

На правах рукописи

Хасанова Энже Назиповна

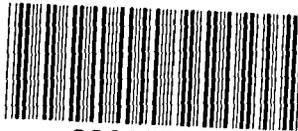
**Некоторые особые случаи краевой задачи
Гильберта**

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

31 МАЙ 2017



006657028

Казань – 2017

Работа выполнена на кафедре высшей математики Казанского государственного архитектурно - строительного университета.

- Научный руководитель: **Шабалин Павел Леонидович**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
КГАСУ.
- Официальные оппоненты: **Клячич Владимир Александрович**
доктор физико-математических наук,
зав. кафедрой компьютерных наук и экс-
периментальной математики ВолГУ,
Миронова Светлана Рафаиловна
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической и
прикладной механики и математики
КНИТУ-КАИ.
- Ведущая организация: ФГБУИ Институт математики с вы-
числительным центром Уфимского науч-
ного центра Российской академии наук.

Защита состоится 29 июня 2017 в 13 ч. 30 мин. на заседании диссертаци-
онного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном уни-
верситете, по адресу: 420008 г. Казань, ул. Кремлевская 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке К(П)ФУ, по
адресу: 420008 г. Казань, ул. Кремлевская 35. Электронная версия диссертации
размещена на сайте К(П)ФУ http://kpfu.ru/dis_card?p_id=2373.

Автореферат разослан «_____» _____ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д212.081.10,
кандидат физ.-мат. наук, доцент

 **Е.К. Липачев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Классическая краевая задача Гильберта в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ состоит в отыскании аналитической в верхней полуплоскости D функции $F(z)$ по граничному условию

$$a(t)\Re F(t) - b(t)\Im F(t) = c(t), \quad t \in L,$$

где $a(t)$, $b(t)$ — это вещественнозначные функции вещественной оси L , которые удовлетворяют условию $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$. Для решения этой задачи Ф.Д. Гахов создал метод регуляризующего множителя, который наряду с методом Н.И. Мухелишвили, является основным инструментом решения задачи Гильберта.

Важную роль в исследовании существования решений играет индекс задачи κ , который определяется, как индекс функции $G(t) = a(t) - ib(t)$. В терминах индекса κ , можно описать картину разрешимости краевой задачи Гильберта.

Развитие теории краевых задач проходило при ослаблении ограничений на контур и коэффициенты краевого условия. Результаты в этом направлении получали Ф.Д. Гахов, Э.И. Зверович, Г.С. Литвинчук, Н.И. Мухелишвили, Ю.В. Обносов, В.С. Рогожин, Р.Б. Салимов, Ю.И. Черский, Л.И. Чибрикова. В случаях, когда можно было подсчитать индекс задачи, авторы получали классическую картину разрешимости. Интересным оказался вопрос исследования задач, для случая, когда вычислить индекс не удается.

Результаты по решению краевых задач с бесконечным индексом появились в начале 60-х годов XX века. Развитие теории краевых задач с бесконечным индексом началось с исследований Н.В. Говорова и развивалось работами А.Г. Алехно, Ф.Н. Гарифьянова, Б.А. Каца, И.В. Островского, В.Н. Монахова и Е.В. Семенко, И.Е. Сандрыгайло, М.Э. Толочко, П.Г. Юрова.

Впервые краевую задачу Гильберта с бесконечным индексом степенно-го порядка меньше единицы для полуплоскости с непрерывными на произ-

вольном конечном интервале вещественной оси коэффициентами рассмотрел И.Е. Сандрыгайло ¹, П.Ю. Алекна ² изучил задачу Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка. Решения этих задач были получены методом Н.И. Мухелишвили. Исследование краевых задач с многосторонним завихрением на бесконечности получено в работе ³.

Для случая бесконечного индекса степенного типа Р.Б. Салимовым и П.Л. Шабалиным разработана модификация метода Ф.Д. Гахова, которая основана на аналитическом выделении в явном виде особенностей краевого условия. Более прозрачная формула общего решения, которую получили Р.Б. Салимов и П.Л. Шабалин, позволила выделить случай единственности решения, в упомянутой работе И.Е. Сандрыгайло об этом не было сказано. Дальнейшее развитие метода регуляризирующего множителя, допустило использовать этот подход при исследовании разрешимости задачи Гильберта со степенной особенностью индекса на бесконечности и счетным множеством точек разрыва первого рода у коэффициентов краевого условия ⁴.

Асимптотические формулы П.Г. Юрова ⁵ позволили использовать этот метод и для решения задачи с логарифмическими особенностями индекса ^{6, 7}.

Однако, краевая задача Гильберта с бесконечным индексом для полуплос-

¹ Сандрыгайло И.Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1974. – № 6. – С. 16-23.

² Алекна П.Ю. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости. – Лит. мат. сб. – 1977. – № 1. – С. 5-12.

³ Алехло А.Г., Севрук А.Б. *Вестник Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Кулішова. Серыя В. Прыродазнаўчая навука: матэматыка, фізіка, біялогія.* – 2012. – № 2 (40). – С. 22-35.

⁴ Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка меньше $1/2$. – Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5. – №2 – с. 82-93.

⁵ П.Г. Юров Асимптотические оценки целых функций, заданных каноническими произведениями. – Труды Тбилисского математического института. – 1971. – №10:6. – с. 641-648.

⁶ Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. О разрешимости однородной задачи Гильберта с разрывами коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности логарифмического порядка. – Изв. вузов. Матем. – 2016. – №1. – с.36 –48.

⁷ Karabasheva, E. N., Shabalin P. L. Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices. – Lobachevskii Journal of Mathematics – 2015. – № 36(2) – С. 144 - 153.

кости не исследована полностью. В частности, не были изучены задача с двусторонним разного степенного порядка завихрением на бесконечности и задача со счетным множеством точек разрыва первого рода и двусторонним разного степенного порядка завихрением на бесконечности. В первой главе диссертации автором приводится решение и анализ разрешимости задачи в перечисленных выше случаях ограничений на коэффициенты краевого условия.

Известно, что решение краевой задачи Гильберта может быть использовано для построения структурной формулы Кристоффеля-Шварца. Можно рассматривать задачу Кристоффеля-Шварца, считая прообразы вершин и углы при неизвестных вершинах заданными. Впервые задачу об отображении полуплоскости на многоугольник с заданными углами при неизвестных вершинах рассмотрел М.А. Лаврентьев ⁸.

На пути применения решения краевой задачи Гильберта для построения конформного отображения верхней полуплоскости на полигональные области в случае бесконечного числа вершин, были рассмотрены задачи с различными особенностями коэффициентов ^{9, 10, 11}.

Для задач этого типа корректен вопрос, всегда ли среди таких отображений есть однолистные? Ответом на этот вопрос, который поставил Каплан ¹², послужила работа Ф.Г. Авхадиева, Л.А. Аксентьева, Г.Г. Бильченко ¹³, в которой исследовалась задача об отображении полуплоскости на многоугольник

⁸ Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука. – 1966. – 736 с.

⁹ Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Обратная задача М.А. Лаврентьева об отображении полуплоскости на многоугольник в случае бесконечного числа вершин. – Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 10. – С. 23-31.

¹⁰ Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Одно обобщение формулы Шварца-Кристоффеля. Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 109-117.

¹¹ Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин – Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 10. – С. 76-80.

¹² W. Kaplan Convexity and the Schwarz-Cristophel mapping – Michigan Math. J. – 1993. – Vol. 40. – № 2. – P. 217-227.

¹³ Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев, Г.Г. Бильченко Классы однолистных и многолистных интегралов Кристоффеля-Шварца и их приложения – Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 3. – С. 64-67.

с заданными углами при неизвестных вершинах для конечного числа вершин многоугольника. Важно отметить, что однолиственность конформных отображений на полигональные области со счетным множеством вершин впервые была рассмотрена в упомянутой работе Э.Н. Карабашевой и П.Л. Шабалина.

Цели и задачи диссертационной работы

Цель диссертационной работы заключается в развитии теории краевой задачи Гильберта для аналитических функций с сильными особенностями коэффициентов; разработке подходов к построению структурных формул конформного отображения на некоторые полигональные области, используя решение задачи Гильберта в случае логарифмического завихрения коэффициентов на бесконечности; исследовании однолиственности построенных конформных отображений. В связи с перечисленными целями настоящей диссертации можно выделить следующие задачи:

– Построить формулы общего решения для краевой задачи Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞ , приводящий к двустороннему степенному разного порядка завихрению на бесконечности.

– Исследовать задачу Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞ . Получить необходимые и достаточные условия, при которых задача имеет решения.

– Построить формулы общего решения для краевой задачи Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞ , приводящий к двустороннему разного порядка степенному завихрению на бесконечности, и когда $\arg G(t)$ испытывает конечный скачок в бесконечном числе точек контура L .

– Исследовать краевую задачу Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞ , и когда $\arg G(t)$ испытывает конечный скачок в бесконечном числе точек контура L . Получить необходимые и достаточные условия, при которых задача имеет решения.

– Построить формулу конформного отображения полуплоскости $\Im z > 0$ на полигональную область с бесконечным числом вершин и вращением кас-

тельной в окрестности ∞ вида $O(\ln^\alpha(t))$.

– Установить существование однолистных отображений среди построенных. Выяснить условия, без которых однолистных отображений среди построенных и заданных структурной формулой не будет, и условия, при соблюдении которых будут существовать однолистные отображения.

Научная новизна

Представленные в настоящей диссертации результаты обобщают классические задачи теории функций комплексного переменного на нерассмотренные ранее случаи. Впервые решена неоднородная задача Гильберта с двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности, сформулированы и доказаны теоремы, описывающие картину разрешимости однородной и неоднородной задач в данной формулировке. Впервые получена формула конформного отображения, обобщающая формулу Кристоффеля-Шварца на случай счетного множества вершин и бесконечного, при обходе границы области, вращения касательной логарифмического типа $O(\ln^\alpha(t))$. Выявлены условия, при которых среди построенных отображений будут существовать однолистные.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные выводы и обобщения краевой задачи Гильберта, а также формулы Кристоффеля-Шварца могут быть полезны при изучении задач с еще не рассмотренными особенностями, в частности при решении краевых задач теории аналитических функций с новым характером поведения индекса. А условия однолистности конформного отображения верхней полуплоскости на полигональную область, рассмотренные во второй главе, могут иметь приложения и использоваться другими научными коллективами. На основе результатов данной диссертации можно развивать теорию краевой задачи Гильберта и конформных отображений на полигональные области.

Методология и методы исследования

В работе автор использовал методы теории краевых задач аналитических

функций, теории потенциала, целых функций, геометрической теории функций комплексной переменной.

Положения, выносимые на защиту

1. Решена и исследована разрешимость красной задачи Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞ , который приводит к двустороннему степенному разному порядка завихрению на бесконечности.

2. Решена и исследована разрешимость красной задачи Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞ , который приводит к двустороннему степенному разному порядка завихрению на бесконечности, и когда $\arg G(t)$ испытывает конечный скачок в бесконечном числе точек контура L .

3. Построена формула, обобщающая интеграл Кристоффеля-Шварца, для отображения полуплоскости $\Im z > 0$ на полигональную область с бесконечным числом вершин и вращением касательной на ∞ вида $O(\ln^\alpha(t))$.

4. Установлено существование однолистных отображений среди построенных.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты диссертации обоснованы строгими математическими доказательствами и представлены автором на следующих конференциях:

1. Летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», г. Казань, 2013, 2015.

2. Молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения», г. Казань, 2013, 2014, 2015.

3. XXII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование», г. Новороссийск, 2014.

4. Международная научная конференция «Красивые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций», г. Казань, 2014.

5. Зарубежная конференция «4-th Najman Conference on Spectral Problems for operators and matrices», Opatija, Croatia, 2015.

6. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, г. Ка-

защ, 2016.

7. Уфимская математическая конференция с международным участием. г. Уфа, 2016.

По мере получения результаты диссертации подробно докладывались на семинаре ГТФКП под руководством Л.А. Аксентьева.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в пятнадцати печатных изданиях [1]-[15]. Работы [1]-[3] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Публикации [1],[4] по теме диссертации выполнены совместно с научным руководителем соискателя. В работе [1] научному руководителю принадлежит постановка задачи и лемма 2, соискателю принадлежат результаты по лемме 1 и теоремам 1, 2. В работе [4] научному руководителю принадлежит постановка задачи. Основные результаты, изложенные в диссертации, получены автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, и библиографии, содержащей 109 наименований. Общий объем диссертации составляет 94 страницы.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, приведены исторические сведения по развитию теории краевой задачи Гильберта и задачи конформного отображения на полигональные области с бесконечным числом вершин, сделан обзор литературы, сформулирована цель, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая и теоретическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту положения, указана степень достоверности, апробация, личный вклад автора, список публикаций автора по теме диссертации, выделена структура и краткое

содержание работы.

Первая глава посвящена исследованию краевой задачи Гильберта для аналитических функций с бесконечным числом точек, в которых аргумент $G(t)$ испытывает конечный скачок, и с двусторонним степенным разного порядка завихрением на бесконечности. Первая глава состоит из пяти разделов.

В разделе 1.1 представлены результаты по устранению бесконечного числа разрывов коэффициентов первого рода в однородной краевой задаче Гильберта, известные из упомянутых работ Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина. Примем, что точки разрыва удовлетворяют условиям $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-t_{-k}} < \infty$. Введем функции

$$P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \quad P_-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{-t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}, \quad (1)$$

где под $\arg(1 - z/t_j)$ понимаем однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при $z = 0$ и непрерывную в плоскости z , разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t = t_j$, $t = +\infty$ при $j > 0$ и соединяющей точки $t = -\infty$, $t = t_j$ при $j < 0$. Для $\ln |P_+(z)|$ справедлива формула

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi \Delta_+ e^{-i\kappa_+ \pi}}{\sin \pi \kappa_+} z^{\kappa_+} + I_+(z), \quad I_+(z) = -z \int_0^{+\infty} \frac{n_+^*(\tau) - \Delta_+ \tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau - z)} d\tau \quad (2)$$

для $0 < \arg z < 2\pi$. Аналогичная формула справедлива для $\ln |P_-(z)|$.

В разделе 1.2 исследуется принципиально новый случай краевой задачи Гильберта, а именно, речь идет о задаче с двусторонним разного степенного порядка завихрением на бесконечности.

Введем функцию $G(t) = a(t) - ib(t)$, которую можно записать в виде $G(t) = |G(t)|e^{i\nu(t)}$, где $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$. Теперь перепишем краевое условие в виде

$$\Re[e^{-i\nu(t)} F(t)] = 0. \quad (3)$$

Считаем, что функция $\nu(t)$ удовлетворяет условиям

$$\nu(t) = \begin{cases} \nu^- |t|^{\rho^-} + \tilde{\nu}(t), & t < 0, \\ \nu^+ |t|^{\rho^+} + \tilde{\nu}(t), & t > 0, \end{cases} \quad (4)$$

где ρ^-, ρ^+ — заданные числа, подчиненные ограничениям $0 < \rho^- < 1$, $0 < \rho^+ < 1$, $\rho^- \neq \rho^+$, (случай $\rho^- = \rho^+$ подробно разобран в работах Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина), $\nu^- \neq 0$, $\nu^+ \neq 0$, функция $\tilde{\nu}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на вещественной оси $|\tilde{\nu}(t_1) - \tilde{\nu}(t_2)| \leq K|t_1 - t_2|^\alpha$, в окрестности бесконечности условие Гёльдера имеет вид неравенства $|\tilde{\nu}(t_1) - \tilde{\nu}(t_2)| \leq K \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^\alpha$, с $K > 0$, и некоторым α , $0 < \alpha < 1$.

Говорим, что условие (4) приводит к двустороннему степенному разного порядка ρ^- и ρ^+ завихрению на бесконечности.

Регуляризация краевого условия проводится путем ввода функций $P_1(z) + iQ_1(z) = l_1 e^{i\alpha_1} z^{\rho^-}$ (для аналитического выделения особенности на $-\infty$) и $P_2(z) + iQ_2(z) = l_2 e^{i\alpha_2} z^{\rho^+}$ (для соответствующего выделения особенности на $+\infty$), и дальнейшего преобразования краевого условия задачи с учетом этих функций.

В разделе 1.3 рассматривается красная задача Гильберта с объединением особенностей коэффициентов краевого условия из 1.1 и 1.2. Постановка задачи в такой форме рассмотрена впервые. Новая однородная задача состоит в отыскании аналитической в D функции $F(z)$ по граничному условию (3) где $a(t)$, $b(t)$ вещественнозначные функции определенные на L , непрерывные всюду, кроме точек t_j , $j = \pm 1, \pm 2, \dots$, которые представляют собой точки разрыва первого рода. Справедливо $0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, $0 > t_{-1} > \dots > t_{-k} > t_{-k-1} > \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{-k} = -\infty$. Считаем, что функция $\varphi_1(t)$, которая получается из $\nu(t)$ после удаления функции скачков, имеет особенность, приводящую к двустороннему степенному разного порядка ρ^- и ρ^+ завихрению на бесконечности. В условиях задачи понимаем ветвь $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$ как выбранную на всех интервалах, где коэффициенты непрерывны так, чтобы для чисел $\delta_j = \nu(t_j + 0) - \nu(t_j - 0)$ было справедливо $0 \leq \delta_j < 2\pi$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$. Задачу с такой постановкой будем называть однородной краевой задачей Гильберта в случае, когда аргумент $G(t)$ испытывает конечный скачок в бесконечном числе точек контура, и двусторонним

степенным разного порядка завихрением на бесконечности. Завихрение на бесконечности создается, как указанным выше поведением функции $\varphi_1(t)$, так и функцией скачков, разрывы которой образуют расходящийся ряд.

В разделе 1.1 для исключения особенностей в точках разрыва первого рода, вводится произведения $P_+(z)$, $P_-(z)$. В разделе 1.2 для аналитического выделения особенностей краевого условия на минус и плюс бесконечности вводятся функции $P_1(z) + iQ_1(z) = l_1 e^{i\alpha_1} z^{\rho^+}$ и $P_2(z) + iQ_2(z) = l_2 e^{i\alpha_2} z^{\rho^+}$ соответственно. Регуляризация краевого условия рассмотренной в 1.3 задачи проводится путем ввода перечисленных функций одновременно и приводит краевое условие к виду

$$\Im \left\{ i e^{-\Gamma^+(t)} e^{-iP_1(t)+Q_1(t)} e^{-iP_2(t)+Q_2(t)} P_+(t) P_-(t) F(t) \right\} = 0. \quad (5)$$

В фигурных скобках (5) стоит граничное значение регулярной в D функции

$$\Phi(z) = i e^{-\Gamma^+(z)} e^{-iP_1(z)+Q_1(z)} e^{-iP_2(z)+Q_2(z)} P_+(z) P_-(z) F(z). \quad (6)$$

Всюду на L имеем

$$\Im \Phi_+(t) = 0. \quad (7)$$

Для искомой функции $F(z)$ справедливо

$$F(z) = -i e^{\Gamma(z)} e^{i\{P_1(z)+iQ_1(z)\}} e^{i\{P_2(z)+iQ_2(z)\}} \Phi(z) [P_+(z) P_-(z)]^{-1}. \quad (8)$$

Наиболее подробную картину разрешимости однородной задачи удается получить в классе B_* функций $F(z)$ с ограниченным в D произведением $|F(z)| e^{\Re I_+(z)} e^{\Re I_-(z)}$.

Теорема 3. Для того, чтобы краевая задача (5) имела решение $F(z)$ класса B_* необходимо и достаточно, чтобы для этой функции $F(z)$ была справедлива формула (6), где $\Phi(z)$ является целой произвольной функцией порядка $\rho_\Phi \leq \max\{\rho^+, \rho^-, \kappa_+, \kappa_-\}$, удовлетворяющей условию (7), и на контуре L для всех достаточно больших t неравенствам

$$|\Phi(t)| \leq C e^{-\frac{\rho^- t^{\rho^-}}{\sin \pi \rho^-} + \frac{\rho^+ t^{\rho^+} \cos \pi \rho^+}{\sin \pi \rho^+} + \frac{\pi \Delta_+ \cos(\kappa_+ \pi)}{\sin(\pi \kappa_+)} t^{\kappa_+} + \frac{\pi \Delta_-}{\sin(\pi \kappa_-)} t^{\kappa_-}}, \quad (9)$$

если $t > 0$, и

$$|\Phi(t)| \leq C e^{-\frac{\nu^- |t| \rho^- \cos \kappa \rho^-}{\sin \kappa \rho^-} + \frac{\nu^+ |t| \rho^+}{\sin \kappa \rho^+} + \frac{\pi \Delta_+ |t| \kappa^+}{\sin(\pi \kappa_+)} + \frac{\pi \Delta_- \cos(\kappa_- \pi)}{\sin(\pi \kappa_-)} |t| \kappa^-}, \quad (10)$$

если $t < 0$. Здесь $C = \text{const} > 0$.

Для рассмотренной в разделе 1.3 задачи найдено решение и подробно представлена картина разрешимости. Чтобы получить детальную картину разрешимости, при исследовании задачи были выделены три случая $\max\{\rho_+, \rho_-\} > \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, $\max\{\rho_+, \rho_-\} = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ и $\max\{\rho_+, \rho_-\} < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$. Результаты раздела 1.3 сформулированы в виде теорем и представлены в диссертации с доказательствами.

В разделе 1.4 рассматривается решение неоднородной краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на бесконечности разного порядка. Решение такой задачи может быть получено только в случае существования решения соответствующей однородной краевой задачи и записано в виде суммы общего решения однородной и частного решения неоднородной.

Постановка задачи отличается от задачи, рассмотренной в разделе 1.3, тем, что $c(t) \neq 0$. Краевое условие записывается в виде

$$\Re\{e^{-i\nu(t)} F(t)\} = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \quad (11)$$

$\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$ – ветвь, выбранная на каждом из интервалов непрерывности коэффициентов так, чтобы число $\delta_j = \nu(t_j + 0) - \nu(t_j - 0)$ удовлетворяло условию $0 \leq \delta_j < 2\pi$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Так же, как в разделе 1.3, с помощью функций $P_1(z) + iQ_1(z) = l_1 e^{i\alpha_1} z^{\rho^-}$, и $P_2(z) + iQ_2(z) = l_2 e^{i\alpha_2} z^{\rho^+}$ устраняется особенность на бесконечности, а с использованием функций $P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}$, $P_-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}$, устраняется счетное множество точек разрыва коэффициентов краевого условия.

В разделе 1.5 описано общее решение неоднородной краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на

бесконечности. Частное решение задачи получено в виде

$$F(z) = \frac{-ie^{\Gamma(z)}\Phi_0(z)\Phi_1(z)\Phi_2(z)}{\pi P_+(t)P_-(t)\exp\{il_1e^{i\alpha_1}z^{\rho^-}\}\exp\{il_2e^{i\alpha_2}z^{\rho^+}\}} \int \frac{c_1(t)dt}{t-z}, \quad (12)$$

где $c_1 = \frac{c(t)}{|G(t)|} \frac{P_+(t)P_-(t)}{\Phi_0(t)} \frac{c^{\alpha_1(t)}}{\Phi_1(t)} \frac{c^{\alpha_2(t)}}{\Phi_2(t)} e^{-\Gamma_0(t)} \cos \beta(t)\pi$, причем функции $c_1(t)$ и $|G(t)|$ удовлетворяют условию Гельдера. В заключении раздела 1.5 сформулирована **Теорема 11.** *Общее решение задачи (11) в классе B_* записывается как сумма частного решения задачи (12) и общего решения соответствующей однородной задачи в классе B_* .*

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [2],[5].

Во второй главе рассматривается обобщение одной обратной задачи М.А. Лаврентьева о конформном отображении верхней полуплоскости на полигональную область со счетным множеством вершин. Формула конформного отображения строится с использованием геометрического смысла производной конформных отображений и частного решения краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на бесконечности.

В разделе 2.1 в общем виде выводится формула конформных отображений верхней полуплоскости на полигональную область со счетным множеством углов и бесконечным вращением касательной при обходе границы области. Постановка задачи записывается в следующем виде.

Пусть D_z — односвязная область в комплексной плоскости, $L_z = \partial D_z$ состоит из двух ломаных L_z^1 и L_z^2 с общей точкой $A_0(0,0)$, каждая из которых имеет бесконечное число прямолинейных звеньев. Обозначим через A_1, A_2, \dots вершины L_z^1 , пронумерованные последовательно от точки $A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots$ — вершины L_z^2 , причем при движении вдоль L_z^1 от точки A_0 область D_z остается слева, а при движении вдоль L_z^2 — справа. Будем считать заданными углы $\eta_0^1\pi, \eta_0^2\pi$, образованные с действительной осью звеньями с началом в точке A_0 левой L_z^1, L_z^2 соответственно, $0 \leq \eta_0^1\pi < 2\pi, 0 < \eta_0^2\pi - \eta_0^1\pi < \pi/2$, а также $\alpha_k\pi$ — внутренние по отношению к области D_z углы при вершинах $A_k, 0 < \alpha_k < 1$, и

$\alpha_{-k}\pi$ — углы при вершинах A_{-k} , $1 < \alpha_{-k} < 2$, $k = \overline{1, \infty}$.

Пусть $z(\zeta)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость D в плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ на область D_z так, чтобы контуру L_z^1 соответствовала действительная полуось $\xi > 0$, в точку A_0 переходило начало координат, конц линии L_z^1 соответствовал точке $\zeta = +\infty$. Тогда L_z^2 отвечает действительная полуось $\xi < 0$. Обозначим через t_k, \bar{t}_{-k} точки действительной оси $\Im\zeta = 0$, соответствующие при указанном отображении вершинам A_k, A_{-k} контура L_z . Введем последовательности чисел $\kappa_k = 1 - \alpha_k$, $\kappa_{-k} = \alpha_{-k} - 1$, $k = \overline{1, \infty}$. Обозначим $n_-(\xi) = \sum_{j=1}^k \kappa_{-j}$, $n_+(\xi) = \sum_{j=1}^k \kappa_j$. Потребуем, чтобы последовательности точек t_k, \bar{t}_{-k} и чисел κ_k, κ_{-k} , удовлетворяли условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{n_+(\xi)}{\ln^{\kappa_+} \xi} = \Delta_+, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{n_-(\xi)}{\ln^{\kappa_-} \xi} = \Delta_-, \quad (13)$$

с постоянными $\Delta_+ > 0$, $\Delta_- > 0$, $\kappa_+ > 0$, $\kappa_- > 0$, и условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\bar{t}_{-k}|} < \infty. \quad (14)$$

Строим формулу конформного отображения

$$z(\zeta) = a_0 \int_0^{\zeta} \frac{e^{i\eta_0^0 \pi}}{\zeta^{1-(\eta_0^0 - \eta_0^0)}} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{\kappa_{-k}}}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{\bar{t}_k}\right)^{\kappa_k}} d\zeta. \quad (15)$$

В разделе 2.2 представлены результаты изучения существования и равенства односторонних пределов $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} z(\xi)$ и $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} z(\xi)$ крайних значений отображения. Если $\kappa_- < \kappa_+$, либо $\kappa_- = \kappa_+$, и $\Delta_- < \Delta_+$, то $\lim_{r \rightarrow +\infty} |z(-r) - z(r)| = 0$, оба предела $\lim_{r \rightarrow +\infty} z(r)$, $\lim_{r \rightarrow -\infty} z(r)$ существуют и равны, следовательно, область D_z конечна. Если же $\kappa_- > \kappa_+$, либо $\kappa_- = \kappa_+$, и $\Delta_- > \Delta_+$, то $\lim_{r \rightarrow +\infty} z(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} z(r) = \infty$ и, следовательно, линии L_z^1 и L_z^2 соединяются в бесконечно удаленной точке, то есть полигональная область со счетным множеством вершин является замкнутой.

В разделе 2.3 проведено исследование однолиственности конформного отображения (15) при $\kappa_+ = \kappa_- = 1$. Однолиственность доказана с помощью леммы 3, которая приведена с доказательством в этом же разделе.

Главный результат раздела 2.3 сформулирован в виде

Теорема 13. Для каждой двух последовательностей точек t_{-k} и t_k , удовлетворяющих условию (14) и таких, что для них пределы (13) с $\kappa_+ = \kappa_- = 1$, равны, существует бесконечно много последовательностей чисел α_{-k} , и α_k , $k = \overline{1, \infty}$, для которых отображение (15) будет однолиственным.

В разделе 2.4 проведено исследование однолистности конформного отображения при $0 < \kappa_- < 1$ и $0 < \kappa_+ < 1$ и $\kappa_- = \kappa_+ = \alpha$. Доказательство однолистности отличается от доказательства из раздела 2.3 оценкой $\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)$, для которой выводится формула

$$\begin{aligned} \ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta) &= \frac{\Delta \ln^{1+\alpha}(-\zeta)}{1+\alpha} - i\pi \Delta \ln^\alpha(-\zeta) + I_-(\zeta) + P_\alpha(-\zeta) - \\ &\quad - \frac{\Delta \ln^{1+\alpha} \zeta}{1+\alpha} + i\pi \Delta \ln^\alpha \zeta - I_+(\zeta) - P_\alpha(\zeta). \end{aligned}$$

Оценка проводится для двух случаев: $|\pi/\ln \zeta| \geq 1 - \varepsilon$ и $|\pi/\ln \zeta| \leq 1 - \varepsilon$, где ε это малое положительное число, получено $(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta))' \leq C_1/\eta$ и $(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta))' \leq C_2/\eta$, соответственно.

Результат раздела 2.4 сформулирован в виде

Теорема 14. Для каждой двух последовательностей точек t_{-k} и t_k , удовлетворяющих условию (13) и (14) с $0 \leq \alpha < 1$, существует бесконечно много последовательностей чисел α_{-k} , и α_k , $k = \overline{1, \infty}$, для которых при $\lambda \leq \beta \operatorname{tg}(\beta\pi/4) \cdot \max\{C_1, C_2\}$, где $\beta = \eta_0^2 - \eta_0^1$, отображение (15) будет однолиственным.

В разделе 2.5 доказано условие, при котором однолистных отображений не существует. Наложены ограничения

$$|n_+^*(\xi) - \Delta \ln^\alpha \xi| < C, \quad |n_-^*(\xi) - \Delta \ln^\alpha \xi| < C. \quad (16)$$

Доказано, что при $\alpha > 1$ среди функций, заданных формулой (15), однолистных нет. А при условии, что $0 < \alpha \leq 1$ и ограничениях (14), (16), существует бесконечно много последовательностей чисел $\{\alpha_{-k}\}$, $\{\alpha_k\}$, $k = \overline{1, \infty}$, для которых отображение (15) будет однолиственным. Сформулировала и доказана теорема.

Теорема 15. *Для того, чтобы в классе отображений (14), (15), (16) существовали однолистные, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $0 < \alpha \leq 1$.*

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [1],[3],[4].

В Заключении перечислены основные результаты работы.

1. Получена формула общего решения краевой задачи Гильберта для полуплоскости с единственной точкой разрыва второго рода и двусторонним разным порядком завихрением на бесконечности степенного типа.

2. Получена формула общего решения краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода и единственной точкой разрыва второго рода, приводящей к двустороннему разному порядку завихрению на бесконечности степенного типа.

3. Изучена картина разрешимости краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности разного порядка степенного типа.

4. Построена структурная формула конформного отображения верхней полуплоскости на полигональную область со счетным множеством вершин и неограниченным вращением касательной при обходе границы области логарифмического порядка $\ln^{\kappa+}(t)$, $t \rightarrow \infty$ и $\ln^{\kappa-}(t)$, $t \rightarrow -\infty$.

5. Исследованы геометрические свойства построенных отображений. Изучена замкнутость контура при конформном отображении и однолистность. Впервые найдены и реализованы подходы к исследованию однолистности отображений. Доказано существование однолистных отображений среди построенных, сформулированы необходимые и достаточные условия однолистности.

Основные цели и задачи диссертации выполнены.

Автор выражает благодарность научному руководителю П.Л. Шабалину за предложенную тему исследований, постановку задач, внимание к работе и поддержку в научной деятельности. Так же автор выражает признательность за проявленный интерес к исследованию по теме диссертации

участникам семинаров ГТФКП кафедры математического анализа, в особенности глубокую признательность руководителю семинара Л.А. Аксентьеву за полезные замечания, советы и вдохновение на решение трудных задач.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследований

[1]. Karabasheva E.N. Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices. / E.N. Karabasheva, P.L. Shabalin // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – № 36(2). – С. 144-153.

[2]. Карабашева Э.Н. О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности. / Э.Н. Карабашева // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2014. – № 1(27). – С. 242-252.

[3]. Хасанова Э.Н. Об однолиственности конформных отображений обобщенным интегралом Кристоффеля-Шварца на полигональные области со счетным множеством вершин / Э.Н. Хасанова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 7. – С. 74-83.

Публикации в других изданиях

[4]. Карабашева Э.Н., Шабалин П.Л. Об однолиственности отображений обобщенным интегралом Кристоффеля-Шварца / Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.» – 2017. – Т. 143. – С. 74-80.

[5]. Карабашева Э.Н. Счетное множество точек разрыва коэффициентов и двустороннее разного порядка завихрение на бесконечности в краевой задаче Гильберта / Э.Н. Карабашева // Труды XXII международной конференции Математика. Экономика. Образование. – 2014. – С. 54-62.

[6]. Карабашева Э.Н. Один особый случай краевой задачи Гильберта /

Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Материалы одиннадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". – 2013. – Т. 46. – С. 227-228.

[7]. Карабашева Э.Н. Задача Гильберта с двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности / Э.Н. Карабашева // Материалы двенадцатой молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения - 2013". г. Казань. – 2013. – Т. 47. – С. 72-74.

[8]. Карабашева Э.Н. Об отображениях на полигональные области со счетным множеством вершин / Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Двадцать вторая Международная конференция Математика. Экономика. Образование. – 2014. – С. 80

[9]. Карабашева Э.Н. Счетное множество точек разрыва и двустороннее завихрение на бесконечности разного порядка в задаче Гильберта. / Э.Н. Карабашева // Материалы тринадцатой молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения - 2014" г. Казань – 2014. – Т. 50. – С. 95-97.

[10]. Карабашева Э.Н. Задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на бесконечности разного порядка. / Э.Н. Карабашева // Международная научная конференция Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций - 2014. – 2014. – Т. 49. – С. 188-189.

[11]. Karabasheva E.N. Mapping onto polygonal domains with countable set of vertices. Univalence. / E.N. Karabasheva, P.L. Shabalin // 4-th Najman Conference on Spectral Problems for operators and matrices 20-25 September 2015 Opatija, Croatia – С. 19.

[12]. Карабашева Э.Н. Достаточные условия однолистности отображений на полигональные области со счетным множеством вершин. / Э.Н. Карабашева // Двенадцатая международная Казанская летняя школа-конференция "Теория функций, её приложения и смежные вопросы г. Казань – 2015. – Т. 51. – С. 225.

[13]. Карабашева Э.Н. Исследование однолиственности отображений на полигональные области со счетным множеством вершин / Э.Н. Карабашева // Четырнадцатая молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2015" г. Казань. - 2015. - Т. 53. - С. 81-83.

[14]. Карабашева Э.Н. Исследование однолиственности отображений на полигональные области / Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии. Казань. 2016. - С. 197-198.

[15]. Карабашева Э.Н. Однолиственность отображений полуплоскости на полигональные области с неограниченным вращением порядка $\ln^\alpha|t|, t \rightarrow \infty, \alpha \leq 1$ / Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Уфимская математическая конференция с международным участием. г. Уфа. 2016. - С. 77-78.

Подписано в печать 03.05.17

Заказ № 145

Тираж 120 экз.

Печать RISO

Формат 60x84/16

Усл.-печ.л. 1,2

Бумага офсетная № 1

Отпечатано в полиграфическом секторе Издательства КГАСУ

420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1.