объединение непересекающихся компонент*

$$\mathcal{M}_L(\Gamma)^* = \mathcal{M}_L(\Gamma) \amalg \prod_{\mathcal{P}} X_{\mathcal{P}} \amalg \prod_{\ell} Q_{\ell}, \quad (10)$$

где ℓ и $\mathcal{P}$ пробегают конечное число представителей Γ -орбит рациональных изотропных прямых и плоскостей в $L \otimes \mathbb{Q}$. Компонента $\mathcal{M}_L(\Gamma) = \Gamma \setminus \mathcal{D}(L)$ является открытым по Зарискому множеством, каждая компонента $X_{\mathcal{P}}$ является модулярной кривой, а каждая Q_{ℓ} – точкой. Q_{ℓ} содержится в замыкании $X_{\mathcal{P}}$ тогда и только тогда, когда ℓ

может быть выбрана так, что $\ell \subset \mathcal{P}$. Компоненты $X_{\mathcal{P}}$ и Q_{ℓ} обычно называются 1- и 0-мерными компонентами границы модулярного многообразия или его одномерными и нульмерными каспами.

Теория модулярных форм является одним из главных инструментов для изучения геометрии модулярных многообразий ортогонального типа. Например, компактификация Бейли–Бореля $\mathcal{M}_L(\Gamma)^*$ может быть определена как $\text{Proj}(\bigoplus_k M_k(\Gamma))$, где $M_k(\Gamma)$ обозначает конечномерное пространство модулярных форм веса k с тривиальным характером. Дадим определение модулярных форм.

Определение 1.1. Рассмотрим решетку L сигнатуры $(2, n)$ с $n \geq 3$ и аффинный конус $\mathcal{D}(L)^{\bullet} = \{y \in L \otimes \mathbb{C} \mid x = \mathbb{C}^* y \in \mathcal{D}(L)\}$ над $\mathcal{D}(L)$. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ и $\chi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ – характер подгруппы $\Gamma < O^+(L)$ конечного индекса. Голomorphicная функция $F: \mathcal{D}(L)^{\bullet} \rightarrow \mathbb{C}$ называется **модулярной формой веса k и характера χ относительно группы Γ** , если

$$F(tZ) = t^{-k}F(Z), \quad \forall t \in \mathbb{C}^* \quad \text{и} \quad F(gZ) = \chi(g)F(Z), \quad \forall g \in \Gamma.$$

Модулярная форма называется **параболической**, если она обращается в ноль во всех каспах группы Γ , то есть на всех граничных компонентах компактификации Бейли–Бореля модулярного многообразия $\Gamma \backslash \mathcal{D}(L)$.

Через $M_k(\Gamma, \chi)$ (соответственно, $S_k(\Gamma, \chi)$) обозначаем линейное пространство всех модулярных (соответственно, параболических) форм веса k и характера χ . Эти пространства конечномерны.

Дифференциальные формы на $\mathcal{M}_L(\Gamma)$ могут быть интерпретированы как модулярные формы относительно группы Γ . Выберем комплексную форму объема dZ на $\mathcal{D}(L)$. Тогда, если F – модулярная форма веса kn и характера $\det^k$ для группы Γ , то $F(dZ)^k$ является Γ -инвариантным сечением плуриканонического расслоения $\Omega(\mathcal{D}(L))^{\otimes k}$. Следовательно арифметическая информация о модулярных формах может быть использована для получения геометрической информации об ортогональном многообразии $\mathcal{M}_L(\Gamma)$.

Вес $k = n$ называется *каноническим* в силу следующей *Леммы Фрейтага* (см. [Fr, Предложение 2.1 Главы 3]) $S_n(\Gamma, \det) \cong H^0(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma), \Omega(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma)))$, где $\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma)$ – любая гладкая компактификация модулярного многообразия $\mathcal{M}_L(\Gamma)$ и $\Omega(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma))$ – пучок канонических дифференциальных форм. Следовательно, имеется следующая важная формула для геометрического рода ортогонального модулярного многообразия в терминах размерности пространства параболических форм канонического веса n :

$$p_g(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma)) = h^{n,0}(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma)) = \dim S_n(\Gamma, \det). \quad (11)$$

Главная проблема: *Как построить хотя бы одну параболическую форму канонического веса для модулярных групп из теории модулей алгебраических многообразий?*

Для многообразия $\mathcal{A}_t$ данная проблема была решена автором в [D1], а для многообразия $\mathcal{K}_p$ первые нетривиальные результаты получены в [D9]–[D10].

2 Арифметический подъем форм Якоби и пространства модулей абелевых поверхностей (проблема Зигеля)

В этой диссертации мы рассматриваем решетки, содержащие две гиперболические плоскости U ,

$$L = U \oplus L_1 = U \oplus (U_1 \oplus L_0(-1)), \quad U \cong U_1 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где L_0 – четная целочисленная положительно определенная решетка ранга $n_0 > 0$, L_1 имеет сигнатуру $(1, n_0 + 1)$, а L – сигнатуру $(2, n_0 + 2)$. ($L(m)$ обозначает решетку L с квадратичной формой умноженной на m .) Первое разбиение решетки L в (12) дает цилиндрическую модель (так называемая *труба будущего*) одномерной области:

$$\mathcal{D}(L) \cong \mathcal{H}(L_1) = \{Z \in L_1 \otimes \mathbb{C} \mid (\operatorname{Im} Z, \operatorname{Im} Z)_{L_1} > 0\}^+.$$

Второе разбиение решетки L в (12) дает более детальное представление области $\mathcal{D}(L)$ в одномерном каспе, отвечающем изотропной плоскости в L

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(L_1) \cong \mathcal{H}(L_0) = \{Z = \omega e_1 + \mathfrak{z} + \tau f_1 \in L_1 \otimes \mathbb{C} \mid \\ \tau, \omega \in \mathbb{H}_1, \mathfrak{z} \in L_0 \otimes \mathbb{C}, 2 \operatorname{Im} \tau \cdot \operatorname{Im} \omega - (\operatorname{Im} \mathfrak{z}, \operatorname{Im} \mathfrak{z})_{L_0} > 0\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Любая модулярная форма $F \in M_k(\widetilde{\mathrm{SO}}^+(L))$ периодична, т.е. $F(Z + l) = F(Z)$ для любого $l \in L_1$. Тем самым определено разложение Фурье по переменной $Z \in \mathcal{H}(L_1)$ в нульмерном каспе

$$F(Z) = \sum_{l \in L_1^\vee, (l, l) \geq 0} f(l) \exp(2\pi i (l, Z)). \quad (14)$$

Условие на гиперболическую норму индексов ненулевых коэффициентов Фурье $(l, l)_{L_1} \geq 0$ следует из голоморфности модулярной формы. (См. описание разложения Фурье в произвольном каспе в [GN2, §2.3] и [GHS1, §8.2–8.3].) Разложение Фурье–Якоби есть разложение в одномерном каспе. Точнее это разложение Фурье по переменной ω из (13)

$$F(\tau, \mathfrak{z}, \omega) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(\tau, \mathfrak{z}) \exp(2\pi i m \omega). \quad (15)$$

Коэффициенты $\varphi_m(\tau, \mathfrak{z})$ называются *коэффициентами Фурье–Якоби* в 1-мерном каспе.

Мы определяем формы Якоби веса k и индекса t относительно решетки L_0 как автоморфные формы типа $\varphi(\tau, \mathfrak{z}) \exp(2\pi i m \omega)$ относительно параболической подгруппы, сохраняющей данный одномерный касп. Это можно выразить при помощи функциональных уравнений двух типов, приведенных ниже.

Определение 2.1. (См. [D2, Определение 2.2], [G2] и [CG2].) *Голоморфная функция $\varphi : \mathbb{H} \times (L_0 \otimes \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ называется слабо голоморфной формой Якоби веса $k \in \mathbb{Z}$, индекса $t \in \mathbb{N}$ относительно решетки L_0 , если она удовлетворяет функциональным уравнениям*

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{\mathfrak{z}}{c\tau + d}\right) &= (c\tau + d)^k e^{i\pi t \frac{c(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})}{c\tau + d}} \varphi(\tau, \mathfrak{z}), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \varphi(\tau, \mathfrak{z} + x\tau + y) &= e^{-i\pi t((x, x)\tau + 2(x, \mathfrak{z}))} \varphi(\tau, \mathfrak{z}), \quad \forall x, y \in L_0, \end{aligned}$$

и обладает разложением Фурье типа

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{n \geq c_0} \sum_{\ell \in L_0^\vee} f(n, \ell) q^n \zeta^\ell, \quad (16)$$

где $c_0 \in \mathbb{Z}$, $q = e^{2\pi i \tau}$ и $\zeta^\ell = e^{2\pi i(\ell, \mathfrak{z})}$. Если φ удовлетворяет условию

$$f(n, \ell) \neq 0 \implies 2n - (\ell, \ell) \geq 0,$$

тогда φ называется **голоморфной формой Якоби**. Если φ удовлетворяет более сильному условию ($f(n, \ell) \neq 0 \implies 2n - (\ell, \ell) > 0$) тогда φ называется **параболической**. Обозначим через $J_{k, L_0, t}^!$ (соответственно $J_{k, L_0, t}$, и $J_{k, L_0, t}^{cusp}$) векторное пространство слабо голоморфных (соответственно, голоморфных или параболических) форм Якоби веса k и индекса t относительно решетки L .

Теорема 2.2. (См. [D2, Теорема 3.1] и [G2].) *Подъём голоморфной формы Якоби $\varphi_k(\tau, \mathfrak{z}) \in J_{k, 1}(L_0)$ (с $f(0, 0) = 0$ в (16)) веса k определяется действием формальной операторной L -функцией Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$, задаваемой суммой*

$$\begin{aligned} \text{Lift}(\varphi_k)(\tau, \mathfrak{z}, \omega) &= \sum_{m \geq 1} m^{k-1} (\varphi_k(\tau, \mathfrak{z}) e^{2\pi i m \omega}) |_k T_-(m) \\ &= \sum_{m \geq 1} m^{-1} \sum_{\substack{ad=m \\ b \pmod d}} a^k \varphi_k\left(\frac{a\tau + b}{d}, a\mathfrak{z}\right) e^{2\pi i m \omega}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подъём имеет следующее разложение Фурье

$$\text{Lift}(\varphi_k)(Z) = \sum_{\substack{n, m > 0, \ell \in L_0^\vee \\ 2nm - (\ell, \ell) \geq 0}} \sum_{d | (n, \ell, m)} d^{k-1} f\left(\frac{nm}{d^2}, \frac{\ell}{d}\right) e(n\tau + (\ell, \mathfrak{z}) + m\omega),$$

где $d | (n, \ell, m)$ обозначает положительный общий делитель n , m и вектора $\ell \in L_0$. Подъём есть модулярная форма веса k относительно стабильной ортогональной группы $\widetilde{SO}^+(L)$ (см. (1))

$$\text{Lift}(\varphi_k) \in M_k(\widetilde{SO}^+(L)).$$

$\text{Lift}(\varphi_k)$ – параболическая форма, если φ_k параболическая форма Якоби.

Модулярные формы Якоби веса k и индекса 1, отвечающие решетке $\langle 2t \rangle$, есть обычные модулярные формы Якоби веса k и индекса t в смысле Эйхлера–Загира. Для любой параболической формы Якоби веса 3 и индекса t конструкция подъема дает ненулевую параболическую форму веса 3 относительно парамодулярной группы Γ_t . В силу критерия Фрайтага мы получаем ненулевую каноническую дифференциальную форму на любой гладкой компактификации модулярного многообразия $\mathcal{A}_t$. Это дает следующую теорему.

Теорема 2.3. (См. [D1, Теорема 1.1].) *Пространство модулей $(1, t)$ -поляризованных абелевых поверхностей $\mathcal{A}_t$ (см. (2)–(3)) имеет положительный геометрический род для всех t кроме двадцати исключительных поляризацій $t = 1, 2, \dots, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36$. В частности, $H^3(\Gamma_t, \mathbb{C})$ не является тривиальной для всех неисключительных поляризацій.*

Рациональность или унирациональность соответствующего пространства модулей известна только для исключительных $t \leq 20$ (см. [GP]).

3 Рефлективные автоморфные формы: два автоморфных критерия в геометрии модулярных многообразий

Пусть Y – связное гладкое проективное многообразие размерности n . Размерность Кодалеры $\kappa(Y)$ определяется как степень трансцендентности кольца плюриканонических

дифференциальных форм

$$\kappa(Y) = \text{Tr.deg} \left(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(Y, \Omega(Y)^{\otimes m}) \right) - 1,$$

или $-\infty$, если $H^0(Y, \Omega(Y)^{\otimes m}) = 0$ для всех $m > 0$. Этот инвариант дает асимптотическую размерность $h^0(Y, \Omega(Y)^{\otimes m}) \sim m^{\kappa(Y)}$ для достаточно больших m . Известно, что $\kappa(Y) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, n = \dim Y\}$. Говорят, что **многообразие Y имеет общий тип**, если $\kappa(Y) = \dim Y$. Размерность Кодаиры является бимероморфным инвариантом, поэтому для любого неприводимого квазипроективного многообразия полагаем $\kappa(X) = \kappa(\tilde{X})$, где $\tilde{X}$ какая-то гладкая модель многообразия X .

Дивизор ветвления модулярной проекции $\pi_\Gamma : \mathcal{D}(L) \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}(L)$ является одним основным препятствием для продолжения плуриканонических дифференциальных форм с открытой подобластью $\mathcal{F}_L(\Gamma)^\circ$ на гладкую компактификацию этого квазипроективного многообразия.

Теорема 3.1. (См. [D4, Следствие 2.13].) *Дивизор ветвления $R.\text{div}(\pi_\Gamma)$ модулярной проекции $\pi_\Gamma : \mathcal{D}(L) \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}(L)$ индуцируется всеми элементами $g \in \Gamma$ такими, что g или $-g$ является отражением относительно вектора решетки L*

$$R.\text{div}(\pi_\Gamma) = \bigcup_{\substack{r \in L/\pm 1 \\ r \text{ примитивный} \\ \sigma_r \in \Gamma \text{ или } -\sigma_r \in \Gamma}} \mathcal{D}_r(L). \quad (18)$$

Определение 3.2. *Модулярная форма $F \in M_k(\Gamma, \chi)$ называется **рефлективной**, если*

$$\text{supp}(\text{div } F) \subset R.\text{div}(\pi_\Gamma),$$

где $R.\text{div}(\pi_\Gamma)$ дивизор ветвления модулярной проекции из Теоремы 3.1. F называется **строго рефлективной**, если кратность всех неприводимых компонент $\text{div } F$ равна 1.

Модулярные формы с маленьким или большим дивизором. Согласно определению, данному выше, модулярная форма $F \in M_k(\Gamma, \chi)$ является строго рефлективной тогда и только тогда, когда $\text{div } F \leq R.\text{div}(\pi_\Gamma)$, т.е. дивизор строго рефлективной формы *маленький*. Будем говорить, что дивизор модулярной формы $F \in M_k(\Gamma, \chi)$ *большой*, если $\text{div } F \geq R.\text{div}(\pi_\Gamma)$.

Модулярные формы канонического веса. Малые и большие веса. Пусть $\text{sign}(L) = (2, n)$. Дивизор произвольной модулярной формы канонического веса $F \in M_n(\Gamma, \det)$ всегда содержит дивизор ветвления $R.\text{div}(\pi_\Gamma)$. Канонический вес является пограничным в геометрических приложениях. Мы говорим, что *вес k модулярной формы $F \in M_k(\Gamma, \chi)$ малый*, если $k < n$, и *большой*, если $k > n$. Ниже приводим **первый автоморфный критерий**.

Теорема 3.3. (Low weight cusp form trick, см. [D4, Теорема 1.1].) *Пусть $\text{sign}(L) = (2, n)$ и $n \geq 9$. Модулярное многообразие $\mathcal{M}_L(\Gamma)$ имеет общий тип, если существует параболическая форма $F \in S_k(\Gamma, \det^\varepsilon)$ ($\varepsilon = 0, 1$) малого веса $k < n$ с большим дивизором, т.е. такая, что $\text{div } F \geq R.\text{div}(\pi_\Gamma)$.*

Второй критерий в некотором смысле противоположен первому. Мы докажем, что размерность Кодаиры модулярного многообразия $\mathcal{M}_L(\Gamma)$ равна $-\infty$, если существует модулярная форма большого веса с маленьким дивизором.

Теорема 3.4. (См. [D2, Теорема 5.8].) Пусть $\text{sign}(L) = (2, n)$ и $n \geq 3$. Предположим, что $F_k \in M_k(\Gamma, \chi)$ – строго рефлексивная модулярная форма веса k и характера χ относительно подгруппы $\Gamma < O^+(L)$ конечного индекса, т.е.

$$\text{div } F \leq R \cdot \text{div}(\pi_\Gamma).$$

Пусть $\kappa(X)$ – размерность Кодaira многообразия X .

1) Если $k > n$, то $\kappa(\Gamma \backslash \mathcal{D}(L)) = -\infty$.

2) Пусть $k = n$. Предположим в этом случае, что Γ имеет хотя бы один касп, т.е. $\Gamma \backslash \mathcal{D}(L)$ не является компактным многообразием. Если F не является параболической, то $\kappa(\Gamma \backslash \mathcal{D}(L)) = -\infty$. Если F параболическая форма (с кратностью нуля на границе не меньшей 1), то для подгруппы $\Gamma_\chi = \ker(\chi \cdot \det) < \Gamma$ имеем $\kappa(\Gamma_\chi \backslash \mathcal{D}(L)) = 0$.

Отметим, что имеется следующее алгебро-геометрическое уточнение последней теоремы. Напомним, что многообразие называется унилинейчатым, если существует доминантное рациональное отображение $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$, где Y многообразие с $\dim Y = \dim X - 1$. Если X унилинейчатое, то $\kappa(X) = -\infty$. Гипотетически предполагается, что обратное тоже верно, однако это доказано только для $\dim X = 3$.

Теорема 3.5. (См. [D7, Теорема 2.1].) Пусть $k > n$ в условиях Теоремы 3.4. Тогда модулярное многообразие $\Gamma \backslash \mathcal{D}(L)$ является, по крайней мере, унилинейчатым. (См. более общую формулировку и доказательство в [D7].)

4 Автоморфные произведения Борчердса в терминах форм Якоби веса 0, лоренцевы алгебры Каца–Муди, эллиптический род многообразий Калаби–Яу

В предыдущем параграфе была описана роль автоморфных форм со специальными дивизорами. Основная задача – построить автоморфные формы, удовлетворяющие условиям первого или второго автоморфных критериев.

4.1. Автоморфное произведение в одномерном каспе.

Рассмотрим η -функцию Дедекунда

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) \in S_{1/2}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), v_\eta), \quad (19)$$

которая является параболической формой веса $1/2$ с системой мультипликаторов $v_\eta : \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow U_{24}$ порядка 24 (проективный характер). Базовый объект в нашей конструкции – **нечетная тета-функция Якоби** ($\vartheta(\tau, -z) = -\vartheta(\tau, z)$)

$$\vartheta(\tau, z) = q^{\frac{1}{8}} (\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}}) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n \zeta)(1 - q^n \zeta^{-1})(1 - q^n). \quad (20)$$

В [GN3] было замечено, что $\vartheta(\tau, z) \in J_{1/2, 1/2}(v_\eta^3 \times v_H)$ является голоморфной формой Якоби веса $1/2$ и индекса $1/2$ в терминах определения из §4.

Пусть дана целочисленная квадратичная решетка $L = 2U \oplus L_0(-1)$ (см. (12)) сигнатуры $(2, n)$. $\tilde{O}^+(L)$ – стабильная ортогональная группа. Для любого $v \in L \otimes \mathbb{Q}$, удовлетворяющего $(v, v) < 0$, определим соответствующий рациональный квадратичный дивизор $\mathcal{D}_v = \{[Z] \in \mathcal{D}(M) : (Z, v) = 0\}$. Зафиксируем аффинную цилиндрическую реализацию $\mathcal{H}(L_0)$ однородной области $\mathcal{D}(L)$ (см. (13)).

Теорема 4.1. (См. [D2, Теорема 4.2].) Пусть дана слабо голоморфная форма Якоби веса 0 и индекса 1 для решетки L_0 (см. §2)

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, \ell \in L_0^\vee} f(n, \ell) q^n \zeta^\ell \in J_{0, L_0; 1}^1.$$

Предположим, что $f(n, \ell) \in \mathbb{Z}$ для всех $2n - (\ell, \ell) \leq 0$. Введем порядок в векторной системе $\{\ell; f(0, \ell)\}$, аналогичный положительным и отрицательным корням. По определению, $(n, \ell, m) > 0$ означает, что либо $m > 0$, либо $m = 0$ и $n > 0$, либо $m = n = 0$ и $\ell < 0$. Определим четыре константы

$$A = \frac{1}{24} \sum_{\ell \in L^\vee} f(0, \ell), \quad \vec{B} = \frac{1}{2} \sum_{\ell > 0} f(0, \ell) \ell \in \frac{1}{2} L_0^\vee, \quad C = \frac{1}{2 \operatorname{rank}(L)} \sum_{\ell \in L^\vee} f(0, \ell) (\ell, \ell).$$

Тогда произведение

$$\operatorname{Borch}(\varphi)(Z) = q^A r^{\vec{B}} \xi^C \prod_{\substack{n, m \in \mathbb{Z}, \ell \in L_0^\vee \\ (n, \ell, m) > 0}} (1 - q^n \zeta^\ell \xi^m)^{f(nm, \ell)} \in M_{\frac{f(0,0)}{2}}^{\operatorname{mer}}(\tilde{\mathcal{O}}^+(L), \chi), \quad (21)$$

является мероморфной автоморфной формой веса $f(0, 0)/2$ относительно стабильной ортогональной группы $\tilde{\mathcal{O}}^+(2U \oplus L_0(-1))$ с характером χ . При этом $Z = (\tau, \mathfrak{z}, \omega) \in \mathcal{H}(L_0)$, $q = \exp(2\pi i \tau)$, $\zeta^\ell = \exp(2\pi i (\ell, \mathfrak{z}))$, $\xi = \exp(2\pi i \omega)$, а характер χ индуцируется своими значениями на подгруппах:

$$\chi|_{\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} = v_\eta^{24A}, \quad \chi|_{H(L)}([\lambda, \mu; r]) = e^{\pi i C((\lambda, \lambda) + (\mu, \mu) - (\lambda, \mu) + 2r)}, \quad \chi(V) = (-1)^D,$$

где $V : (\tau, \mathfrak{z}, \omega) \rightarrow (\omega, \mathfrak{z}, \tau)$ и $D = \sum_{n < 0} \sigma_0(-n) f(n, 0)$, т.е.

$$\operatorname{Borch}(\varphi)(\tau, \mathfrak{z}, \omega) = (-1)^D \operatorname{Borch}(\varphi)(\omega, \mathfrak{z}, \tau).$$

Все полюса и нули формы $\operatorname{Borch}(\varphi)$ лежат на рациональных квадратичных дивизорах типа $\mathcal{D}_v$, где $v \in 2U \oplus L^\vee(-1)$ – примитивный вектор с $(v, v) < 0$. **Кратность дивизоров** задаётся формулой

$$\operatorname{mult} \mathcal{D}_v = \sum_{d \in \mathbb{Z}, d > 0} f(d^2 n, d \ell),$$

где $v \equiv \ell \pmod{2U \oplus L_0(-1)}$, $\ell \in L_0^\vee$, $n \in \mathbb{Z}$ такие, что $(v, v) = 2n - (\ell, \ell)$.

Замечание. Наш вариант произведения Борчердса является экспоненциальным вариантом арифметического подъема. Бесконечное произведение Теоремы 4.1 в нашей конструкции записывается другим образом. Пусть φ исходная форма Якоби веса 0 и

$$\tilde{\varphi}(Z) = \tilde{\varphi}(\tau, \mathfrak{z}, \omega) = \varphi(\tau, \mathfrak{z}) \exp(2\pi i i \omega).$$

Тогда

$$\operatorname{Borch}(\varphi)(Z) = \tilde{\psi}_{L; C}(Z) \exp\left(-\sum_{m \geq 1} m^{-1} \tilde{\varphi}|T_-(m)(Z)\right), \quad (22)$$

где под экспонентой стоит арифметический подъем формы Якоби веса 0 из Теоремы 2.2. Первый множитель, т.е. первый ненулевой коэффициент Фурье–Якоби индекса C формы $\operatorname{Borch}(\varphi)$ в данном одномерном каспе является обобщённым тета-блоком

$$\psi_{L; C}(\tau, \mathfrak{z}) = \eta(\tau)^{f(0,0)} \prod_{\ell > 0} \left(\frac{\vartheta(\tau, (\ell, \mathfrak{z}))}{\eta(\tau)} \right)^{f(0, \ell)}. \quad (23)$$

Частный случай Теоремы 4.1 для решеток сигнатуры (2, 3) был предложен в статьях Гриценко и Никулина [GN1]–[GN3]. В пунктах 4.2–4.5 мы дадим несколько приложений Теоремы 4.1.

4.2. Двадцать три новых конструкции формы Борчердса Φ_{12} .

Рассмотрим четную унимодулярную решетку $II_{2,26}$ сигнатуры (2, 26). Граница компактификации Бейли–Бореля модулярного многообразия $O^+(II_{2,26}) \setminus \mathcal{D}(II_{2,26})$ (так называемое пространство модулей бозонной струны) состоит из одного нульмерного каспа и 24 одномерных каспов, отвечающих классам четных унимодулярных решеток Нимейера ранга 24 (см. [D4, Лемма 4.4]).

Теорема 4.2. (См. [D2, Теорема из Введения].) *Форма Борчердса $\Phi_{12} \in M_{12}(O^+(II_{2,26}), \det)$ обращается в ноль с кратностью 1 в нульмерном каспе группы $O^+(II_{2,26})$. На одномерном каспе, отвечающем решетке Лича, значение Φ_{12} равно форме Рамануджана $\Delta_{12}(\tau)$. В одномерных каспах, отвечающих решеткам Нимейера $N(R)$ с нетривиальной системой корней $R(N)$, Φ_{12} обращается в ноль с кратностью $h(R)$, где $h(R)$ число Кокстера неприводимых компонент системы корней R . Первый коэффициент Фурье–Якоби Φ_{12} в окрестности этой одномерной компоненты совпадает, с точностью до знака, с функцией знаменателя Каца–Вейля соответствующей аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}(R)$*

$$\Phi_{12}(\tau, \mathfrak{z}, \omega) = \pm \eta(\tau)^{24} \prod_{v \in R_+} \frac{\vartheta(\tau, (v, \mathfrak{z}))}{\eta(\tau)} e^{2\pi i h(R)\omega} + \dots,$$

где $\vartheta(\tau, z)$ – нечетная тета-функция Якоби (см. (20)), $\eta(\tau)$ – функция Дедекинда (см. (19)), а произведение берется по всем положительным корням конечной системы корней R . Первый тета-блок в формуле для $\Phi_{12}(\tau, \mathfrak{z}, \omega)$ совпадает с формулой знаменателя Каца–Вейля аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}(R(N))$, где $R(N)$ непустая система корней решетки Нимейера N .

4.3. Давний вопрос Френкеля–Фейнгольда о простейшей гиперболической алгебре Каца–Муди.

В 1983 году в работе И. Френкеля и А. Фейнгольда [FF] был поставлен вопрос о возможных соотношениях между аффинными алгебрами Ли, простейшей гиперболической алгеброй Каца–Муди и модулярными формами Зигеля рода 2. Отметим, что нечетная тета-функция Якоби $\vartheta(\tau, z)$ – функция знаменателя Каца–Вейля простейшей аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}(A_1)$ системы корней $A_1 = \langle 2 \rangle$.

Результат Теоремы 4.2 дает автоморфный ответ на вопрос Френкеля–Фейнгольда в случае алгебры Борчердса $\mathfrak{G}_{FM}$ гиперболического ранга 26. Это так называемая **Fake Monster Lie Algebra**. Последняя теорема показывает, что Fake Monster Lie Algebra продолжает (в автоморфном смысле) 23 аффинных алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}(R)$ с системами корней решеток Нимейера: $3E_8, E_8 \oplus D_{16}, D_{24}, 2D_{12}, 3D_8, 4D_6, 6D_4, A_{24}, 2A_{12}, 3A_8, 4A_6, 6A_4, 8A_3, 12A_2, 24A_1, E_7 \oplus A_{17}, 2E_7 \oplus D_{10}, 4E_6, E_6 \oplus D_7 \oplus A_{11}, A_{15} \oplus D_9, 2A_9 \oplus D_6, 2A_7 \oplus D_5, 4A_5 \oplus D_4$. Отметим, что Борчердс дал в [Bor1]–[Bor2] конструкцию автоморфных произведений в нульмерном каспе. Точнее говоря, он нашел разложение Фурье формы Φ_{12} в единственном нульмерном каспе группы $O^+(II_{2,26})$ в терминах решетки Лича, которая не содержит корней. Именно поэтому в формуле Борчердса для Φ_{12} не появлялись системы корней аффинных алгебр Ли.

4.4. Лоренцевы алгебры Каца–Муди и унилинейчатые модулярные многообразия.

Построение рефлексивных модулярных форм является важной прикладной проблемой в алгебраической геометрии и теории алгебр Каца–Муди. В статье [D3] выполнена полная классификация лоренцевых алгебр Каца–Муди с гиперболической группой Вейля, порожденной всеми 2-отражениями решетки корней. Мы не будем давать определения этих обобщенных гиперболических (супер) алгебр Каца–Муди (см. детали в [D3]), так как мы сконцентрировались в этой диссертации на приложениях рефлексивных модулярных форм в алгебраической геометрии. Следующая теорема (мы даем ниже сокращенный вариант оригинального результата) является приложением Теоремы 4.2. Применение конструкции квазиограничения (см. Теорему 5.4 в §5) дает следующий результат.

Теорема 4.3. (См. [D3, Теорема 3.1] и [D2, Теорема 6.10].) *Положим $L = 2U \oplus L_0(-1)$, где L_0 одна из 33 решеток корней, указанных ниже. Квазиограничение (см. ниже Теорему 5.4) формы Борчердса*

$$\Phi_{12}|_{L_0} \in M_k(\tilde{O}^+(L), \det)$$

является строго (-2) -рефлексивной модулярной формой с полным (-2) -дивизором и имеет вес k , указанный в нижней строчке,

$$\begin{aligned} & A_1, 2A_1, 3A_1, 4A_1; \quad A_2, 2A_2, 3A_2; \quad A_3, 2A_3; \quad A_4, A_5, A_6, A_7; \\ & k = 35, \quad 34, \quad 33, \quad 32; \quad 45, \quad 42, \quad 39; \quad 54, \quad 48; \quad 62, \quad 69, \quad 75, \quad 80, \\ & \quad D_4, 2D_4, D_5, D_6, D_7, D_8; \quad E_6, E_7, E_8, 2E_8; \quad N_8; \\ & k = 72, \quad 60, \quad 88, \quad 102, \quad 114, \quad 124, \quad 120, \quad 165, \quad 252, \quad 132, \quad 28; \end{aligned}$$

или вес $k = 12$ для решеток

$$\langle 4 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 8 \rangle, D_2(2) = \langle 4 \rangle \oplus \langle 4 \rangle, A_2(2), A_2(3), A_3(2), D_4(2), E_8(2).$$

Отметим, что первые 24 формы веса $k > 12$ являются параболическими формами. Эти формы определяют автоморфные лоренцевы алгебры Каца–Муди гиперболической решетки $U \oplus L_0$.

Теорема 4.4. (См. [D2, §6.5].) *Для всех 33 решеток L из Теоремы 4.3 модулярное многообразие $\tilde{O}^+(L) \setminus \mathcal{D}(L)$ является по крайней мере унилинейчатым.*

4.5. Эллиптический род от двух переменных многообразий с $c_1 = 0$. Вторичное квантование эллиптического рода многообразий Калаби–Яу.

Пусть M – (почти) комплексное компактное многообразие M (комплексной) размерности d , T_M – голоморфное касательное расслоение многообразия M , T_M^* – двойственное к нему. Положим $q = \exp(2\pi i\tau)$ и $y = \exp(2\pi iz)$ ($\tau \in \mathbb{H}_1$, $z \in \mathbb{C}$). Определим формальный степенной ряд $\mathbf{E}_{q,y} \in K(M)[[q, y^{\pm 1}]]$

$$\mathbf{E}_{q,y} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \bigwedge_{-y^{-1}q^n} T_M^* \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{-yq^n} T_M \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n} T_M^* \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n} T_M,$$

где $\bigwedge_x E = \sum_{k \geq 0} (\wedge^k E) x^k$ и $S_x E = \sum_{k \geq 0} (S^k E) x^k$. Предположим, что первый класс Черна $c_1(T_M) = 0$ (над полем). Голоморфная эйлерова характеристика $\mathbf{E}_{q,y}$

$$EG(M_d; \tau, z) = y^{d/2} \int_M \text{ch}(\mathbf{E}_{q,y}) \text{td}(T_M) = y^{d/2} \sum_{p=0}^d (-1)^p y^{-p} \chi^p(M) + q(\dots),$$

называется **эллиптическим родом** многообразия M . Заметим, что q^0 -коэффициент эллиптического рода совпадает с χ_y -родом Хирцебруха M , где $\chi^p(M) = \chi(M, \wedge^p T_M^*) = \sum_{q=0}^d (-1)^q h^{p,q}(M)$.

Теорема 4.5. (См. [D8].) *Эллиптический род $EG(M_d; \tau, z)$ комплексного многообразия M размерности d с $c_1(M) = 0$ является слабой формой Якоби веса 0 и индекса $d/2$ типа Эйхлера–Загира с целыми коэффициентами Фурье*

$$EG(M_d; \tau, z) \in J_{0, d/2}^{weak, \mathbb{Z}}.$$

Эллиптический род однозначно определен $\chi_y(M)$ -родом Хирцебруха, если размерность M меньше 12 или равна 13.

Понятие эллиптического рода для $N = 2$ суперсимметричных теорий было введено в теорию струн в работах Виттена, Егучи и других (см. детали в [D8]). В физике эллиптический род многообразия Калаби–Яу определяется как статистическая сумма рода один суперсимметричной сигма-модели, целевым пространством которой является многообразие M_d . В [D8] мы дали математическое доказательство того, что эллиптический род многообразия Калаби–Яу размерности d есть форма Якоби веса 0 и индекса $d/2$. По этой форме можно построить автоморфное произведение в силу Теоремы 4.1. Функция $\text{Vorch}^{-1}(EG(M_d), Z)$ задает вторичное квантование эллиптического рода многообразия Калаби–Яу M_d в силу результатов Р. Дайкграафа, Г.Мур, Э. Верлинде и Х. Верлинде (см. [SQ] и [D8]). В [D8] исследована также связь вторичного квантования с лоренцевыми алгебрами Каца–Муди сигнатуры $(1, 2)$, построенными Гриценко и Никулиным в [GN2].

Теорема 4.6. (См. [D8, §3].) *Пусть M_d – многообразие Калаби–Яу размерности $d = 2, 4$ или 6 . Тогда вторичное квантование эллиптического рода многообразия M_d выражается в виде произведения функций знаменателя лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга 3 из списка Гриценко–Никулина в [GN1]–[GN4].*

5 Основные результаты о пространствах модулей

В резюме мы сохраняем нумерацию теорем из основного текста диссертации.

5.1. Вопрос Зигеля о геометрическом типе пространства модулей поляризованных абелевых поверхностей. Ответ на этот вопрос дан выше в Теореме 2.3.

5.2. Пространства модулей поляризованных К3 поверхностей. Как было отмечено во Введении, последним открытым вопросом программы Вейля был вопрос о геометрическом типе пространств модулей поляризованных К3 поверхностей. Его решение было предложено в статье [D4]. (См. краткое изложение в докладе К. Вуазен на семинаре Бурбаки [Vo2].) Сформулируем один из основных результатов диссертации.

Теорема 5.1. ([D4, Теорема 1.] *Пространство модулей $\mathcal{F}_{2d}$ (см. (4)–(5)) поляризованных К3 поверхностей степени $2d$ имеет общий тип для $d = 46, 50, 54, 57, 58, 60$ и для всех $d > 61$. Размерность Кодаиры $\mathcal{F}_{2d}$ неотрицательна, если $d \geq 40$ и $d \neq 41, 44, 45, 47$.*

Отметим, что открытым остается вопрос для поляризаций в интервале $20 \leq d < 40$, так как исследования Мукаи (1988–2010) дают следующий результат.

Утверждение. (См. [Mu1]–[Mu5].) *Пространство модулей поляризованных К3 поверхностей степени $2d$ является рациональным или унирациональным для $1 \leq d \leq 12$ и $d = 15, 16, 17, 19$.*

Для доказательства Теоремы 5.1 мы провели в [D4] детальное изучение модулярных многообразий. Очень важным является следующий общий результат.

Теорема 5.2. (См. [D4, Теорема 2.1].) *Пусть L – решетка сигнатуры $(2, n)$ с $n \geq 9$, и пусть $\Gamma < O^+(L)$ – подгруппа конечного индекса. Тогда существует проективная тороидальная компактификация $\overline{\mathcal{F}}_L(\Gamma)$ модулярного многообразия $\Gamma \backslash \mathcal{D}(L)$ такая, что $\overline{\mathcal{F}}_L(\Gamma)$ имеет только канонические особенности и не имеет дивизоров ветвления на границе компактификации. Дивизоры ветвления в $\mathcal{F}_L(\Gamma)$ возникают из неподвижных дивизоров $\pm$ -отражений в группе Γ .*

Доказательство этой фундаментальной теоремы состоит из трех частей: исследование эллиптических особенностей, дивизора ветвления и границы компактификации.

5.3. Общий тип пространств модулей поляризованных гиперкэлеровых многообразий. Изложенный выше общий метод дает следующие результаты для модулей поляризованных гиперкэлеровых многообразий.

Теорема 6.2 (См. [D5, Теорема 4.1].) *Пространство модулей $\mathcal{M}^{split}(\text{K3}^{[2]}, 2d)$ (см. (6)–(7)) поляризованных многообразий типа $\text{K3}^{[2]}$ с расщепимой поляризацией степени Богомолова–Бовиля $2d$ имеет общий тип, если $d \geq 12$. Для $d = 9$ и $d = 11$ его размерность Кодаиры неотрицательная.*

Для десятимерных многообразий О’Грэди [OG1] существуют расщепимые и нерасщепимые поляризации. Они полностью описаны в [D6]. Ниже сформулирован основной результат.

Теорема 6.3 ([D6, Теорема 4.1].) *Пусть d – натуральное число, не равное 2^n с $n \geq 0$. Пространство модулей поляризованных десятимерных многообразий О’Грэйди $\mathcal{M}_{O'G_{10}, 2d}^{split}$ (см. (8)–(9)) с расщепимой поляризацией h степени Богомолова–Бовиля $h^2 = 2d \neq 2^{n+1}$ имеет общий тип.*

5.4. Квазиограничение формы Борчердса. Важной автоморфной частью нашего метода является следующая теорема, которая позволяет находить автоморфные формы, используемые в первом и во втором автоморфных критериях.

Теорема 5.3. (См. [D4, Теорема 6.2] и более общий и точный вариант в [D2, §6].) *Пусть $L \hookrightarrow II_{2,26}$ – примитивная невырожденная подрешетка сигнатуры $(2, n)$, $n \geq 3$, и пусть задано соответствующее вложение однородных областей $\mathcal{D}_L \hookrightarrow \mathcal{D}_{II_{2,26}}$. Множество (-2) -корней*

$$R_{-2}(L^\perp) = \{r \in II_{2,26} \mid r^2 = -2, (r, L) = 0\}$$

в ортогональном дополнении конечно. Положим $N(L^\perp) = \#R_{-2}(L^\perp)/2$. Тогда функция

$$\Phi|_L = \frac{\Phi_{12}(Z)}{\prod_{r \in R_{-2}(L^\perp)/\pm 1} (Z, r)} \Big|_{\mathcal{D}_L} \in M_{12+N(L^\perp)}(\tilde{O}(L), \det), \quad (24)$$

где в произведении по r фиксируется конечная система представителей в $R_{-2}(L^\perp)/\pm 1$, есть модулярная форма веса $12 + N(L^\perp)$. Модулярная форма $\Phi|_L$ обращается в нуль только на рациональных квадратичных дивизорах типа $\mathcal{D}_v(L)$, где $v \in L^\vee$ – ортогональная проекция (-2) -корня $r \in II_{2,26}$ на $L^\vee$ с $(v, v) < 0$.

Мы называем модулярную форму $\Phi|_L$ квазиограничением Φ_{12} , если набор корней $R_{-2}(L^\perp)$ не пуст.

Теорема 5.4. (См. [D4, Теорема 6.2].) Пусть $L \hookrightarrow II_{2,26}$ – невырожденная подрешетка сигнатуры $(2, n)$, $n \geq 1$. Мы предполагаем, что множество -2 -корней $R_{-2}(L^\perp)$ не пусто. Тогда квазиограничение $\Phi|_L \in S_{12+N(L^\perp)}(\tilde{O}(L), \det)$ формы Борчердса Φ_{12} будет параболической модулярной формой.

5.5. Векторы поляризации: арифметика решеток корней. Для построения автоморфной формы малого веса с большим дивизором необходимо ответить на следующий чисто арифметический вопрос.

Ключевой вопрос в случае КЗ поверхностей: Для каких $2d > 0$ существует вектор $l \in E_8$ такой, что

$$l \in E_8, \quad l^2 = 2d, \quad l \text{ ортогонален по крайней мере двум и не более 12 корням?} \quad (25)$$

Если такой вектор существует, то квазиограничение Φ_{12} на подобласть $\mathcal{D}(2U \oplus 2E_8(-1) \oplus \langle l \rangle)$ в $\mathcal{D}(II_{2,26}) = \mathcal{D}(2U \oplus 3E_8(-1))$ даст нам параболическую форму малого веса с большим дивизором. Согласно “*the low weight cusp form trick*” (Теорема 3.3 из §3), пространство модулей $\mathcal{F}_{2d}$ будет иметь максимальную размерность Кодаиры.

Теорема 5.5. Вектор l , удовлетворяющий (25), действительно существует, если выполняется неравенство

$$4N_{E_7}(2d) > 28N_{E_6}(2d) + 63N_{D_6}(2d), \quad (26)$$

где $N_L(2d)$ обозначает количество представлений $2d$ решеткой L .

5.6. Пространства модулей поляризованных поверхностей Куммера (см. (2)–(3)). В данном случае речь идет о факторах конечного порядка пространства модулей поляризованных абелевых поверхностей. Парамодулярная группа Γ_t , модулярная группа пространства модулей $(1, t)$ -поляризованных абелевых поверхностей, и ее нормальные расширения в $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ имеют реализации в виде целых ортогональных групп сигнатуры $(2, 3)$. Эта реализация ясно описывает природу расширений парамодулярной группы (см. [GH1]).

Пусть $L_t = 2U \oplus \langle -2t \rangle$ – четная целочисленная решетка сигнатуры $(2, 3)$. Согласно [G2] и [GH1, Предложение 1.2 и Следствие 1.3]) у нас имеются следующие изоморфизмы

$$\Gamma_t^+ / \{\pm E_4\} \cong \tilde{O}^+(L_t) / \{\pm E_5\}, \quad \Gamma_t^* / \{\pm E_4\} \cong O^+(L_t) / \{\pm E_5\}.$$

Накрытия $\Gamma_t \backslash \mathbb{H}_2 \rightarrow \Gamma_t^+ \backslash \mathbb{H}_2$ и $\Gamma_t \backslash \mathbb{H}_2 \rightarrow \Gamma_t^* \backslash \mathbb{H}_2$ являются накрытиями Галуа с конечной абелевой группой Галуа. Согласно [GH1, Предложение 1.5], модулярное многообразие $\mathcal{A}_t^+ = \Gamma_t^+ \backslash \mathbb{H}_2$ (t – бесквадратное) изоморфно пространству модулей поляризованных КЗ поверхностей с поляризацией типа $\langle 2t \rangle \oplus 2E_8(-1)$. Согласно [GH1, Теореме 1.5], модулярное многообразие $\mathcal{K}_t = \Gamma_t^* \backslash \mathbb{H}_2$ изоморфно пространству модулей поверхностей Куммера, соответствующих абелевым поверхностям с $(1, t)$ -поляризацией. В (3) дана ортогональная интерпретация этого модулярного многообразия.

Теорема 7.2 (См. полный вариант в [D9, Следствие 8.1] и [D10, Теорема 6.2].) Пространство модулей $\mathcal{K}_p = \Gamma_p^* \backslash \mathbb{H}_2$ поверхностей Куммера, определённых $(1, p)$ -поляризованными абелевыми поверхностями, имеет положительный геометрический род для $p = 167, 173, 223, 227, 251, 257, 269, 271, 283, 293$. Кроме того, справедливы неравенства

$$h^{3,0}(\Gamma_p^*, \mathbb{C}) \geq 2, \quad t = 227, 257, 269, 283, \quad h^{3,0}(\Gamma_{293}^*, \mathbb{C}) \geq 4.$$

Эта теорема доказана с использованием теории тета-блоков Гриценко–Скоруппы–Загира [GSZ] и методов статьи автора [GPY].

Список литературы

- [BB] W.L. Baily Jr., A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*. Ann. of Math. (2) **84** (1966), 442–528.
- [BK] A. Brumer, K. Kramer, *Paramodular abelian varieties of odd conductor*. Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 2463–2516.
- [Be] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*. J. Differential Geometry **18** (1983), 755–782.
- [Bo] F. Bogomolov, *The decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class*. Matem. Sbornik (N.S.) **93(135)** (1974), 573–575, 630.
- [Bor1] R.E. Borcherds, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products*. Invent. Math. **120** (1995), 161–213.
- [Bor2] R.E. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*. Invent. Math. **132** (1998), 491–562.
- [CG1] F. Cléry, V. Gritsenko, *Siegel modular forms with the simplest divisor*. Proc. of London Math. Society **102** (2011), 1024–1052.
- [CG2] F. Cléry, V. Gritsenko, *Modular forms of orthogonal type and Jacobi theta-series*. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **83** (2013), 187–217.
- [SQ] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde, H. Verlinde, *Elliptic genera of symmetric products and second quantized strings*. Commun. Math. Phys. **185** (1997), 197–209.
- [FF] A.J. Feingold, I.B. Frenkel, *A hyperbolic Kac–Moody algebra and the theory of Siegel modular forms of genus 2*. Math. Ann. **263** (1983), 87–144.
- [Fr] E. Freitag, *Siegelsche Modulformen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **254**. Springer-Verlag 1983.
- [G2] V. Gritsenko, *Modular forms and moduli spaces of Abelian and K3 surfaces*. Algebra i Analiz **6** (1994), 65–102; English translation in St. Petersburg Math. J. **6** (1995), 1179–1208.
- [G5] V. Gritsenko, *Modified Elliptic Genus*, pp. 87–119. In “Partition Functions and Automorphic Forms” (eds. V. A. Gritsenko, V. P. Spiridonov), Moscow Lectures vol. 5, Springer, 2020,
- [GH1] V. Gritsenko, K. Hulek, *Minimal Siegel modular threefolds*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), 461–485.
- [GHS1] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *Moduli spaces of K3 surfaces and holomorphic symplectic varieties*. Handbook of Moduli (ed. G. Farkas and I. Morrison), vol. 1, 459–526; Adv. Lect. in Math, Intern. Press, MA, 2012.
- [GN1] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras*. Amer. J. Math. **119** (1997), 181–224.

- [GN2] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. I.* International J. Math. **9** (2) (1998), 153–200.
- [GN3] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. II.* International J. Math. **9** (2) (1998), 201–275.
- [GN4] V. Gritsenko, V.V. Nikulin, *On the classification of Lorentzian Kac–Moody algebras.* Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), no. 5 (347), 79–138; English transl. in Russian Math. Surveys. **57** (2002), no. 5, 921–979.
- [GPY] V. Gritsenko, C. Poor, D. Yuen, *Borchers products everywhere.* J. Number Theory **148** (2015), 164–195.
- [GSZ] V. Gritsenko, N.-P. Skoruppa, D. Zagier, *Theta-blocks.* arXiv:1907.00188, 57 pp.
- [GP] M. Gross, S. Popescu, *Calabi–Yau three-folds and moduli of abelian surfaces II.* Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 3573–3599.
- [KP] V. Kac, D.H. Peterson, *Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms.* Adv. in Math. **53** (1984), 125–264.
- [Mu1] S. Mukai, *Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10 .* Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I, 357–377, Kinokuniya, Tokyo, 1988.
- [Mu2] S. Mukai, *Polarized K3 surfaces of genus 18 and 20.* Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989), 264–276, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **179**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [Mu3] S. Mukai, *Curves and K3 surfaces of genus eleven.* Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), 189–197, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **179**, Dekker, New York, 1996.
- [Mu4] S. Mukai, *Polarized K3 surfaces of genus thirteen.* Moduli spaces and arithmetic geometry (Kyoto 2004), 315–326, Adv. Stud. Pure Math., **45**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.
- [Mu5] S. Mukai, *Polarized K3 surfaces of genus sixteen.* Oberwolfach Report 02/2010, DOI: 10.4171/OWR/2010/02.
- [OG1] K. O’Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3.* J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 49–117.
- [Vo2] C. Voisin, *Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces K3 [d’après Gritsenko–Hulek–Sankaran, Farkas–Popa, Mukai, Verra...].* Séminaire BOURBAKI 59ème année, 2006–2007, n 981.
- [We] A. Weil, *Oeuvres scientifiques – Collected papers*, Volume II. Springer Verlag 1979.