Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

На правах рукописи

Дьякова Наталья Александровна

НЕОДНОРОДНЫЕ ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ВЫИГРЫШНЫЕ МНОЖЕСТВА

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор
Мощевитин Николай Германович

Ведущая организация Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук»

Защита состоится 23 декабря 2020 года в 15:00 ч. на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.06.002, по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета): https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php.

Работа представлена «8» октября 2020 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена классическим объектам теории многомерных диофантовых приближений, точнее, той части этой теории, которая связана с геометрией чисел. В ней рассматриваются вопросы, связанные с приближением точек линейных и аффинных подпространств в $\mathbb{R}^d$ точками целочисленной решетки. Основания этой теории связаны с именами знаменитых математиков 19 столетия – Л. Дирихле, Л. Кронекера, Ш. Эрмита, Г. Вороного, Г. Минковского. Свое фундаментальное развитие в 20 веке теория диофантовых приближений получила в работах Г. Давенпорта, Л. Морделла, К. Малера, А.Я. Хинчина, В. Ярника, Дж. Касселса, В.М. Шмидта и других математиков. Основные объекты и понятия этой теории сформулированы и изложены в ставших классическими монографиях Г. Минковского[1 2], Дж. Коксмы[3], Дж. Касселса[4] и В.М. Шмидта[5 6]. В диссертации рассматриваются системы линейных форм (как однородных, так и неоднородных), соответствующие линейные и аффинные подпространства в $\mathbb{R}^d$ и матрицы, связанные с заданием рассматриваемых подпространств в координатах.

Центральным вопросом теории диофантовых приближений является вопрос о приближении действительных чисел рациональными, например, вопрос о том, насколько хорошо действительное иррациональное число может быть приближено дробью с наименьшим возможным знаменателем. В нашей диссертации мы рассматриваем вопросы, связанные с неоднородными приближениями. Здесь следует упомянуть теорему А.Я. Хинчина[7], которая стала основополагающей в данной области. Эта теорема утверждает, что существует постоянная $\gamma > 0$ такая что для любого действительного

---

[1] *Minkowski H.* Diophantische Approximationen; eine Einführung in die Zahlentheorie — Leipzig — Teubner— 1907.

[2] *Minkowski H.* Geometrie der Zahlen — Leipzig — Teubner — 1910.

[3] *Koksma J.F.* Diophantische Approximationen — Berlin — Springer — 1936.

[4] *Cassels J.W.S.* An introduction to Diophantine approximations — Cambridge University Press — 1957.

[5] *Schmidt W. M.* Diophantine approximation — Lecture Notes in Math. — Berlin — volume 785 — Springer-Verlag — 1980.

[6] *Schmidt W. M.* Diophantine Approximations and Diophantine Equations — Lecture Notes in Math. — Berlin— volume 1467 — Springer-Verlag — 1991.

[7] *Khintchine A.* Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen — Rend. Circ. Mat. — Palermo — 50 — 1926 —pp. 170-195.

числа θ существует действительное число $\eta \in \mathbb{R}$ удовлетворяющее неравенству

$$\inf_{q\in\mathbb{N}} q \cdot ||q\theta - \eta|| \geq \gamma. \tag{1}$$

Наилучшая известная на данный момент константа была вычислена Годвиным[8]. Позднее эта теорема была обобщена Хинчиным на многомерный случай[9] [10]. Он доказал, что для заданных положительных чисел $n, m \in \mathbb{Z}$ существует положительная константа γ_{nm} такая что для любой $m \times n$ действительной матрицы Θ существует вектор $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ такой что

$$\inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} (||\Theta\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\eta}||_{\mathbb{Z}^n})^n ||\boldsymbol{q}||^m > \gamma_{nm} \tag{2}$$

(здесь $|| \cdot ||_{\mathbb{Z}^n}$ обозначает расстояние до ближайшей целой точки в sup-норме). Эти результаты представлены в главе 5 замечательной книги Касселса[11].

Ярник обобщил[12][13] эту теорему и доказал следующее утверждение. Предположим, что $\psi(t)$ - функция убывающая к нулю при $t \to +\infty$. Пусть $\rho(t)$ будет функцией, обратной к функции $t \mapsto 1/\psi(t)$. Предположим, что для всех $t > 1$ имеет место неравенство $\psi_\Theta(t) \leq \psi(t)$. Тогда существует вектор $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ такой что

$$\inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} (||\Theta\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\eta}||_{\mathbb{Z}^n}) \cdot \rho(8m \cdot ||\boldsymbol{q}||) > \gamma \tag{3}$$

с соответствующей константой $\gamma = \gamma(n, m)$.

Интерес представляет множество плохо приближаемых неоднородно-

---

[8] *Godwin H.J.* On the theorem of Khintchine — Proc. London Math. Soc. — V.3, 1 — 1953 — pp. 211-221

[9] *Khintchine A.* Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen — Acta Arith. 2 — 1937 — pp.161-172.

[10] *Khintchine A.* Regular systems of linear equations and a general problem of Chebyshev — Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 12 — Russian— 1948 — pp.249-258 .

[11] *Cassels J.W.S.* An introduction to Diophantine approximations — Cambridge Univ. Press — 1957.

[12] *Jarník V.* O lineárních nehomogenních diofantických aproximacích (on linear inhomogeneous Diophantine approximations), Rozpravy II. Třídy České Akad. 51 — 1941 — no. 29, 21. MR 0021015

[13] *Jarník V.* Sur les approximations diophantiques linéaires non homogénes — Acad. Tchéque Sci. Bull. Int. Cl. Sci. Math. Nat. 47 — 1946 — pp.145-160

стей
$$\mathrm{Bad}_\Theta = \left\{\eta \in [0,1)^n : \inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} (||\Theta\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\eta}||_{\mathbb{Z}^n})^n ||\boldsymbol{q}||^m > 0\right\}, \qquad (4)$$
которое мы определяем для заданной $m \times n$ действительной матрицы Θ. Таким образом, упомянутый первый результат Хинчина (существование чисел, удовлетворяющих (1)) показывает, что для $m = n = 1$ мы имеем $\mathrm{Bad}_\theta \neq \varnothing$, а существование $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего (3), есть его непосредственное обобщение на матрицы в рамках предложенного Хинчиным метода[14].

Недавние результаты Д.Х. Кима[15] о том, что при $m = n = 1$ для иррационального θ множество Bad_θ имеет нулевую меру Лебега, возможно, в относительно неявном виде содержатся в работе Ярника[16] или могут быть выведены оттуда. В ряде работ[17][18] были получены различные результаты, в частности о том, насколько множество Bad_Θ, определенное в (4), большое. В частности было доказано, что оно является множеством полной размерности Хаусдорфа.

Дальнейшие результаты, показывающие, что это множество достаточно большое связаны со свойством выигрышности.

Приведем далее классическое определение Шмидта для выигрышного множества.

Предположим, что два игрока A и B играют в игру, которая состоит в следующем: Для начала игроки A и B выбирают соответственно числа α и β из $(0,1)$. Далее B выбирает замкнутый шар B_1 из $\mathbb{R}^n$ радиуса $\rho(B_1) = \rho$. Затем A выбирает замкнутый шар $A_1 \subset B_1$ радиуса $\rho(A_1) = \alpha\rho$. Затем B выбирает замкнутый шар $B_2 \subset A_1$ радиуса $\alpha\beta\rho$ и т.д. Таким образом

---

[14] *Khintchine A.* Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen —Rend. Circ. Mat. — Palermo 50 —1926 — pp. 170-195.

[15] *Kim D.H.* The shrinking target property of irrational rotations — Nonlinearity 20 — 2007— 7, 1637-1643.

[16] *Jarník V.* O lineárních nehomogenních diofantických aproximacích (on linear inhomogeneous Diophantine approximations) — Rozpravy II. Třídy České Akad. — 51 — 1941 — no. 29, 21. MR 0021015

[17] *Kleinbock D.* Badly approximable systems of affine forms — J. Number Theory — 79 — 1999— pp. 83 - 102.

[18] *Bugeaud Y., Harrap S., Kristensen S. and Velani S.* On shrinking targets for $\mathbb{Z}$ actions on tori — Mathematika — 56 (2) — 2010 — pp. 193-202.

возникает последовательность вложенных замкнутых шаров

$$B_1 \supset A_1 \supset B_2 \supset A_2 \supset \dots$$

с радиусами

$$\rho(B_k) = (\alpha\beta)^{k-1}\rho, \qquad \rho(A_k) = \alpha(\alpha\beta)^{k-1}\rho, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

Очевидно, множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ содержит только одну точку. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $(\alpha,\beta)-$ выигрышно, если у игрока A есть стратегия, гарантирующая что $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in E$. Говорят, что множество E $\alpha-$выигрышно, если оно выигрышно для любого $\beta \in (0,1)$ и просто выигрышно, если оно $\alpha-$выигрышно для некоторого $\alpha \in (0,1)$.

Дж.Ценг[19] установил свойство выигрышности для множества Bad_θ. Впоследствии результат Дж.Ценга был обобщен на многомерный случай и выигрышность множества неоднородностей $\mathrm{Bad}(n,m)$ была доказана М. Айнзиндлером и Дж.Ценгом[20], хотя, как показал Н.Г.Мощевитин[21], этот результат может быть получен непосредственным применением рассуждений Хинчина-Ярника, с помощью которых они доказывали существование векторов, удовлетворяющих (2) и (3).

Ряд последующих результатов связан с рассмотрением задачи "с весами", то есть множеств вида

$$\mathrm{Bad}(i,j) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \inf_{q\in\mathbb{N}} \max(q^i\|qx_1\|, q^j\|qx_2\|) > 0 \right\},$$

где i, j действительные положительные числа удовлетворяющие $i + j = 1$ и их многомерных аналогов. Постановка этой задачи снова принадлежит В. Шмидту: в основополагающей работе[22] он рассмотрел множество $\mathrm{Bad}(1/3, 2/3)$.

[19] *Tseng J.* Badly approximable affine forms and Schmidt games — J. Number Theory — 129 — 2009 —pp. 3020-3025.

[20] *Einsiedler M., Tseng J.* Badly approximable systems of affine forms, fractals, and Schmidt games — Reine Angew. Math. — 660 — 2011 —pp. 83-97.

[21] *Moshchevitin N.* A note on badly approximable affine forms and winning sets — Mosc. Math. J. — 11 — 2011 — no. 1 — pp. 129-137.

[22] *Schmidt W.M.* Open problems in Diophantine approximations // In "Approximations Diophantiennes et nombres transcendants' — Luminy — 1982 — Progress in Mathematics — Birkhäuser — 1983 — pp.271 - 289.

Из метрической теоремы Хинчина следует, что это множество имеет нулевую меру Лебега. Шмидт фактически показал, что каждое $\mathrm{Bad}(i,j)$ непусто, а позже Поллингтон и Велани, основываясь на ранних работах Давенпорта[23] доказали, что это множество имеет полную размерность Хаусдорфа. Примечательно, что Бодягин, Поллингтон и Велани [24] доказали известную гипотезу, выдвинутую Шмидтом[25], о том что пересечение любых двух различных множеств $\mathrm{Bad}(i,j)$ не пусто. Более того, они установили общий результат состоящий в том, что для любого конечного набора пар (i_t, j_t) строго положительных действительных чисел удовлетворяющих $i_t + j_t = 1$ (для $1 \leq t \leq k$) пересечение

$$\bigcap_{t=1}^{k} \mathrm{Bad}(i_t, j_t)$$

имеет полную размерность Хаусдорфа. При определенных незначительных технических условиях их утверждение может быть улучшено для счетного пересечения. Выигрышность этого множества была доказана Аном[26] в 2013.

В неоднородном случае, который мы рассматриваем в настоящей диссертации, ситуация несколько другая. Харрап[27] доказал следующее утверждение.

Для любых действительных строго положительных чисел $i, j > 0$ таких что $i = j = 1$ и для любого $x \in Bad(i,j)$, множество

$$\mathrm{Bad}_x(i,j) =$$

$$= \left\{ (\alpha_1, \alpha_2) \in [0,1)^2 : \inf_{q \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} \max\{|q|^i \|qx_1 - \alpha\|, |q|^j \|qx_2 - \alpha\|\} > 0 \right\},$$

[23] *Davenport H.* A note on Diophantine approximation II — Mathematika — 11 — 1964 — pp. 50–58.

[24] *Badziahin D., Pollington A., Velani S.* On a problem in simultaneous Diophantine approximation: Schmidt's conjecture — Annals of Mathematics. — 174 — 2011 — pp. 1837 - 1883.

[25] *Schmidt W.M.* Open problems in Diophantine approximations // In "Approximations Diophantiennes et nombres transcendants' — Luminy — 1982 — Progress in Mathematics — Birkhäuser — 1983 — pp.271 - 289.

[26] *An J.* Two-dimensional badly approximable vectors and Schmidt's game — Duke Math. J. — 165 — no. 2 — 2016 — pp. 267-284.

[27] *Harrap S.* Twisted inhomogeneous Diophantine approximation and badly approximable sets — Acta Arithmetica — 151 — 2012 — pp.55 - 82.

имеет полную размерность Хаусдорфа.

Ограничение на $x \in \mathrm{Bad}(i,j)$ удалось убрать Мощевитину, но только в совсем специфическом случае $i = 2/3, j = 1/3$. Некоторые усиления имеются у Мощевитина и Бенгоечеа[28].

В многомерном случае Харрапом и Мощевитиным[29] была доказана следующая теорема.

Теорема. *Для любого n-мерного вектора $\boldsymbol{k}$ удовлетворяющего условию*

$$k_1, \ldots, k_n > 0 \qquad \textit{and} \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i = 1,$$

и для любой матрицы

$$\Theta \in \mathrm{Bad}(\boldsymbol{k}, n, m) = \{\Theta \in Mat_{n\times m}\mathbb{R} : \inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^m_{\neq 0}} \max_{1\leq j\leq n} (|\boldsymbol{q}|^{mk_j}(\|\theta_j(\boldsymbol{q})\||) > 0\}$$

множество

$$\mathrm{Bad}_{\Theta}(\boldsymbol{k}, n, m) = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^m_{\neq 0}} |\boldsymbol{q}|^{mk_j}(\|\theta_j(\boldsymbol{q}) - \eta_j\|) > 0\}$$

является $1/2$- *выигрышным.*

Следует отметить, что в общем случае, без дополнительного условия на $\Theta \in \mathrm{Bad}(\boldsymbol{k}, n, m)$ задача остается открытой даже для случая $n = 2, m = 1$. Эта задача, по-видимому, является очень сложной, но в случае, когда все $k_i = 1/n$, результат верен и без дополнительного условия на Θ.

Одним из основных результатов настоящей диссертации, является усиление теоремы Харрапа-Мощевитина.

Д. Клейнбок[30] обнаружил следующий феномен. Если в некотором аффинном подпространстве $A \subset \mathbb{R}^n$ найдется вектор плохо приближаемый рациональными векторами, то есть такой, что на погрешность приближения имеется оценка снизу в терминах знаменателя приближающего

[28] *Bengoechea P., Moshchevitin N.* Badly approximable points in twisted Diophantine approximation and Hausdorff dimension — Acta Arithmetica —177 (4) —2017— pp.301-314.

[29] *Harrap S., Moshchevitin N.* A note on weighted badly approximable linear forms — Glasgow Mathematical Journal — 59:2 — 2017 — pp. 349-357.

[30] *Kleinbock D.* Extremal supspaces and their submanifolds — GAFA — 13:2 — 2003 — pp. 437-466.

вектора, то почти все (в смысле меры Лебега) векторы из подпространства A будут в определенном смысле плохо приближаемыми. Элементарное доказательство чуть более общего факта было дано Н.Г. Мощевитиным[31].Некоторые обобщения имеются у Цанг[32].

Как оказалось, более удобно работать не с аффинными подпространствами $A \subset \mathbb{R}^{d-1}$, а непосредственно с соответствующими линейными подпространствами

$$\mathfrak{A} = \mathrm{span}\,\{z = (1, x_1, ..., x_{d-1}) : \ (x_1, ..., x_{d-1}) \in A\}$$

в $\mathbb{R}^d$ и формулировать все результаты для них. В настоящей диссертации мы доказываем общую теорему о том, что если в подпространстве $\mathfrak{A}, \dim \mathfrak{A} = a$ найдется плохо приближаемое подпространство $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}, \dim \mathfrak{B} = b$, то почти все подпространства $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}, \dim \mathfrak{C} = c$ будут плохо приближаемыми (в определенном смысле).

Цель работы и основные задачи

Целью настоящей работы являлось обобщение понятия выигрышности множества для пересечений с линейными подпространствами, а также усиление существующего результата о выигрышности множества неоднородно плохо приближаемых матриц. Построение контрпримера в случае, когда матрица не является плохо приближаемой. Обобщение на случай подпространств произвольной размерности теоремы о плохо приближаемости векторов в подпространствах.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах теории диофантовых приближений и исследований свойств выигрышности множеств. Кроме того, полученные результаты могут использоваться

[31] *Moshchevitin N.G.* On Kleinbock's Diophantine result — Publ. Math. Debrecen — 2011 — 79:3-4 — pp. 129-137.

[32] *Zhang Y.* Diophantine exponents of affine subspaces: The simultaneous ap- proximation case — J. Number Theory — 129:8 — 2009 — pp. 1976-1989.

в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Методология и методы исследования

В работе использованы элементарные методы теории чисел, методы математического анализа и линейной алгебры, подходы, связанные геометрией чисел.

Положения диссертации, выносимые на защиту

– Доказана изотропная выигрышность множества неоднородно плохо приближаемых матриц, а именно доказано, что если $\Theta \in \mathrm{Bad}(\boldsymbol{k}, n, m)$, то множество $\mathrm{Bad}_\Theta(\boldsymbol{k}, n, m)$ является изотропно выигрышным.

– Показано, что существует вектор $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ такой что

1. $1, \theta_1, \theta_2$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$;
2. $\mathrm{Bad}_{\boldsymbol{\theta}} := \{(\eta_1, \eta_2) : \inf_{x \in \mathbb{N}} x^{\frac{1}{2}} \max_{i=1,2} \|x\theta_i - \eta_i\| > 0\}$ не является изотропно выигрышным.

– Доказана теорема о том, что если в подпространстве $\mathfrak{A}, \dim \mathfrak{A} = a$ найдется плохо приближаемое подпространство $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}, \dim \mathfrak{B} = b$, то почти все подпространства $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}, \dim \mathfrak{C} = c$ будут плохо приближаемыми (в определенном смысле).

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты работы строго доказаны. Результаты, изложенные в диссертации, в различное время докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Мини-конференция «Диофантовы проблемы» (Долгопрудный, МФТИ), 24-25 апреля 2017,

2. Московский семинар по теории чисел под руководством Ю.В. Нестеренко, Н.Г. Мощевитина (МГУ),

3. Научно-исследовательский семинар «Арифметика и геометрия» под руководством Н.Г. Мощевитина, О.Н.Германа,

4. Научно-исследовательский семинар «Дискретная геометрия и геометрия чисел» под руководством Н.П. Долбилина, М.Д. Ковалева и Н.Г. Мощевитина (МГУ).

Публикации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 3 статьях, представленных в конце списка литературы. Все работы опубликованы в международных изданиях из перечня ВАК.

Структура диссертации и объем работы

Диссертация изложена на 85 страницах машинописного текста и состоит из введения, четырех глав и списка литературы, включающего 45 источников. Диссертация иллюстрирована 2 рисунками.

Краткое содержание работы

Содержание введения

Введение состоит из двух параграфов. В первом из них приводится исторический обзор результатов связанных с плохо приближаемыми неоднороднами линейными формами, показана актуальность темы, а также формулируются результаты диссертации в этой области. Во втором параграфе введения речь идет о подпространствах в подпространствах. Здесь также приводится краткая история вопроса, аргументируется научная новизна и формулируется результат диссертации связанный с подпространствами подпространств.

Содержание первой главы

Первая глава не содержит новых результатов. В ней описываются игры, встречающиеся в теории диофантовых приближений, а также их обобщения. Также в первой главе приводится и обсуждается новое понятие изотропной выигрышности

Определение 1 (Изотропная выигрышность)**.** *Назовем множество* $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ *изотропно выигрышным, если для любого* $d \leq n$ *и для любого* $d-$*мерного аффинного пространства* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ *пересечение* $\mathcal{N} \cap \mathcal{A}$ *является* $1/2$*-выигрышным множеством (в смысле Шмидта).*

Содержание второй главы

Во второй главе мы формулируем и доказываем следующий основной результат

Теорема 1. *Если выполнено*

$$\Theta \in Mat_{m\times n} \in \mathrm{Bad}(\boldsymbol{k}, n, m),$$

то множество

$$\mathrm{Bad}_\Theta(\boldsymbol{k}, n, m) = \{\eta \in [0,1]^n : \inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} \max_{1\le j\le n} (|\boldsymbol{q}|^{mk_j}||L_j(\boldsymbol{q}) - \eta_j||) > 0\}$$

изотропно выигрышно.

Где $\mathrm{Bad}(\boldsymbol{k}, n, m)$ - множество плохо приближаемых действительнозначных матриц Θ размера $n \times m$ определяется для любых наборов из n действительных чисел $\boldsymbol{k} = \{k_1, \ldots, k_n\}$ таких что

$$k_j > 0 \quad (1 \le j \le n) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{n} k_j = 1$$

как

$$\mathrm{Bad}(\boldsymbol{k}, n, m) = \{\Theta \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R}) : \inf_{q\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} \max_{1\le j\le n} (|q|^{mk_j}||L_j(q)||) > 0\}.$$

По данному линейному подпространству $\mathcal{L}$ мы строим такую последовательность целочисленных векторов $\boldsymbol{u_r} = \boldsymbol{u_r}(\mathcal{L}) = (u_{r1}, \ldots, u_{rn}) \in \mathbb{Z}^n$ для которой Евклидовы нормы $t_r = |\boldsymbol{u}_r^{\mathcal{L}}|_e$ проекций на $\mathcal{L}$ обладают свойством лакунарности, т.е.

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} \ge M, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

для некоторого $M > 1$. В терминах этих векторов $\boldsymbol{u}_r$ определяем множество

$$N(\Lambda) = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{A} : \exists c(\eta) > 0 : \quad ||\eta_1 u_{r1} + \ldots + \eta_n u_{rn}|| \ge c(\eta)\ \forall r \in \mathbb{N}\}$$

Для того, чтобы доказать результат теоремы достаточно установить два факта:

1. $N(\Lambda) \subset \mathrm{Bad}_\Theta(\boldsymbol{k}, n, m)$
2. $N(\Lambda)$ — выигрышно.

После установления свойства (5) для проекций $\boldsymbol{u}_r^{\mathcal{L}}$ на $\mathcal{L}$ выигрышность подмножества $N(\Lambda) \subset \mathcal{A}$ (Факт 2) может быть доказана аналогично лемме 1[33]. Вышеуказанная лемма позволяет установить свойство выигрышности для множества в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Здесь нам следует использовать эту лемму для данного k-мерного афинного подпространства $\mathcal{A}$.

Содержание третьей главы

В третьей главе показывается, что условие на матрицу быть плохо приближаемой существенно для свойства изотропной выирышности и доказывается следующая

Теорема 2. *Существует вектор $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ такой что*

1) $1, \theta_1, \theta_2$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$;

2) $\mathrm{Bad}_{\boldsymbol{\theta}} = \{(\eta_1, \eta_2) : \inf_{x\in\mathbb{N}} x^{\frac{1}{2}} \max_{i=1,2} \|x\theta_i - \eta_i\| > 0\}$ не является изотропно выигрышным.

Для этого строится специальный вектор $\boldsymbol{\theta}$ и одномерное подпространство $\mathcal{P}$ такое, что $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{P}$ и для сектора $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \{|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\theta}| \leq 1\}$ выполняется $\mathcal{D} \cap \mathrm{Bad}_{\boldsymbol{\theta}} = \emptyset$. Более того, для произвольной положительной функции $w(t)$, монотонно убывающей(медленно) к бесконечности можно утверждать, что для всех $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{D}$ существует бесконечно много $x \in \mathbb{Z}$ таких что

$$\max_{i=1,2} \|x\theta_i - \eta_i\| < \frac{\omega(x)}{x}.$$

Замечание 1. *Из основной теоремы главы 2 следует, что вектор $\boldsymbol{\theta}$, построенный в Теореме 2 не принадлежит множеству*

$$\mathrm{Bad} = \{(\theta_1, \theta_2) | \inf_{x\in\mathbb{N}} x^{1/2} \max(||\theta_1 x||, ||\theta_2 x||) > 0\}.$$

[33] *Moshchevitin N.* A note on badly approximable affine forms and winning sets — Mosc. Math. J. — 11 — 2011 — no. 1 — pp. 129-137.

Замечание 2. *Пусть* $\boldsymbol{\theta} = \left(\frac{a_1}{q}, \frac{a_2}{q}\right)$ *- рациональный. Пусть* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \notin \frac{1}{q} \cdot \mathbb{Z}^2$*, тогда для любого* $x \in \mathbb{Z}$*,*

$$\max_{i=1,2} \left|\left| x\frac{a_i}{q} - \eta_i \right|\right| \geq \operatorname{dist}\left(\boldsymbol{\eta}, \frac{1}{q} \cdot \mathbb{Z}^2\right) > 0.$$

Тогда множество

$$\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{\eta} : \inf_{x \in \mathbb{Z}} \max_{i=1,2} \left|\left| x\frac{a_i}{q} - \eta_i \right|\right| > 0 \right\}$$

содержит $\mathbb{R}^2 \setminus \frac{1}{q} \cdot \mathbb{Z}^2$ *и, очевидно, выигрышно. Легко видеть, что для всякого одномерного аффинного подпространства* ℓ *будет справедливо* $\mathcal{B} \cap \ell \supset \left(\mathbb{R}^2 \setminus \frac{1}{q} \cdot \mathbb{Z}^2\right) \cap \ell$*. Поэтому очевидно, что* $\mathcal{B} \cap \ell$ *также выигрышно в* ℓ*.*

Содержание четвертой главы

В этой главе изучается свойство приближаемости линейных подпространств некоторого фиксированного плохоприближаемого подпространства в $\mathbb{R}^d$ и излагаются основные результаты - теорема 4 (неравества для диофантовых экспонент) и теорема 3 (общий случай с функциями).

В **разделе** 4.1 даются основные определения. Пусть

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} & \dots & \theta_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{n,1} & \dots & \theta_{n,m} \end{pmatrix} \tag{6}$$

- действительная матрица и $\psi(t)$ -действительнозначная функция убывающая к нулю при $t \to \infty$.

Определение 2. *Матрица* Θ *называется* ψ*-плохо приближаемой, если для любого целочисленного вектора* $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ *выполняется неравенство*

$$\max_{1 \leq j \leq n} ||\theta_{j,1}x_1 + \dots + \theta_{j,m}x_m|| \geq \psi(|\boldsymbol{x}|).$$

Функция меры иррациональности $\psi_\Theta(t)$, соответствующая матрице Θ

определяется следующим образом

$$\psi_\Theta(t) = \min_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^m \\ 0<|\boldsymbol{x}|\le t}} \max_{1\le j\le n} ||\theta_{j,1}x_1 + ... + \theta_{j,m}x_m||, \quad t \ge 1. \tag{7}$$

Определение 3. *Матрица Θ является ψ-плохо приближаемой тогда и только тогда*

$$\psi_\Theta(t) \ge \psi(t), \quad \forall\, t \ge 1.$$

Дадим определение плохо приближаемости линейного подпространства.

Пусть $d = m + n$ и $\mathbb{R}^d$ будет d-мерным Евклидовым пространством с координатами

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n).$$

Для собственного линейного подпространства $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^d$ рассмотрим функцию

$$\psi_{\mathfrak{B}}(t) = \min_{\substack{\boldsymbol{z}\in\mathbb{Z}^d \\ 1\le|\boldsymbol{z}|<t}} \mathrm{dist}(\boldsymbol{z}, \mathfrak{B}), \tag{8}$$

где $\mathrm{dist}(A, B)$ обозначает Евклидово расстояние между множествами A и B.

Скажем, что собственное линейное подпространство $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^d$ ψ-плохо приближаемо, если

$$\psi_{\mathfrak{B}}(t) \ge \psi(t), \quad \forall t \ge 1.$$

В **разделе 4.2** определяется Диофантова экспонента для действительной матрицы Θ как

$$\omega(\Theta) = \sup\{\tau : \liminf_{t\to\infty} t^\tau \psi_\Theta(t) < +\infty\}.$$

и для соответствующего линейного подпространства $\mathfrak{B}$ как

$$\omega(\mathfrak{B}) = \inf\{\gamma : \Theta \text{ - } \rho t^{-\gamma}\text{-плохо приближаема для некоторого } \rho > 0 \}.$$

В **разделе 4.3** описывается параметризация c - мерных подпространств некого $a-$мерного линейного пространства соответствующими $(a - c) \times c$

матрицами в $\mathbb{R}^{(a-c)\times c}$. Таким образом, когда речь идет о почти всех c - мерных линейных подпространствах $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ имеются ввиду почти все $(a-c)\times c$-матрицы относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^{(a-c)\times c}$.

В **разделе 4.4** формулируется основной результат для Диофантовых экспонент

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ будет a-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^d$. Предположим, что $\mathfrak{B}$ - b-мерное линейное подпространство пространства $\mathfrak{A}$ с $\omega(\mathfrak{B}) = \omega$.*

1) Если $c < b$, то

$$\omega(\mathfrak{C}) \leq \omega + \frac{(\omega+1)\cdot(c-b)}{d-c} = \frac{\omega\cdot(d-b)+c-b}{d-c}$$

для почти всех c-мерных линейных подпространств $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$.

2) Если $c \geq b$, то

$$\omega(\mathfrak{C}) \leq \omega + \frac{(\omega+1)\cdot(c-b)}{a-c} = \frac{\omega\cdot(a-b)+c-b}{a-c}$$

для почти всех c-мерных линейных подпространств $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$.

Теорема 3 означает, что если существует b-мерное линейное подпространство $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, у которого нет хороших рациональных приближений, тогда почти все c-мерные линейные подпространства $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ также не имеют хороших рациональных приближений. Теорема 3 является частным случаем более общего результата (Теорема 4).

В **разделе 4.5** приводится пример для подпространства размерностью 3.

В **разделе 4.6** формулируется общая теорема о подпространствах подпространств.

Пусть функции $\psi(T)$ и $\varphi(T)$, $T \geq 1$ две положительнозначные функции монотонно убывающие к нулю при $T \to \infty$ и удовлетворяющие специальным техническим условиям.

Здесь мы имеем дело с ψ-плохо приближаемым b-мерным линейным подпространством $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^d$. Можно предположить, что

$$\psi(T) \leq T^{-\frac{b}{d-b}}.$$

Для этих функций определим величины $\mu_T = 0$ при $0 \le T < 1$ и

$$\mu_T = \left(\frac{T}{\psi(T)}\right)^{a-b} \cdot \max\left\{1, \left(\frac{\varphi(T)}{\psi(T)}\right)^{d-a}\right\} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{T}{\psi(T)}\right)^{a-b}, & \varphi(T) \le \psi(T) \\ \frac{T^{a-b}\cdot\varphi^{d-a}(T)}{\psi^{d-b}(T)}, & \varphi(T) \ge \psi(T) \end{cases} \tag{9}$$

для $T \ge 1$. Для целых значений T рассмотрим величины

$$M_0 = 0, \ \ \textit{и} \ M_T = \sum_{j=0}^{[\log_2 T]} \mu_{T/2^j}, \quad \lambda_T = M_T - M_{T-1}, \ \ T \ge 1,$$

поэтому

$$M_T = \sum_{j=1}^{T} \lambda_j. \tag{10}$$

Теорема 4. *Пусть все функции удовлетворяют условиям выше и ряд*

$$\sum_{T=1}^{+\infty} \lambda_T \cdot \frac{\varphi^{a-c}(T)}{T^{a-c}} \tag{11}$$

сходится.

Предположим, что $\mathfrak{B}$ - b-мерное ψ-плохо приближаемое линейное подпространство. Тогда для любого a-мерного линейного подпространства $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ почти все c-мерные линейные подпространства $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ - φ-плохо приближаемы.

Замечание. *При $c = 1$ результат Теоремы 4 аналогичен основному результату статьи Н. Мощевитина*[34]*.*

В **разделе 4.7** приводится полное доказательство утверждения теоремы 4.

[34] *Moshchevitin N.G.* On Kleinbock's Diophantine result — Publ. Math. Debrecen — 2011 — 79:3-4 — pp. 129-137.

Заключение

Резюмируя кратко, основные, полученные в диссертации результаты состоят в следующем:

- Усилена теорема о выигрышности множества неоднородно плохо приближаемых матриц и показано, что на самом деле это множество является изотропно выигрышным в случае $\Theta \in \mathrm{Bad}(\boldsymbol{k}, n, m)$.
- Приведен контрпример к условию неоднородной плохо приближаемости матрицы, тем самым показано, что условие на матрицу $\Theta \in \mathrm{Bad}(\boldsymbol{k}, n, m)$ существенно.
- Обобщена теорема о плохо приближаемых векторах в подпространствах на случай линейных подпространств произвольной размерности.

Благодарности

Автор хочет поблагодарить научного руководителя доктора физико-математических наук профессора Николая Германовича Мощевитина за постановки задач, неоценимую помощь в подготовке диссертации, неустанную поддержку и терпение.

Работы автора по теме диссертации

1. *P. Bengoechea, N. Moshchevitin, N. Stepanova* A note on badly approximable linear forms on manifolds // Mathematika. — 2017.— 63(2). — P. 587-601.

2. *N. Dyakova* Sets of inhomogeneous linear forms can be not isotropically winning// Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2019. — Volume 8, Number 1. — P. 3-13.

3. *N. Dyakova* On badly approximable subspaces// Acta Arithmetica. — 2020. — 195.1. — P. 1-11.