На правах рукописи

Кривошеева Олеся Александровна

РЯДЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Специальность 01.01.01 –
вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань – 2018

Работа выполнена на кафедре математического анализа факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»

Официальные оппоненты:	**Баранов Антон Дмитриевич** доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
	Мелихов Сергей Николаевич доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»
	Шерстюков Владимир Борисович доктор физико-математических наук, доцент, Институт общей профессиональной подготовки Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»
Ведущая организация:	ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится «22» ноября 2018 г. В 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, Институт математики и механики им. Лобачевского, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 35. Электронная версия диссертации размещена на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета https://kpfu.ru/dis_card?p_id=2638

Автореферат разослан «15» 10 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k такая, что $|\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_k|$, $k \geq 1$, и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Диссертация посвящена изучению рядов экспоненциальных мономов и рядов экспоненциальных многочленов, т.е. рядов вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}. \quad (1)$$

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z), \quad (2)$$

где $e_{m,j}$ – фиксированная линейная комбинация функций системы $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{n=0,k=1}^{n_k-1,\infty}$, показатели λ_k которой разбиты на группы $U_m, m \geq 1$. Линейная комбинация $e_{m,j}$ формируется по точкам λ_k группы U_m.

Исследуются проблемы представления рядами (1) и (2) элементов подпространств аналитических функций инвариантных относительно оператора дифференцирования в выпуклых областях комплексной плоскости. Изучается также задача распределения особых точек сумм рядов (1) и (2) на границах их областей сходимости. Указанные исследования основаны на изучении областей и характера сходимости этих рядов, на исследовании различных характеристик последовательностей показателей рядов (1) и (2), на изучении взаимосвязей между этими характеристиками и их влияния на соотношение между областями сходимости рядов (1) и (2) и областями существования их сумм.

Тематика, связанная с рядами экспоненциальных мономов и их частными случаями – рядами экспонент (т.е. рядами вида (1), где $n_k = 1$, $k \geq 1$), рядами Дирихле (т.е. рядами вида (1), где $n_k = 1$ и λ_k - положительные числа) и рядами Тейлора имеет богатую историю. Их исследование берет свое начало в трудах Тейлора, Коши, Адамара, Абеля и Дирихле. Указанные выше задачи для таких рядов изучались в работах Ж. Валирона, Д. Полиа, С. Мандельбройта, В. Бернштейна, Л. Шварца, П. Мальявена, Б.Я. Левина, А.Ф. Леонтьева, И.Ф. Красичкова-Терновского, Ю.Ф. Коробейника, А.С. Кривошеева и многих других математиков.

Ряды экспоненциальных мономов (и более общих экспоненциальных многочленов) являются естественным обобщением рядов экспонент. Один из основных результатов теории таких рядов, ставший уже классическим, принадлежит А.Ф. Леонтьеву. Ему удалось доказать, что любую функцию, аналитическую в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$, можно разложить в ряд экспонент с фиксированными показателями $\lambda_k, k \geq 1$, при определенных условиях на эти показатели. Известно, что экспоненты (и только они) являются собственными функциями оператора дифференцирования. Поэтому задачу представления рядами экспонент можно рассматривать как задачу разложения по собственным функциям этого оператора.

В пространстве $H(D)$ (функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах из D) имеется большой запас собственных функций оператора дифференцирования (это все экспоненты). Поэтому существует много различных наборов показателей λ_k, при помощи которых удается получить представление всех функций из этого пространства посредством ряда экспонент. Если же W – подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования (например, пространство решений однородного уравнения свертки или их систем), то, как правило, только лишь собственных функций этого оператора (в этом случае имеется только счетный набор собственных функций) уже недостаточно для разложения всех функций из подпространства W.

Однако, ситуация меняется, если наряду с собственными функциями рассматривать еще и присоединенные функции оператора дифференцирования в W – экспоненциальные мономы

$$z^n e^{\lambda_k z}, \ n = \overline{1, n_k - 1},$$

где n_k – кратность собственного значения λ_k. Задача разложения функций из замкнутого инвариантного относительно оператора дифференцирования подпространства $W \subset H(D)$ по собственным и присоединенным функциям этого оператора (т.е. задача представления рядом (1)) называется проблемой фундаментального принципа. Такое название связано с тем, что в частном случае, когда инвариантное подпространство является пространством решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, возможность разложения произвольного решения по собственным и присоединенным функциям оператора дифференцирования называют фундаментальным принципом Л. Эйлера.

Если представление рядом (1) по каким-то причинам становится невозможным, то возникает задача представления рядом (2), т.е. проблема существования базиса в инвариантном подпространстве, построенного по собственным и присоединенным функциям оператора дифференцирования.

Для рядов (1) и (2), как и в теории рядов экспонент (и, в частности, для степенных рядов и рядов Дирихле) первоочередными являются задачи описания классов областей сходимости (это включает в себя задачу о продолжении сходимости) и характер сходимости рядов, а также восстановление области сходимости по коэффициентам ряда. В теории степенных рядов первые две задачи решаются при помощи теоремы Абеля, а последняя задача – при помощи теоремы Коши-Адамара. Для рядов Дирихле имеется аналог теоремы Абеля, в котором утверждается, что сходимость ряда Дирихле в одной точке z_0 влечет за собой его сходимость в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}z < \mathrm{Re}z_0\}$. Если при этом величина $\sigma(\Lambda)$ равна нулю, то эта сходимость будет абсолютной и равномерной в любой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}z < \mathrm{Re}z_0 - \varepsilon\}$.

Кроме того, для рядов Дирихле имеется полный аналог теоремы Коши-Адамара (Валирон, 1924 г.), в котором при условии $\sigma(\Lambda) = 0$ вычисляется расстояние от начала координат до граничной прямой полуплоскости сходимости. В случае рядов экспонент полный аналог теоремы Абеля отсутствует. Имеется результат (Е. Хилле, 1924 г.) о том, что множество точек абсолютной сходимости ряда экспонент выпукло. Причем на компактных подмножествах внутренности этого множества ряд сходится равномерно. При условии $\sigma(\Lambda) = 0$ простая и абсолютная сходимость ряда экспонент в выпуклой области равносильны. Кроме этого для рядов экспонент известен также (Г.Л. Лунц, 1942 г.) аналог теоремы Коши-Адамара. В ней дается описание области сходимости ряда экспонент, которая получается как пересечение некоторого семейства полуплоскостей. При этом приводится формула для расстояний от начала координат до граничных прямых этих полуплоскостей.

Пусть D – выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Если $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, то $W(\Lambda, D)$ является нетривиальным ($\neq H(D), \{0\}$) замкнутым подпространством в $H(D)$. Из определения вытекает, что оно инвариантно относительно оператора дифференцирования. При этом система $\mathcal{E}(\Lambda)$ – это набор собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в $W(\Lambda, D)$.

Пусть $W \subset H(D)$ – нетривиальное замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – его кратный спектр. Он является не более чем счетным множеством с единственной предельной точкой ∞. В случае, когда спектр конечен, оно совпадает с пространством решений линейного однородного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами. Более общим примером инвариантного подпространства служит множество решений уравнения свертки $\mu(g(z + w)) \equiv 0$ (или системы таких уравнений), где μ – линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D)$. Частными случаями уравнения свертки являются линейные дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами конечного и бесконечного порядков, а также некоторые виды интегральных уравнений.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема фундаментального принципа. Первым шагом на пути к представлению (1) является решение проблемы спектрального синтеза, т.е. выяснение условий, при которых система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в подпространстве W (другими словами, когда $W = W(\Lambda, D)$, где Λ – кратный спектр W). Проблему фундаментального принципа, естественно, имеет смысл рассматривать лишь для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, т.е. для подпространств вида $W(\Lambda, D)$.

В 1947 г. Л. Шварц доказал, что любое замкнутое инвариантное подпространство $W \subset H(\mathbb{C})$ допускает спектральный синтез. Известно также (И.Ф. Красичков-Терновский, 1971 г.), что пространство решений однородного уравнения свертки всегда допускает спектральный синтез. Пространства решений систем однородных уравнений свертки и более общие инвариантные подпространства уже не всегда допускают спектральный синтез. Однако, имеются простые достаточные условия, а также критерий допустимости спектрального синтеза и в этом случае (И.Ф. Красичков-Терновский, 1972 г.). Первый результат, обобщающий фундаментальный принцип Л. Эйлера на случай уравнений свертки был получен Ж. Валироном в 1929 г. Он касается представления целых решений однородного дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Этот результат получил дальнейшее развитие в работах Л. Шварца, А.О. Гельфонда, Д.Ж. Диксона, А.Ф. Леонтьева и др. К концу 40-х годов прошлого столетия была замечена тесная связь между проблемой фундаментального принципа и проблемой интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа. Оказалось, что они двойственные. Первый, кто использовал разрешимость интерполяционной задачи для разложения решений уравнения свертки в ряды экспонент, был, по-видимому, А.Ф. Леонтьев. Вслед за ним указанная связь использовалась уже систематически. Проблема интерполяции в пространствах целых функций сама по себе представляет значительный интерес и имеет богатую историю. Вопросами интерполирования в классах целых функций конечного порядка занимались многие математики. Отметим исследования А.О. Гельфонда, В.Л. Гончарова, М.А. Евграфова, Б.Я. Левина, А.Ф. Леонтьева, И.И. Ибрагимова и М. В. Келдыша, Ю. А. Казьмина, Ю.Ф. Коробейника и др.

Исследования указанных двойственных задач, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. А.С. Кривошеевым в 2004 г. получены наиболее полные решения этих задач для произвольной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ при одном ограничении $m_D(\Lambda) = 0$ на относительную кратность Λ: $n_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}| \to 0$ для любой $\{\lambda_{k(p)}\}$ такой, что $\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}| \to e^{-i\varphi}$ и $H_D(\varphi) < +\infty$. Отметим, что критерий разрешимости интерполяционной задачи и допустимости фундаментального принципа в подпространстве $W(\Lambda, D)$, полученный А.С. Кривошеевым имеет один недостаток. В его формулировке имеется «посредник», осуществляющий взаимосвязь между последовательностью Λ и областью D. Требуется существование семейства целых функций экспоненциального типа, асимптотические оценки сверху и снизу (вне исключительного множества) которых сколь угодно близки друг к другу и согласуются с D.

Одним из необходимых условий фундаментального принципа является равенство нулю индекса конденсации А.С. Кривошеева S_Λ. Если оно нарушается, то становится невозможным представление всех функций из подпространства $W(\Lambda, D)$ в виде ряда (1). Известно, однако, что и в этом случае иногда удается получить представление всех функций $g \in W(\Lambda, D)$ в виде ряда (1) «со скобками». Одним из первых результатов подобного рода является результат А.О. Гельфонда 1938 г., в котором утверждается, что каждое целое решение однородного уравнения свертки раскладывается в равномерно сходящийся на компактах ряд

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k - 1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z) \right), \quad z \in \mathcal{D} = \mathbb{C}, \qquad (3)$$

где $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – нули и их кратности характеристической функции f оператора свертки, U_m – группа всех λ_k из кольца $r_m \le |\lambda| < r_{m+1}$, а $\{r_m\}$ – возрастающая к $+\infty$ последовательность чисел такая, что на окружностях $|\lambda| = r_m$ модуль f имеет подходящие оценки снизу. А.Ф. Леонтьев распространил этот результат на любые нетривиальные инвариантные подпространства целых функций. При этом роль f может играть любая целая функция экспоненциального типа, которая обращается в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k. Отметим еще, что А.Ф.Леонтьев с помощью индекса конденсации Бернштейна получил критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств целых функций в случае простых λ_k.

Д. Диксон в 1964 г. доказал результат, в котором представление (3) распространяется на произвольные выпуклые области $D \subset \mathbb{C}$ вида $D = G + K$ при условии регулярности роста характеристической функции f, где G – выпуклая область и K – сопряженная диаграмма f.

В дальнейшем было замечено, что группы U_m из представления (3) можно формировать не только «по кольцам». Оказалось, что представление (3) будет иметь место, если разбиение семейства $\mathcal{E}(\Lambda)$ на группы осуществить так, чтобы выполнялось следующее: группы U_m лежат в ограниченных областях (каждая в своей), на границах которых оценки снизу и сверху на модуль характеристической функции асимптотически совпадают. Таким образом, удалось существенно уменьшить размеры групп и перейти к так называемым «относительно малым» группам. А. С. Кривошеев показал, что линейные комбинации элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ внутри относительно малых групп $\mathcal{E}_m$ обладают свойствами схожими со свойствами экспоненциальных функций. Поэтому представления по таким линейным комбинациям наиболее предпочтительны. В работах Р. Мейзе, В.В. Напалкова и А.С. Кривошеева в областях $D = G + K$ для решений однородного уравнения свертки было получено представление (3), где группы U_m являются относительно малыми. На характеристическую функцию f накладывались условия медленного убывания и регулярности роста. Эти условия обеспечивают наличие необходимого разбиения системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ и подходящих оценок снизу на $|f|$. При этом удалось получить больше чем просто представление (3). Было доказано, что внутри каждой группы $\mathcal{E}_m$ существует фиксированный набор линейных комбинаций такой, что в совокупности все эти наборы образуют базис в пространстве решений, но подобный набор предъявлен не был.

Особо отметим случай, когда плотность $n(\Lambda) = 0$. Д. Полиа в 1929 г. доказал, что каждое аналитическое решение уравнения свертки с характеристической функцией f минимального типа имеет выпуклую область существования. Валирон в 1929 г. доказал, что каждое аналитическое решение указанного уравнения в области своего существования представляется в виде (3), где U_m – группа всех нулей λ_k функции f из кольца $r_m \leq |\lambda| < r_{m+1}$.

В связи с представлением (3) естественным образом возникает задача о переходе от такого представления в виде ряда «со скобками» к представлению рядом (2), где участвуют фиксированные линейные комбинации элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, которые образуют базис в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Эта задача называется проблемой существования базиса в инвариантном подпространстве. Если он существует, то возникает еще целый ряд вопросов. Каковы условия его существования. Как осуществить разбиение U и можно ли описать все подходящие разбиения. Как составлять линейные комбинации внутри группы и можно ли описать все подходящие комбинации. Насколько малым можно сделать диаметр групп U_m, т.е. насколько новый «чистый» ряд будет близок по своим свойствам к (1). Наконец, с каким пространством числовых последовательностей можно отождествить $W(\Lambda, D)$.

Ответы на эти вопросы (за исключением первого и второго) были даны А.С. Кривошеевым в 2010, 2012 гг. В частности, получено следующее. Если в $W(\Lambda, D)$ существует базис, состоящий из линейных комбинаций элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, сформированный по разбиению U на относительно малые группы, то базисом необходимо будет и описанная выше система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. При условии, что эта система является базисом, дается описание всех возможных базисов такого рода. Приводится критерий на последовательность матриц перехода, осуществляющих переход от одного базиса к другому. Также при условии, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом, описано (линейное топологическое) пространство числовых последовательностей (коэффициентов ряда (2)), которое можно отождествить с подпространством $W(\Lambda, D)$. Кроме того, задача о том, когда система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$ сведена к решению специальной двойственной задачи интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа.

В работе [7] А.С. Кривошеевым получены достаточные условия разрешимости этой интерполяционной задачи а, как следствие, и достаточные условия для того, чтобы система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ была базисом в инвариантном подпространстве $W(\Lambda, D)$ в случае произвольной ограниченной выпуклой области D. Эти условия состоят в следующем. Последовательность Λ должна быть частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа и регулярного роста, сопряженный индикатор которой совпадает с замыканием области D, и индекс конденсации $S_\Lambda(U) = 0$ (т.е. Λ совместима с областью D).

Задача описания множества особых точек суммы $g_{\Lambda,a}$ ряда (1) на границе его области сходимости $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ имеет долгую историю. Ее истоки лежат в начатых еще в позапрошлом веке исследованиях областей существования функций, представимых в виде степенных рядов. В 1892г. Ж. Адамар доказал, что если функция g представляется рядом

$$g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w^{n(k)}, \qquad (4)$$

где $n(k+1) - n(k) \geq a n(k)$, $n \geq 1, a > 0$, то граница его круга сходимости является естественной границей области существования функции g, т.е. каждая точка этой границы является особой для g. Э. Фабри в 1896г. доказал, что утверждение Адамара сохраняется при более общем условии на последовательность $\{n(k)\}$. Достаточно чтобы она имела нулевую плотность: $k/n(k) \to 0$. Существенное обобщение этого результата было получено Д. Полиа в 1929 г. Важную роль сыграло введенное им понятие максимальной плотности $n^0(\Lambda)$ последовательности $\Lambda = \{n(k), 1\}$ положительных чисел. Он показал, что при условии $n^0(\Lambda) < \infty$, сумма ряда (5), сходящегося в единичном круге, на каждой дуге единичной окружности длины $2\pi n^0(\Lambda)$ имеет хотя бы одну особую точку. Позднее В. Фукс и П. Мальявен получили результат обратный к теореме Д. Полиа. Для каждой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$, удовлетворяющей условию $n^0(\Lambda) < \infty$, и каждого $\varepsilon > 0$ был построен ряд (4), сходящийся в единичном круге, сумма которого аналитически продолжается через дугу единичной окружности $\{e^{i\varphi}: |\varphi| < \pi n^0(\Lambda) - \varepsilon\}$.

Д. Полиа, а также Карлсон и Ландау распространили результат Фабри на случай рядов Дирихле. Они показали, что если функция g представляется в виде ряда Дирихле

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k z}, \qquad \lambda_k > 0, \tag{5}$$

и $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$, $k \geq 1$, то либо g – целая функция, либо прямая сходимости (вертикальная прямая, ограничивающая полуплоскость сходимости ряда Дирихле) является естественной границей области существования функции g. Этот результат является частным случаем более общего результата В. Бернштейна. Он доказал, что при условиях

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k} = \tau, \qquad \gamma(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\lambda_k} \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| = 0, \quad L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right),$$

($\gamma(\Lambda)$ – индекс конденсации В. Бернштейна) каждый отрезок длины $2\pi\tau$ прямой сходимости ряда (5) (если таковая имеется) содержит, по крайней мере, одну особую точку функции g. Отметим, что утверждение Бернштейна ранее было доказано Д. Полиа при более сильном ограничении (чем $\gamma(\Lambda) = 0$) на последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$: $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$, $k \geq 1$.

А.Ф. Леонтьев обобщил результаты, полученные Д. Полиа, Э. Фабри и В. Бернштейном, на случай рядов экспонент с последовательностью (простых) показателей, имеющей нулевую плотность. Он доказал, что при этом условии и дополнительном условии $\gamma(\Lambda) = 0$ область сходимости ряда экспонент совпадает с областью существования суммы ряда.

Цели работы. Исследовать условия представления функций из инвариантных подпространств аналитических функций посредством рядов (1) и (2). В связи с представлениями рядами (1) и (2) естественным образом возникают задачи изучения поведения сумм этих рядов. В частности, широко исследуется проблема распределения особых точек суммы ряда (1) и его частных случаев (рядов экспонент, рядов Дирихле и рядов Тейлора). Решение указанных проблем требует глубоких исследований в области сходимости рядов (1) и (2). Возникает целый ряд важных задач, которые тесно связаны с поведением последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ показателей этих рядов. Прежде всего, это задача пополнения последовательности Λ до правильно распределенного множества (т.е. до нулевого множества целой функции экспоненциального типа и регулярного роста), задача разбиения Λ на группы, подходящие для представления рядом (2), изучение самой возможности такого разбиения. Кроме того, значительные роли играют проблема взаимосвязи между характеристиками последовательности Λ и сходимостью рядов (1) и (2), задача о влиянии этих характеристик на соотношение между областями сходимости рядов и областями существования их сумм и др.

Методика исследования. Использованы методы теории рядов экспонент, теории целых функций, методы комплексного и функционального анализа, а также метод построения специальных рядов экспоненциальных мономов.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Получены следующие результаты:

– доказаны аналоги теорем Абеля и Коши-Адамара для рядов (1) и (2);

– найдены критерии представления рядами (1) и (2) функций из замкнутого инвариантного подпространства в ограниченной выпуклой области плоскости;

– получен критерий представления рядом (2) элементов инвариантного подпространства целых функций;

– найден критерий на последовательность Λ, когда область существования суммы любого ряда (1) совпадает с областью его сходимости;

– получен критерий на последовательность Λ, когда каждая сумма ряда Дирихле имеет хотя бы одну особую точку на любом отрезке фиксированной длины, лежащем на прямой сходимости ряда.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные в диссертации результаты и разработанная в ней методика могут быть полезны как в теории целых функций, теории рядов экспонент, так и в смежных областях анализа, таких, как теория аппроксимации в комплексной области, теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка, теории операторов свертки. Они могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Институте математики с ВЦ УФИЦ РАН, Санкт-

Петербургском отделении Математического института имени В.А. Стеклова РАН, Московском, Ростовском, Саратовском, Казанском, Башкирском госуниверситетах а также в других ведущих российских и зарубежных научных центрах.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах Института математики с ВЦ УФИЦ РАН под руководством член-корреспондента Напалкова В.В.; на семинарах в Башкирском государственном университете под руководством доктора физико-математических наук, профессора Юлмухаметова Р.С.; на Международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений» посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего (Москва, 2009 г.); на VI уфимской международной конференции «Комплексный анализ и дифференциальные уравнения» (Уфа, 2011 г.); на XI Международной Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2013 г.); на Международной конференции «Complex Analysis and Related Topics» (Санкт-Петербург, 2014 г.); на Международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения» (Брянск, 2015 г.); на XII Международной Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2015 г.); на IX Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2016 г.); на Международной научно-практической конференции «Современная математика и ее приложения» (Стерлитамак, 2017 г.); на XIII Международной Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2017 г.); на Международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2017 г.); на Международной конференции «Complex Analysis and Related Topics» (Санкт-Петербург, 2018 г.); на 19-ой Международной Саратовской зимней школе, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2018 г.); на Международной конференции «Комплексный анализ и геометрия» (Уфа, 2018 г.); на Международной школе-конференции «комплексный анализ и его приложения» (Геленджик, 2018 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 работ (16 из них опубликованы в журналах из списка ВАК и 1 монография). Из совместных работ [1], [2], [5]-[7], [9]-[11], [13] в диссертацию включены только результаты автора.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на 21 параграф и списка литературы. Объем диссертации составляет 174 страницы. Библиография – 77 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В первой главе изучаются вопросы, связанные с глобальным и локальным распределением по плоскости точек кратной комплексной последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Исследуются различные числовые характеристики Λ и взаимосвязи между ними.

В первом параграфе рассматриваются некоторые известные характеристики Λ и их свойства. Пусть $n(r,\Lambda)$ – число точек λ_k с учетом их кратностей n_k, которые попадают в круг $B(0,r)$. Верхней и нижней плотностью последовательности Λ называются соответственно величины

$$\overline{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r}, \qquad \underline{n}(\Lambda) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Говорят, что Λ имеет плотность $n(\Lambda)$ (измерима), если $\underline{n}(\Lambda) = \overline{n}(\Lambda) = n(\Lambda) < +\infty$. Пусть $\{\xi_p\}_{p=1}^{\infty}$ – неубывающая по модулю последовательность, которая состоит из точек λ_k, причем, каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз. Положим

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\ln p}{|\xi_p|}.$$

Роль характеристики $\sigma(\Lambda)$ раскрывается в следующем утверждении.

Лемма 1.1.1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k e^{-\varepsilon|\lambda_k|}$$

сходится для любого $\varepsilon > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\sigma(\Lambda) = 0$.

Рассматриваются также локальные характеристики Λ. Величина

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}$$

называется относительной кратностью последовательности Λ. Пусть $n_\Lambda(z,\delta)$ – число точек λ_k с учетом их кратностей n_k, попавших в круг $B(z,\delta|z|)$. Положим

$$M_\Lambda(\delta) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_\Lambda(\lambda_k,\delta)}{|\lambda_k|}, \qquad M_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} M_\Lambda(\delta).$$

В лемме 1.1.2 устанавливаются некоторые взаимосвязи между глобальной характеристикой $\overline{n}(\Lambda)$ и величиной M_Λ.

Во втором параграфе рассматривается понятие максимальной плотности $n^0(\Lambda)$, введенное первоначально Д. Полиа в 1929 г. для положительных последовательностей:

$$n^0(\Lambda) = \lim_{\delta\to 0} n^0(\Lambda,\delta), \qquad n^0(\Lambda,\delta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n\big((1-\delta)r,\Lambda\big)}{\delta r}.$$

Теорема Д. Полиа утверждает, что любая последовательность положительных чисел с конечной максимальной плотностью является частью некоторой измеримой последовательности с той же плотностью. В лемме 5 работы [6] А.С. Кривошеевым приводится другое доказательство этой теоремы. Метод построения пополнения, который при этом используется, является более простым, чем метод Д. Полиа. В лемме 1.2.3 этот результат в несколько более общей форме распространяется на комплексные последовательности. При этом используется метод А.С. Кривошеева. На основе этой леммы в теореме 1.2.5 строится правильно распределенное пополнение комплексной последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ с конечной максимальной плотностью в углах

$$\Gamma(\psi,\varphi) = \{\lambda = te^{i\rho} : \rho \in (\psi,\varphi), t \geq 0\},$$

которое согласовано с заданным выпуклым компактом.

Пусть $\Lambda\big(\Gamma(\psi,\varphi)\big)$ – последовательность всех пар (λ_k, n_k), таких, что $\lambda_k \in \Gamma(\psi,\varphi)$. Говорят, что Λ имеет угловую плотность, если для всех ψ,φ за исключением, быть может, счетного множества Φ_Λ последовательность $\Lambda\big(\Gamma(\psi,\varphi)\big)$ имеет плотность. Последовательность Λ называется правильно распределенным множеством, если она имеет угловую плотность и выполнено условие Линделефа, т.е. существует предел

$$\mathcal{N}(\Lambda) = \lim_{r\to\infty} \mathcal{N}(r,\Lambda), \qquad \mathcal{N}(r,\Lambda) = \sum_{|\lambda_k|<r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Пусть T – выпуклый компакт с опорной функцией

$$H_T(\varphi) = \sup_{z\in T} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}), \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

и w, z – точки его границы ∂T. Через $s(w,z,T)$ обозначим длину дуги ∂T, соединяющей w и z, движение по которой от w к z осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки). Положим

$$L(\varphi,T) = \partial T \cap l(\varphi,T), \quad l(\varphi,T) = \{z : \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) = H_T(\varphi)\}$$

Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ множество $L(\varphi,T)$ является либо точкой (которую обозначим $z(\varphi)$) либо отрезком. Множество $\Phi(T)$ направлений φ, для которых $L(\varphi,T)$ – отрезок, не более чем счетное. Пусть

$$S_T(\psi,\varphi) = \sup_{w\in L(\psi,T), z\in L(\varphi,T)} s(w,z,T).$$

В лемме 1.2.4 для последовательности с конечной максимальной плотностью в углах строится пополнение, имеющее угловую плотность. На этой основе доказывается

Теорема 1.2.5. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *и* T *— выпуклый компакт. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Для всех $\psi, \varphi \notin \Phi(T)$ *с условием* $0 < \varphi - \psi < 2\pi$ *выполнено неравенство*

$$n^0\left(\Lambda\big(\Gamma(\psi,\varphi)\big)\right) \le \frac{S_T(\psi,\varphi)}{2\pi}.$$

2) Существует правильно распределенное пополнение Λ^0 *последовательности* Λ *такое, что* $\Phi_{\Lambda^0} = \Phi(T)$ *и*

$$n\left(\Lambda^0\big(\Gamma(\psi,\varphi)\big)\right) = \frac{S_T(\psi,\varphi)}{2\pi}, \qquad \psi, \varphi \notin \Phi(T),\ \ 0 < \varphi - \psi < 2\pi.$$

Пусть Σ — класс неубывающих на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ функций ω, обладающих свойствами: 1) $\omega(0) = 0$, 2) функция ω непрерывна слева, 3) $\omega(\varphi) = \omega(\varphi - 2\pi) - \omega(-2\pi)$, $\varphi \in (0,2\pi)$. Символом $\Phi(\omega)$ обозначим множество точек разрыва функции $\omega \in \Sigma$. Если $\psi, \varphi \in [-2\pi, 2\pi)$ и $\varphi - \psi \in (0,2\pi]$, то ψ, φ будем называть допустимыми значениями. Пусть Λ имеет угловую плотность. Тогда она единственным образом определяет функцию $\omega_\Lambda \in \Sigma$ по правилу:

$$\omega_\Lambda(\psi) = -\lim_{\alpha\to 0} n\left(\Lambda\big(\Gamma(\psi,\alpha)\big)\right), \quad \omega_\Lambda(\varphi) = n\left(\Lambda\big(\Gamma(\psi,\varphi)\big)\right) + \omega_\Lambda(\psi),$$

где $\psi, \alpha \in (-2\pi, 0)\backslash\Phi_\Lambda$, $\varphi \in (\psi, \psi + 2\pi)\backslash\Phi_\Lambda$.

Будем говорить, что Λ имеет угловую плотность $\omega \in \Sigma$, если она имеет угловую плотность и $\omega_\Lambda = \omega$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\psi, \varphi \notin \Phi_\Lambda$ — допустимые значения и $\mathcal{T} = \{\psi_1, \dots, \psi_l\}$ — разбиение (ψ, φ), $\varphi_1 = \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_l = \varphi_2$, $\psi_j \notin \Phi_\Lambda$, $j = \overline{1,l}$. Положим

$$n_0(\psi,\varphi,\Lambda) = \sup_{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^{l-1} n^0\left(\Lambda\left(\Gamma(\psi_j, \psi_{j+1})\right)\right),$$

где супремум берется по всевозможным указанным разбиениям. Отметим, что схожая с $n_0(\psi, \varphi, \Lambda)$ величина введена в работе [6].

Будем говорить, что Λ — *правильная последовательность*, если Φ_Λ является не более чем счетным множеством, и $n_0(\psi, \varphi, \Lambda) < \infty$ для всех допустимых значений $\psi, \varphi \notin \Phi_\Lambda$. Если Λ — правильная последовательность, то положим

$$\omega_\Lambda^0(\psi) = -\lim_{\alpha\to 0} n_0(\psi,\alpha,\Lambda), \quad \omega_\Lambda^0(\varphi) = n_0(\psi,\varphi,\Lambda) + \omega_\Lambda^0(\psi),$$

где $\psi, \alpha \in (-2\pi, 0)\backslash\Phi_\Lambda$, $\varphi \in (\psi, \psi + 2\pi)\backslash\Phi_\Lambda$. Функция ω_Λ^0 единственным образом продолжается до функции из класса Σ, и продолжение не зависит от $\psi \in (-2\pi, 0)\backslash\Phi_\Lambda$.

Пусть T — выпуклый компакт, $\psi, \alpha \in (-2\pi, 0)\backslash\Phi(T)$, $\varphi \in (\psi, \psi + 2\pi)\backslash\Phi(T)$. Положим

$$\omega_T(\psi) = -\lim_{\alpha \to 0} n\Big(\Lambda\big(\Gamma(\psi, \alpha)\big)\Big), \quad \omega_T(\varphi) = S_T(\psi, \varphi) + \omega_T(\psi).$$

Функция ω_T единственным образом продолжается до функции из класса Σ.

Используя ω_Λ^0 и ω_T, теорему 1.2.5 можно сформулировать так.

Теорема 1.2.6. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и T — выпуклый компакт. Эквивалентны утверждения:*

1) Λ — правильная последовательность, и для всех допустимых $\psi, \varphi \notin \Phi(T) \cup \Phi_\Lambda$ выполнено неравенство

$$\omega_\Lambda^0(\varphi) - \omega_\Lambda^0(\psi) \le \frac{\omega_T(\varphi) - \omega_T(\psi)}{2\pi}.$$

2) Существует правильно распределенное пополнение Λ^0 последовательности Λ с угловой плотностью $\omega_T/2\pi$.

Замечание. Из теоремы 1.2.6 следует, что Λ является правильной последовательностью тогда и только тогда, когда она является частью правильно распределенного множества (другими словами, существует ее правильно распределенное пополнение).

Пусть f — целая функция экспоненциального типа и

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}$$

— ее индикатор. Функция h_f совпадает с опорной функцией выпуклого компакта T, который называется индикаторной диаграммой f. Говорят, что f имеет регулярный рост, если

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r \to +\infty, r \notin E}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

где $E \subset (0, +\infty)$ — множество нулевой относительной меры. Согласно классическому результату Б.Я. Левина функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее кратное нулевое множество является правильно распределенным. Последовательность Λ называется *совместимой* с ограниченной выпуклой областью D, если существует целая функция экспоненциального типа и регулярного роста f с нулевым множеством $\Lambda^0 \supset \Lambda$ такая, что

$$h_f(\varphi) = H_D(-\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Лемма 1.2.7. *Пусть D — ограниченная выпуклая область и T — компакт комплексно сопряженный к замыканию $\overline{D}$. Эквивалентны утверждения*

1) Верно утверждение 1) теоремы 1.2.6.

2) Последовательность Λ совместима с областью D.

В §1.3 изучаются индексы конденсации, введенные А.С. Кривошеевым. Пусть $U = \{U_m\}$ – разбиение последовательности $\{\lambda_k\}$ на группы U_m, $m \geq 1$. Точки $\lambda_k \in U_m$ будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности – $n_{m,l}$. Символом $M_m(N_m)$ обозначается число λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в группу U_m. Разбиение U называется тривиальным, если каждая U_m состоит из одной точки. Группы U_m называются относительно малыми, если они имеют относительно малый диаметр, т.е.

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leq j,l\leq M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0,$$

и $N_m/|\lambda_{m,1}| \to 0$. Положим

$$q_{\Lambda,U}^{m,l}(z,\delta) = \prod_{\lambda_{k,v}\in B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|),k\neq m} \left(\frac{z-\lambda_{k,v}}{3\delta|\lambda_{k,v}|}\right)^{n_{k,v}}, \qquad m \geq 1.$$

Если круг $B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|)$ не содержит точек $\lambda_{k,v}$, $k \neq m$, то $q_{\Lambda,U}^{m,l}(z,\delta) \equiv 1$. Для разбиения U определим групповой индекс конденсации

$$S_\Lambda(U) = \lim_{\delta\to 0} S_\Lambda(U,\delta), \qquad S_\Lambda(U,\delta) = \varliminf_{m\to\infty} \min_{1\leq l\leq M_m} \frac{\ln|q_{\Lambda,U}^{m,l}(\lambda_{m,l},\delta)|}{|\lambda_{m,l}|}.$$

Для тривиального разбиения используется символ S_Λ. Величина S_Λ схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна, но при этом эффективна для любой комплексной последовательности. Оценка $S_\Lambda(U) > -\infty$ означает, что группы U_m в каком-то смысле отделены друг от друга. Этот смысл проясняется в теореме 1.3.3, где доказывается существование попарно не пересекающихся открытых множеств $B_m \supset U_m$ относительно малых диаметров таких, что

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\delta(\varepsilon))| \geq (2S_\Lambda(U) - \varepsilon)|z|, \quad z \in \partial B_m \cap B(w,\delta|w|),$$
$$|w| \geq R(\varepsilon).$$

$$q_\Lambda(z,w,\delta) = \prod_{\lambda_k\in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

Лемма 1.3.4 является в некотором смысле обратным к теореме 1.3.3 утверждением.

В §1.4 рассматривается специальный индекс конденсации

$$S_\Lambda^0 = \varliminf_{\delta\to 0} \frac{S_\Lambda(\delta)}{\delta},$$

($S_\Lambda(\delta) = S_\Lambda(U,\delta)$ для тривиального разбиения) который играет решающую роль при исследовании проблемы распределения особых точек для сумм рядов Дирихле (а также более общих рядов).

Будем говорить, что $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – *почти вещественная последовательность*, если $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$ и $\lambda_k/|\lambda_k| \to 1$, $k \to \infty$. Индекс S_Λ^0 играет важную роль для таких последовательностей (в частности, для положительных последовательностей) благодаря следующему утверждению.

Лемма 1.4.1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$ – *почти вещественная последовательность такая, что* $m(\Lambda) = 0$ *и* $S_\Lambda^0 > \infty$. *Тогда* $n^0(\Lambda) < \infty$.

В §1.5 исследуется индекс концентрации S_Λ^1, введенный А.С. Кривошеевым в работе [10] для решения задачи о конечности нижнего индикатора целой функции экспоненциального типа.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\alpha > \delta > 0$. Рассмотрим функцию

$$q_\Lambda^1(z, w, \alpha, \delta) = \prod_{\lambda_s \in B(w,\alpha|w|)\setminus B(w,\delta|w|)} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\alpha|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

Если кольцо $B(\lambda_k, \alpha|\lambda_k|)\setminus B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ не содержит точек λ_s, то полагаем $q_\Lambda^k \equiv 1$. Функция $\ln|q_\Lambda^1(z, w, \alpha, \delta)|$ не положительна в круге $B(w, \alpha|w|)$, $\alpha \in (0, 1/3)$, не возрастает по $\alpha \in (0, 1/3)$ и не убывает по $\delta \in (0, \alpha)$. Положим

$$S_\Lambda^1 = \lim_{\alpha \to 0} S_\Lambda^1(\alpha), \qquad S_\Lambda^1(\alpha) = \lim_{\delta \to 0} \varliminf_{|w| \to \infty} \frac{\ln|q_\Lambda^1(w, w, \alpha, \delta)|}{|w|},$$

$$M_\Lambda^0 = \varlimsup_{\delta \to 0} \frac{M_\Lambda(\delta)}{\delta}, \qquad M_\Lambda^1 = \varliminf_{\delta \to 0} \ln\delta\, M_\Lambda(\delta), \qquad M_\Lambda^2 = \int_0^1 \frac{M_\Lambda(\delta)}{\delta}\, d\delta.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Верны утверждения:*

1) $M_\Lambda^1 \geq S_\Lambda^1(\alpha)$, $\alpha \in (0, 1/3)$;

2) Если $M_\Lambda^2 < \infty$, *то* $S_\Lambda^1 = 0$.

В §1.6 приводятся условия на последовательность Λ, при которых существует ее разбиение U на относительно малые группы такое, что $S_\Lambda(U) > -\infty$ ($S_\Lambda(U) = 0$). Задача существования подобного разбиения (которое необходимо для представления рядом (2)) полностью решается в следующих утверждениях.

Теорема 1.6.2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Верны следующие утверждения*

1) Если $U = \{U_m\}$ – *разбиение* Λ *на относительно малые группы, то* $S_\Lambda^1 \geq 2S_\Lambda(U)$.

2) Если $S_\Lambda^1 > -\infty$, *то существует разбиение* U *на относительно малые группы такое, что* $S_\Lambda(U) \geq 3S_\Lambda^1$.

Следствие 1.6.3. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Эквивалентны следующие утверждения*

1) существует разбиение U на относительно малые группы такое, что $S_\Lambda(U) = 0$.

2) $S_\Lambda^1 = 0$.

В заключительном параграфе первой главы строится пополнение последовательности Λ, которая разбита на группы и имеет конечный групповой индекс конденсации (теорема 1.7.1). Пополнение имеет конечный индекс конденсации и совпадает с нулевым множеством целой функции экспоненциального типа, т.е. имеет конечную верхнюю плотность и удовлетворяет специальному условию Линделефа.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию сходимости рядов (1) и (2). При условиях $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ приводится полный аналог теоремы Абеля для рядов экспоненциальных мономов и, в частности, для рядов экспонент, а также для более общих рядов (2). Показывается, что областью сходимости ряда (1) является выпуклая область специального вида. Доказывается, что поточечная сходимость ряда (1) в этой области эквивалентна его абсолютной сходимости, равномерной сходимости на компактах и даже сходимости в более сильной топологии. Приводится также аналог теоремы Коши-Адамара, который, как частные случаи, содержит все предыдущие подобные результаты для рядов Дирихле и рядов экспонент. Кроме того, исследуется взаимосвязь между различными характеристиками последовательности показателей ряда (1) и областями его сходимости и существования его суммы.

Параграф 2.1 посвящен описанию пространства коэффициентов сходящихся рядов вида (1) и (2). Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$, D – выпуклая область, и $\mathcal{K}_D = \{K_p\}$ – последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее. Положим

$$Q(\Lambda, D) = \bigcap_{p\geq 1} Q_p,$$

$$Q_p(\Lambda) = \left\{a = \{a_{k,n}\}: \|a\|_p = \sup_{k,n} |a_{k,n}| \exp\left(r_k H_{K_p}(-\varphi_k)\right) < \infty\right\}$$

где H_K – опорная функция K. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, Θ – замкнутое подмножество $\partial B(0,1)$. Θ-выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H_E(\varphi), e^{i\varphi} \in \Theta\}.$$

Пусть $\Theta(\Lambda)$ – множество всех частичных пределов последовательности $\{\bar{\lambda}_k/|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty}$. В следующей теореме дается описание пространства коэффициентов рядов (1), сходящихся в выпуклой области D.

Теорема 2.1.5. *Пусть D – выпуклая область, и Λ такова, что* $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. *Тогда эквивалентны утверждения:*

1) Ряд (1) сходится в области D.

2) Имеет место включение $a = \{a_{k,n}\} \in Q(\Lambda, D)$.

Рассмотрим теперь ряд (2), который для простоты запишем в виде

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu e_\nu(z) \qquad (6)$$

Пусть $\Lambda_0 = \{\xi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\xi_\nu = r_\nu e^{i\psi_\nu}$ – комплексные числа такие, что $|\xi_\nu| \to \infty$, $|\xi_\nu| \le |\xi_{\nu+1}|$, и e_ν – целая функция, $\nu \ge 1$. Следуя А.С. Кривошееву, будем говорить, что $\{e_\nu\}$ – *почти экспоненциальная последовательность*, если для любой выпуклой области D выполнены условия:

1) для каждого $p \ge 1$ существуют $a > 0$ и номер s такой, что

$$\max_{z\in K_p}|e_\nu(z)| \le a\exp\left(r_\nu H_{K_s}(-\psi_\nu)\right), \quad \nu \ge 1, \quad \{K_p\} = \mathcal{K}_D;$$

2) для каждого $p \ge 1$ существуют $b > 0$ и номер s такой, что

$$b\exp\left(r_\nu H_{K_p}(-\psi_\nu)\right) \le \max_{z\in K_s}|e_\nu(z)|, \qquad \nu \ge 1.$$

Пусть Λ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}$, $\{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$. Следуя А.С. Кривошееву, положим

$$P_m(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} \frac{e^{\zeta z}\left(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda)\right)}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta, \quad \omega_m(\lambda) = \prod_{l=1}^{M_m}\left(\lambda - \lambda_{m,l}\right)^{n_{m,l}},$$

где Γ_m – контур, охватывающий точки группы U_m. Пусть

$$e_{m,j}(z) = P_m^{(j-1)}\left(\lambda_{m,1}, z\right) = \frac{(j-1)!}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1} \frac{P_m(\lambda, z)d\lambda}{\left(\lambda - \lambda_{m,1}\right)^j}, \quad j = \overline{1, N_m}.$$

Полученную систему функций $\{e_{m,j}\}_{j,m=1}^{N_m,\infty}$ обозначим символом $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. В случае тривиального разбиения система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ совпадает с $\mathcal{E}(\Lambda)$. А.С. Кривошеевым доказывается, что $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ – почти экспоненциальная последовательность. Для рядов (3) (в частности, для рядов (2), где $e_{m,j}$ строятся по относительно малым группам) верен следующий результат.

Лемма 2.1.7. *Пусть $\{e_\nu\}$ – почти экспоненциальная последовательность. Предположим, что общий член ряда (3) ограничен на каждом компакте K открытого множества E, т.е. $|d_\nu e_\nu(z)| \le A(K)$, $\nu \ge 1$, $z \in K$. Тогда $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda_0, D)$, где $D = E(\Theta(\Lambda_0))$.*

В параграфе 2.2 приводятся аналоги теоремы Абеля для рядов (1), (3).

Теорема 2.2.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Предположим, что общий член ряда (1) ограничен на множестве $E \subset \mathbb{C}$. Кроме того, если начало координат является изолированной точкой E,* *то ограничена последовательность* $\{a_{k,n}\}$. *Тогда для каждого* $p \geq 1$ *найдется* $C_p > 0$ *(не зависящее от* d*) такое, что*

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} |a_{k,n}| \sup_{z\in K_p} |z^n e^{\lambda_k z}| \leq C_p \|a\|_{p+2},$$

где $\|a\|_p$ *построены по* $\mathcal{K}_D = \{K_p\}$ *и* $D = E(\Theta(\Lambda))$. *В частности, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на компактах из* D.

Пусть $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ обозначает открытое ядро множества всех точек $z \in \mathbb{C}$, в которых сходится ряд (1), и его сумма является аналитической функцией. Если $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$, то по теореме 2.2.1 $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ является выпуклой областью (возможно пустой). Более того, $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ – это $\Theta(\Lambda)$-выпуклая область (т.е. область вида $\{z: \mathrm{Re}(ze^{-i\psi}) < h(\psi), e^{i\psi} \in \Theta(\Lambda)\}$).

Теорема 2.2.3. *Пусть* $\{e_\nu\}$ – *почти экспоненциальная последовательность,* $\Lambda_0 = \{\xi_\nu\}$, *и* $\sigma(\Lambda_0) = 0$. *Предположим, что общий член ряда (3) ограничен на каждом компакте* K *открытого множества* E. *Тогда для любого* $p \geq 1$ *существуют* $s = s(p)$ *и* $C_p > 0$ *(они не зависят от* d*) такие, что*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu| \max_{z\in K_p} |e_\nu(z)| \leq C_p \|d\|_s,$$

где нормы $\|d\|_s$ *построены по* $\mathcal{K}_D$ *и* $D = E(\Theta(\Lambda_0))$. *В частности, ряд (3) сходится абсолютно и равномерно на компактах из* D.

Пусть $\mathcal{D}_1(\Lambda_0, d)$ – множество точек плоскости, в окрестности каждой из которых ряд (6) сходится равномерно. Если $\sigma(\Lambda_0) = 0$, то из теоремы 2.2.3 следует, что $\mathcal{D}_1(\Lambda_0, d)$ является выпуклой и даже $\Theta(\Lambda_0)$ - выпуклой областью.

В §2.3 получены аналоги теоремы Коши-Адамара для рядов (1), (6).

Пусть $e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)$. Для коэффициентов $a = \{a_{k,n}\}$ ряда (1) положим

$$h(\varphi, a, \Lambda) = \inf \varliminf_{j\to\infty} \min_{0\leq n\leq n_{k(j)}-1} \frac{\ln(1/|a_{k(j),n}|)}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где inf берется по всем $\{\lambda_{k(j)}\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| \to e^{-i\varphi}$. Положим

$$\mathcal{D}_0(a, \Lambda) = \{z: \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < h(\varphi, a, \Lambda), e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)\}.$$

Множество $\mathcal{D}_0(a, \Lambda)$ является $\Theta(\Lambda)$-выпуклой областью.

Теорема 2.3.1. *Пусть последовательность* Λ *такова, что* $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. *Тогда ряд (1) сходится в каждой точке области* $\mathcal{D}_0(a, \Lambda)$ *и расходится в каждой точке ее внешности за исключением, возможно, начала координат.*

Из теоремы 2.3.1 следует, что $\mathcal{D}(\Lambda, a) = \mathcal{D}_0(a, \Lambda)$

Приведем теперь результат, который является аналогом теоремы Коши-Адамара для ряда (3). Пусть $\xi \in \Theta(\Lambda_0)$ и

$$h(\varphi, d, \Lambda_0) = \inf \varliminf_{j\to\infty} \frac{\ln\left(1/\left|d_{k(j)}\right|\right)}{\left|\lambda_{k(j)}\right|},$$

где inf берется по всем $\{\lambda_{k(j)}\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/\left|\lambda_{k(j)}\right| \to e^{-i\varphi}$. Положим

$$\mathcal{D}_0(d, \Lambda_0) = \{z\colon \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < h(\varphi, d, \Lambda), e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda_0)\}.$$

Как и выше, $\mathcal{D}_0(d, \Lambda_0)$ – $\Theta(\Lambda_0)$-выпуклая область.

Теорема 2.3.2. *Пусть $\{e_\nu\}$ – почти экспоненциальная последовательность, $\Lambda_0 = \{\xi_\nu\}$, и $\sigma(\Lambda_0) = 0$. Тогда $\mathcal{D}_1(\Lambda_0, d) = \mathcal{D}_0(d, \Lambda_0)$.*

В § 2.4 приводятся формулы для коэффициентов сходящегося ряда (1), которые основаны на интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева.

В §§ 2.5-2.7 изучается влияние характеристик последовательности Λ на соотношение между областью сходимости ряда (1) ((2)) и областью существования его суммы. Полученные здесь результаты играют важную роль для исследований в остальных главах диссертации. Они позволяют провести полное исследование необходимых условий представления рядами (1) и (2) функций из инвариантных подпространств. Кроме того, эти результаты позволяют решить целый ряд задач, возникающих при исследовании проблемы распределения особых точек для сумм этих рядов на границах их областей сходимости. В этой связи получены, в частности, следующие результаты.

Символами $g_{\Lambda,a}$ и $\mathfrak{A}(\Lambda)$ обозначим соответственно сумму ряда (1) и совокупность всех последовательностей коэффициентов $a = \{a_{k,n}\}$ этого ряда, для которых $\mathcal{D}(\Lambda, a) \neq \emptyset$. Положим

$$D_\beta(\Theta(\Lambda)) = \{z\colon \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H_D(\varphi) + \beta, e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)\}.$$

Теорема 2.5.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $m(\Lambda) = 0$, и существует подпоследовательность $\Lambda_1 = \{\lambda_{k(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ такая, что*

$$\varlimsup_{p\to\infty} \frac{\ln\left|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)\right|}{\left|\lambda_{k(p)}\right|} \le -\beta < 0,$$

где $(0,1/4) \ni \delta_1 \ge \dots \ge \delta_p \to 0, p \to \infty$. Тогда для каждой ограниченной выпуклой области D найдется последовательность $a \in \mathfrak{A}(\Lambda)$ такая, что $\mathcal{D}(\Lambda, a) = D(\Theta(\Lambda_1))$ и $g_{\Lambda,a} \in H\left(D_\beta(\Theta(\Lambda_1))\right)$.

Если $S_\Lambda \le -\beta$, то в силу определения S_Λ найдется подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}$, для которой верно неравенство из теоремы.

Теорема 2.5.3. *Пусть $U = \{U_m\}$ – разбиение $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ на относительно малые группы. Предположим, что $S_\Lambda(U) = -\infty$. Тогда* *существуют* $\{a_{k,n}\}$ *и номера* $s(j)\ (s(j+1) > s(j))$ *такие, что последовательность*

$$\sum_{m=1}^{s(j)} \sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad j \geq 1,$$

сходится равномерно на компактах в плоскости, а ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z} \right)$$

расходится в каждой точке плоскости.

Пусть D — выпуклая область. Положим

$$J(D) = \{e^{i\varphi} : H_D(\varphi) = +\infty\}.$$

Теорема 2.7.1. *Пусть D – выпуклая область такая, что* $1 \in \operatorname{int}(\partial B(0,1) \backslash J(D))$, $H_D(0) \leq 0$, *и* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – *почти вещественная последовательность. Предположим, что* $m(\Lambda) \neq 0$. *Тогда существуют числа* $\{a_{k,n}\}$ *такие, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z} \right)$$

сходится равномерно на компактах в области D, а ряд (1) расходится в каждой точке некоторой области $D_0 \subset D$.

Теорема 2.7.2. *Пусть D – выпуклая область такая, что* $1 \in \operatorname{int}(\partial B(0,1) \backslash J(D))$, $H_D(0) > 0$, *и* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – *почти вещественная последовательность. Предположим, что* $m(\Lambda) \neq 0$. *Тогда существуют числа* $\{a_{k,n}\}$ *такие, что ряд из теоремы 2.7.1 сходится равномерно на компактах в области D, а ряд (1) расходится в каждой точке некоторой области* $D_0 = \{z : \operatorname{Re} z > \alpha\} \cap D \neq \emptyset$ *и сходится равномерно на компактах в области* $\Gamma_0 = \{z : \operatorname{Re} z < -3\} \cap \Gamma(3\pi/4, 5\pi/4)$.

В третьей главе диссертации исследуется проблема представления функций из инвариантных подпространств. Доказывается, что достаточные условия А.С. Кривошеева [7] являются также и необходимыми для существования базиса в инвариантном подпространстве. Вместе с результатом о пополнении правильной последовательности до правильно распределенного множества из первой главы это дает полное решение проблемы существования базиса в подпространстве $W(\Lambda, D)$ в случае произвольной ограниченной выпуклой области D. Критерий существования базиса формулируется только в терминах характеристик последовательности Λ (групповой индекс конденсации и максимальная плотность в углах) и длины дуги границы ∂D.

На основе теорем 2.7.1 и 2.7.2 доказывается необходимость равенства $m(\Lambda) = 0$ для справедливости фундаментального принципа в $W(\Lambda, D)$ в случае произвольной ограниченной выпуклой области D. Это позволяет получить полное решение проблемы фундаментального принципа в этом случае. Оно формулируется лишь при помощи тех же простых геометрических характеристик последовательности Λ и области D.

Получен также критерий существования базиса, сформированного по разбиению U последовательности Λ на относительно малые группы, в инвариантном подпространстве целых функций. Он состоит всего лишь из одного условия: $S_\Lambda(U) > -\infty$. Необходимость этого условия устанавливается на основе теоремы 2.5.3. Достаточность этого условия для представления функций $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ рядом (2) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ доказывается при помощи интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева. Таким образом, в этом случае удается обойти решение сложной двойственной интерполяционной задачи А.С. Кривошеева. Отметим, что особую роль для указанного представления, безусловно, играет теорема 1.6.2, где изучается возможность подходящего разбиения последовательности Λ. В ней получен критерий существования разбиения U на относительно малые группы такого, что $S_\Lambda(U) > -\infty$.

Отдельно в главе 3 рассматривается случай нулевой плотности. Доказано, что в этом случае все функции из инвариантного подпространства имеют выпуклую область существования и представляются в ней рядом (2).

В §3.1 изучаются инвариантные подпространства в ограниченной выпуклой области D. Получены необходимые условия представления функций из подпространства $W(\Lambda, D)$ посредством рядов (2) и (1).

Лемма 3.1.4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, U — разбиение Λ на относительно малые группы. Предположим, что каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (2) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, и ряд сходится равномерно на компактах в D. Тогда $S_\Lambda(U) = 0$.*

Лемма 3.1.5. *Пусть D — ограниченная выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $U = \{U_m\}$ — разбиение Λ на относительно малые группы. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (2) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, и ряд сходится равномерно на компактах в D. Тогда последовательность Λ совместима с областью D.*

Эти условия и результаты А.С. Кривошеева [7], а также теорема 1.2.6 позволяют получить следующий критерий представления функций из подпространства $W(\Lambda, D)$.

Теорема 3.1.6. *Пусть D — ограниченная выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $U = \{U_m\}$ — разбиение Λ на относительно малые группы. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Тогда эквивалентны утверждения*

1) Каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (2) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, и ряд сходится равномерно на компактах в D.

2) $S_\Lambda(U) = 0$, Λ — правильная последовательность, и для всех допустимых $\psi, \varphi \notin \Phi(T) \cup \Phi_\Lambda$ выполнено неравенство

$$\omega_\Lambda^0(\varphi) - \omega_\Lambda^0(\psi) \le \frac{\omega_T(\varphi) - \omega_T(\psi)}{2\pi},$$

где T — компакт комплексно сопряженный к замыканию $\overline{D}$.

3) Последовательность Λ совместима с областью D и $S_\Lambda(U) = 0$.

Этот результат содержит в себе как частные случаи все результаты, указанные выше, для случая ограниченных выпуклых областей.

В связи с теоремой 3.1.6 возникает естественный вопрос о существовании требуемого там разбиения. Ответ на этот вопрос дается при помощи следствия 1.6.4.

Теорема 3.1.7. *Пусть D — ограниченная выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$,. Предположим, что $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда эквивалентны утверждения*

1) Существует разбиение U последовательности Λ на относительно малые группы такое, что каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (2) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, и ряд сходится равномерно на компактах в области D.

2) Λ — правильная последовательность, и для всех допустимых $\psi, \varphi \notin \Phi(T) \cup \Phi_\Lambda$ выполнено неравенство

$$\omega_\Lambda^0(\varphi) - \omega_\Lambda^0(\psi) \le \frac{\omega_T(\varphi) - \omega_T(\psi)}{2\pi},$$

где T — компакт комплексно сопряженный к замыканию $\overline{D}$.

3) Последовательность Λ совместима с областью D.

В случае тривиального разбиения условие относительной малости групп U_m равносильно условию $m(\Lambda) = 0$. В этом случае теорема 3.1.6 верна и без дополнительного ограничения $m(\Lambda) = 0$, что подтверждается следующим утверждением, доказательство которого основано на теоремах 2.7.1 и .2.7.2.

Лемма 3.1.10. *Пусть D – ограниченная выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, U – тривиальное разбиение Λ. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Тогда каждое утверждение теоремы 3.1.6 влечет за собой равенство $m(\Lambda) = 0$.*

Это утверждение позволяет получить следующий результат.

Теорема 3.1.11. *Пусть D – ограниченная выпуклая область, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Тогда эквивалентны утверждения*

1) Каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1), который сходится равномерно на компактах в области D.

2) $S_\Lambda = 0$, Λ – правильная последовательность, и для всех допустимых $\psi, \varphi \notin \Phi(T) \cup \Phi_\Lambda$ выполнено неравенство

$$\omega_\Lambda^0(\varphi) - \omega_\Lambda^0(\psi) \le \frac{\omega_T(\varphi) - \omega_T(\psi)}{2\pi},$$

где T – компакт комплексно сопряженный к замыканию $\overline{D}$.

3) Последовательность Λ совместима с областью D и $S_\Lambda = 0$.

При дополнительном условии $m(\Lambda) = 0$ эквивалентность утверждений 1) и 3) доказана ранее А.С. Кривошеевым. В отличие от утверждения 3) (в котором неявно присутствует «посредник» – целая функция экспоненциального) утверждение 2) дает критерий фундаментального принципа, оперирующий только простыми геометрическими характеристиками последовательности Λ и области D.

В §3.2 исследуются условия представления функций из $W(\Lambda, \mathbb{C})$ в виде ряда (2) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. При этом используется интерполирующая функция А.Ф. Леонтьева. Получен критерий представления.

Теорема 3.2.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$, $U = \{U_m\}$ – разбиение Λ на относительно малые группы. Эквивалентны следующие утверждения:*

1) $S_\Lambda(U) > -\infty$;

2) Каждая функция $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ представляется рядом (2) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, который сходится равномерно на компактах в плоскости.

Сформулируем теорему 3.2.3 в случае тривиального разбиения – критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств целых функций.

Следствие 3.2.4. *Пусть $\overline{n}(\Lambda) < \infty$. Эквивалентны утверждения:*

1) $S_\Lambda > -\infty$;

2) Каждая функция $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ представляется рядом (1), который сходится равномерно на компактах в плоскости.

Ранее этот результат методом решения двойственной интерполяционной задачи был получен А.С. Кривошеевым. Частными случаями теоремы 3.2.3 являются указанные выше результаты А.О. Гельфонда и А.Ф. Леонтьева, относящиеся к инвариантным подпространствам целых функций.

В связи с теоремой 3.2.3 естественным образом возникает вопрос об условиях существования разбиения U на относительно малые группы со свойством $S_\Lambda(U) > -\infty$. Ответ на этот вопрос дается в теореме 1.6.2. Непосредственно из нее и теоремы 3.2.3 получаем следующий результат.

Теорема 3.2.5. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *и* $\overline{n}(\Lambda) < \infty$. *Эквивалентны утверждения:*

1) $S_\Lambda^1 > -\infty$;

2) Существует разбиение U *последовательности* Λ *на относительно малые группы такое, что каждая функция* $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ *представляется рядом (2) по системе* $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, *и он сходится равномерно на компактах в плоскости.*

Пусть в теореме 3.2.5 Λ – нулевое множество целой функции экспоненциального типа f. Этот случай реализуется, когда подпространство $W(\Lambda, \mathbb{C})$ является пространством решений однородного уравнения свертки с характеристической функцией f. В этой ситуации имеется еще одно утверждение эквивалентное утверждениям 1) и 2) из теоремы 3.2.5. Согласно результату А.С. Кривошеева из работы [10] (критерий конечности нижнего индикатора $\underline{h}_f$ целой функции) таким утверждением будет следующее: существует $a > 0$ такое, что $\underline{h}_f(\varphi) \geq a$, $\varphi \in [0,2\pi]$.

В § 3.3 рассматриваются инвариантные подпространства со спектром нулевой плотности. Пусть $a \in \mathbb{C}$. Положим:

$$W(\Lambda, a) = \bigcup_{D \ni a} W(\Lambda, D),$$

где D пробегает множество всех выпуклых окрестностей точки a. Пусть U – разбиение последовательности Λ на относительно малые группы, и $a \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}\}$ является базисом в пространстве $W(\Lambda, a)$, если каждый его элемент g единственным образом раскладывается в ряд (2), который сходится равномерно на компактах из области существования функции g.

Получены следующие результаты.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) = 0$, *и* $U = \{U_m\}$ – *разбиение* Λ *на относительно малые группы. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ *является базисом в подпространстве* $W(\Lambda, a)$;

2) $S_\Lambda(U) = 0$.

Теорема 3.3.3. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *и* Λ *такова, что* $\overline{n}(\Lambda) = 0$. *Тогда существует разбиение* U *последовательности* Λ *на относительно малые группы такое, что* $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ *является базисом в пространстве* $W(\Lambda, a)$.

Теорема 3.3.3 усиливает указанный выше результат Валирона.

Теорема 3.3.4. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *и* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Эквивалентны утверждения:*

1) каждая функция из пространства $W(\Lambda, a)$ *имеет выпуклую область существования;*

2) $\overline{n}(\Lambda) = 0$.

Эта теорема содержит в себе отмеченные выше результаты Д. Полиа.

В случае тривиального разбиения согласно теореме 3.3.2 получаем следующее решение проблемы фундаментального принципа для пространства $W(\Lambda, a)$.

Теорема 3.3.5. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *и* Λ *такова, что* $\overline{n}(\Lambda) = 0$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\mathcal{E}(\Lambda)$ *является базисом в пространстве* $W(\Lambda, a)$;

2) $S_\Lambda = 0$.

В последней главе изучается проблема распределения особых точек функции $g_{\Lambda,a}$ на границе $\partial\mathcal{D}(\Lambda, a)$ области сходимости ряда (1).

Во второй главе показывается, что в общем случае множество $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ может быть не выпуклым и не является даже связным. Однако, если выполнены условия $m(\Lambda) = \sigma(\Lambda) = 0$, то по теореме 2.3.1 (теореме Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов) $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ будет $\Theta(\Lambda)$-выпуклой областью (возможно пустой), которая описывается при помощи коэффициентов $\{a_{k,n}\}$. В этом случае $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ совпадает с областью $\mathcal{D}_0(a, \Lambda)$. Более того, при этих же условиях по теореме 2.2.1 (теореме Абеля для рядов экспоненциальных мономов) ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте области $\mathcal{D}(\Lambda, a) = \mathcal{D}_0(a, \Lambda)$. В частности, это означает, что его сумма $g_{\Lambda,a}$ есть аналитическая функция в $\mathcal{D}(\Lambda, a)$.

В § 4.1 изучается влияние характеристик последовательности Λ на наличие особых точек суммы ряда (1) на границе его области сходимости. В теоремах 4.1.1 - 4.1.4 показывается, что наличие особых точек у всех функций семейства $\{g_{\Lambda,a}\}$ на дугах границ областей сходимости их рядов возможно лишь в случае, когда Λ – правильная последовательность и $S_\Lambda = 0$. В этой связи выделяется класс последовательностей, которые обладают этими двумя свойствами. Последовательности из этого класса называются *сбалансированными*.

В § 4.2 изучаются условия, при которых каждая сумма ряда (1) (последовательность показателей которого сбалансирована) с областью сходимости $D = \mathcal{D}(\Lambda, a)$ имеет хотя бы одну особую точку на заданной дуге границы этой области. Получены достаточные условия (теоремы 4.2.1, 4.2.2), которые формулируются в терминах простых геометрических характеристик последовательности Λ и области D.

Результаты, полученные в первых двух параграфах главы, служат основой для исследований в оставшихся двух параграфах диссертации.

В §4.3 изучаются условия на последовательность Λ, при которых область существования суммы ряда (1) совпадает с его областью сходимости. Получен следующий результат.

Теорема 4.3.1. *Пусть Λ — сбалансированная последовательность, D — выпуклая область, последовательность $a = \{a_{k,n}\}$ такова, что $\mathcal{D}(\Lambda, a) = D$. Предположим, что функция ω_Λ^0 непрерывна (т.е. $\Phi_\Lambda = \emptyset$), а функция $\omega_\Omega - 2\pi\omega_\Lambda^0$ строго возрастает, где Ω — комплексно сопряженная к D область. Тогда область сходимости $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ ряда (1) совпадает с областью существования его суммы $g_{\Lambda,a}$.*

Основным результатом параграфа является следующий результат. В нем приводятся необходимые и достаточные условия (критерий) на последовательность Λ,при которых область существования каждой суммы ряда (1) совпадает с областью его сходимости.

Теорема 4.3.4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Эквивалентны следующие утверждения.*

1) Область существования суммы каждого ряда (1) совпадает с областью $\mathcal{D}(\Lambda, a)$.

2) $n(\Lambda) = \mathcal{S}_\Lambda = 0$.

Частным случаем теоремы 4.3.4 является указанный выше результат А.Ф. Леонтьева для рядов экспонент с последовательностью (простых) показателей, имеющей нулевую плотность.

В заключительном параграфе диссертации исследуется проблема распределения особых точек суммы ряда Дирихле на его прямой сходимости. Основным результатом параграфа является следующее утверждение (оно является частным случаем более общей теоремы 4.4.1).

Теорема 4.4.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$, $\{\lambda_k\}$ — положительная последовательность, и $\rho \geq 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая сумма ряда Дирихле (5) с нетривиальной областью сходимости (т.е. отличной от плоскости и пустого множества) на любом отрезке длиной $2\pi\rho$ прямой сходимости имеет хотя бы одну особую точку.

2) $\mathcal{S}_\Lambda = 0$ и $n^0(\Lambda) \leq \rho$.

Частными случаями теоремы 4.4.2 являются все указанные выше результаты, связанные с особыми точками сумм рядов Тейлора и Дирихле.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

[1] Кривошеева, О.А. Целые *функции экспоненциального типа. Ряды Дирихле* / Кривошеева О.А., Кривошеев А.С., Абдулнагимов А.И. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. – 196 с.

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[2] Напалков, В.В. *Теоремы Абеля и Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов* / В.В.Напалков, О.А. Кривошеева // Докл. РАН. – 2010. – Т. 432. – №5. – С. 18–20.

[3] Кривошеева, О.А. *Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости* // Алгебра и анализ. – 2011. – Т.23. – №2. – С. 162–205.

[4] Кривошеева, О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимск. матем. журн. – 2011. – Т.3. – №2. – С. 43–56.

[5] Кривошеева, О.А. *Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* / О.А.Кривошеева, А.С. Кривошеев // Функц. анализ и его прил. – 2012. – Т.46. – №4. – С. 14–30.

[6] Кривошеев, А.С. *Замкнутость множества сумм рядов Дирихле* / А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева // Уфимск. матем. журн. – 2013. – Т.5. – №3. – С. 96–120.

[7] Кривошеев, А.С. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* / А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева // Матем. сб. – 2013. – Т.204. – №12. – С. 49–104.

[8] Кривошеева, О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных многочленов* // Уфимск. матем. журн. – 2013. – Т.5. – №4. – С. 84–90.

[9] Кривошеева, О.А. *Особые точки суммы ряда Дирихле на прямой сходимости* / О.А. Кривошеева, А.С. Кривошеев // Функц. анализ и его прил. – 2015. – Т.49. – №2. – С. 54–69.

[10] Кривошеев, А.С. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций* / А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева // Алгебра и анализ. – 2015. – Т.27. – №2. – С. 132–195.

[11] Кривошеев, А.С. *Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве* / А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №5. – С. 684–697.

[12] Кривошеева, О.А. *Инвариантные подпространства со спектром нулевой плотности* // Уфимск. матем. журн. – 2017. – Т.9. – №3. – С. 102–110.

[13] Кривошеева, О.А. *Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром* / О.А. Кривошеева, А.С. Кривошеев // Алгебра и анализ – 2017. – Т.29. – №4. – С. 82–139.

[14] Кривошеева, О.А. *Построение некоторых специальных целых функций* // Вестник Башкирского университета. – 2016. – Т.21. – №4. – С. 848–858.

[15] Кривошеева, О.А. *Числовые характеристики комплексной последовательности* // Вестник Башкирского университета. – 2017. – Т.22. – №3. – С. 613–621.

[16] Кривошеева, О.А. *Распределение особых точек суммы ряда экспоненциальных мономов на границе его области сходимости* // Вестник Башкирского университета. – 2017. – Т.22. – №4. – С. 916–924.

[17] Кривошеева, О.А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Уфимск. матем. журн. – 2018. – Т.10. – №2. – С. 57–75.

Кривошеева Олеся Александровна

РЯДЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Специальность 01.01.01 –
вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 24.07.2018 г. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 1,84. Уч.-изд. л. 1,92.
Тираж 100 экз. Заказ 301.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.