МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Фуфаев Денис Владимирович

Тензорные произведения операторов и сходимость почти всюду

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

10 ОКТ 2013

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель	Лукашенко Тарас Павлович доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты	Бахвалов Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова Холщевникова Наталья Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики МГТУ “Станкин” Графов Денис Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии физико-математического факультета МГОУ

Защита диссертации состоится «9» ноября 2018г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 МГУ имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

E-mail:mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский пр-т, д.27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

https://istina.msu.ru/dissertations/140933164/

Автореферат разослан «8» октября 2018г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07,
доктор физико-математических наук
профессор

Власов
Виктор Валентинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В XIX веке при изучении сходимости тригонометрических рядов возникла задача описания рядов, сходящихся почти всюду. Эта задача из классической области теории функций полностью не решена до сих пор, хотя ею занимались известные математики, получившие в различных терминах ряд выдающихся результатов. В 1915 г. Лузин Н.Н. в своей диссертации выдвинул гипотезу, что ряд Фурье любой функции, принадлежащей пространству $L^2(\mathbb{T})$, сходится к ней самой почти всюду (см. [1], с. 219). Колмогоровым А.Н., Селиверстовым Г.А. и Плесснером А.И. был получен результат в этом направлении, бывший лучшим в течение сорока лет (см. [2], [3], [4], глава V §2). Гипотезу Лузина доказал Карлесон Л. в 1966 году(5). Его результат был обобщен Хантом в 1968 году для случая пространств $L^p(\mathbb{T})$ при $p > 1$ (6). Вопрос, который здесь, таким образом, формулируется, таков: пусть $\Phi : [0;\infty) \to [0;\infty)$ — неубывающая функция. Через $\Phi(L)(\mathbb{T})$ обозначим класс (называемый классом Орлича) суммируемых на $\mathbb{T}$ функций f, таких что интеграл $\int\limits_{\mathbb{T}} \Phi(|f(x)|)dx$ сходится. Надо найти такой наибольший класс функций $\Phi(L)$, что для любой функции из этого класса ее ряд Фурье сходится к ней почти всюду. Ряд математиков получали результаты в этом направлении. Наилучший на данный момент принадлежит Антонову Н.Ю.: он установил сходимость почти всюду для класса $L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T})$ (7), где $\log^+(t) = \ln(t+1)$.

Отметим также, что наряду с нахождением класса функций, гарантирующего сходимость ряда Фурье, ведется работа в противоположном направлении — оценка снизу в шкале пространств Орлича, т.е. для определенной функции Φ нахождение функции $f \in \Phi(L)(\mathbb{T})$, такой, для которой ее ряд Фурье не сходится почти всюду. Для класса

---

[1] Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд - М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. - 550 с.

[2] Kolmogorov A.N., Seliverstov G.A. Sur la convergence des series de Fourier // C. R. Acad. Sci. Paris. - 1924. - V.178. - P.303-306.

[3] Plessner A.I. Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen // J. Reine Angew. Math. - 1925. - V.155. - P.15-25.

[4] Бари Н.К. Тригонометрические ряды - М.: Физматгиз, 1961. - 936 с.

[5] Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. - 1966. - V.116. - P.135-157.

[6] Hunt R.A. On the convergence of Fourier series // Orthogonal expansions and their continuous analogues: Proc. Conf. Edwardswille, Ill 1967. - Carbondale-Illinois: SIU Press, 1968. - P.235-255.

[7] Antonov N.Yu. Convergence of Fourier series // East J. Approx. - 1996. - V.2. - No 2. - P.187–196.

интегрируемых функций такой пример впервые привел Колмогоров (8, 9). В настоящее время лучший результат принадлежит Конягину С.В. (10, 11).

Параллельно с этим возникает аналогичный вопрос для функций нескольких переменных и, соответственно, кратных рядов Фурье. В этом случае частичные суммы ряда Фурье нумеруются уже не одним целым числом, а набором целых чисел — мультииндексом. Отсюда возникает вопрос: как понимать возрастание этого мультииндекса? Оказывается, что в зависимости от того, в каком смысле понимать возрастание, ответ получается разным. Если считать, что все индексы независимо стремятся к бесконечности (так называемая сходимость по Прингсхейму), то, как показал Фефферман Ч. в 1970 г., такой класс найти принципиально нельзя: существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится по Прингсхейму почти всюду (12). Если же рассматривать более узкое семейство индексов — имеющих по всем координатам одно и то же значение, то есть имеющих вид $(n, n, \ldots, n)$ (так называемая сходимость по кубам) — то в этом случае результаты в терминах классов Орлича имеются. Лучший результат в этой области получен тоже Антоновым (13).

Наряду со сходимостью рядов Фурье успешно используются и различные методы суммирования, наиболее известными являются средние арифметические частичных сумм ряда Фурье (так называемые средние Фейера). Для них положительных результатов получается больше: Лебегом было установлено, что средние арифметические частичных сумм ряда Фурье любой суммируемой функции сходятся к исходной функции почти всюду (14). В случае кратных рядов Фурье вопрос о характере возрастания мультииндекса сохраняется, однако здесь больше окон-

---

[8] Kolmogorov A.N. Une serie de Fourier-Lebesque divergente presque partout // Fund. Math.– 1923. – V.4. – P.324-328.

[9] Kolmogorov A.N. Une serie de Fourier-Lebesque divergente partout // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1926. - V.183. – P.1327-1329.

[10] Конягин С.В. О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Мат. сб. – 2000. – Т.191. – №1. – С.103–126.

[11] Конягин С.В. О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье // Теория функций, Сборник научных трудов, Тр. ИММ УрО РАН. – 2005. – Т.11. – №2. – С.112–119.

[12] Fefferman C. On the divergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – V.77. – No 2. – P.191–195.

[13] Антонов Н.Ю. О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. – 2004. – Т.68. – №2. – С.3-22.

[14] Lebesgue H. Recherches sur la convergence des series de Fourier // Math. Ann. Berlin-Gottingen-Heidelberg. – 1905. – V.61. – P.251–280.

чательных результатов: было доказано, что для сходимости почти всюду по кубам достаточно опять же суммируемости функции(15), для сходимости по Прингсхейму Йессеном, Марцинкевичем и Зигмундом было показано, что достаточно принадлежности классу $L(\log^+ L)^{n-1}(\mathbb{T}^n)$(16), при этом результат неусиляем. Аналогичные результаты были получены и для иных методов суммирования тригонометрических рядов Фурье (общие методы Чезаро, средние Абеля-Пуассона, средние Марцинкевича), для сходимости кратных рядов Фурье-Хаара и для тесно связанной с вышеперечисленным задачи дифференцирования кратного интеграла Лебега (см., например, [17], глава XVII, [18], глава 1§, 1, [19], главы 1 и 4, [20], [21], [22]). Из недавних работ о сходимости почти всюду для различных методов разложения функций можно также упомянуть [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30].

Схожесть приведенных утверждений ставит вопрос о существовании

---

[15] Marcinkiewicz J., Zygmund A. On the summability of double Fourier series // Fundamenta Mathematicae. - 1939. - V.32. - I.1. - P.122-132.

[16] Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals // Fundamenta Mathematicae. - 1935. - V.25. - I.1. - P. 217-234.

[17] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Т.2 – М.: Мир, 1965. - 537 с.

[18] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций – М.: Мир, 1973. - 342 с.

[19] Янушаускас А.И. Кратные тригонометрические ряды - Новосибирск: Наука, 1986. - 272 с.

[20] Дьяченко М.И. О некоторых свойствах кратных рядов и преобразований Фурье // Тр. МИАН СССР. - 1989. - Т.190. - С.88-101.

[21] Дьяченко М.И. Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Матем. сб. - 2013. - Т.204. - №3. - С.3-18.

[22] Зеркидзе Т.Ш. Сходимость кратных рядов Фурье–Хаара и сильная дифференцируемость интегралов // Труды Тбилис. матем. ин-та им. А. М. Размадзе АН ГрССР. - 1985. - Т.76. - С.80-99.

[23] Ониани Г.Г. О сходимости двойных рядов Фурье–Хаара по растяжениям множества // Матем. сб. - 2014. - Т.205. - №7. - С.73-94.

[24] Лукашенко Т.П. Об аналогах теоремы Колмогорова–Селиверстова–Плесснера для неортогональных систем функций // Матем. заметки. - 2000. - Т.67 - №1. - С.87–101.

[25] Галатенко В.В., Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. Об условии сходимости почти всюду орторекурсивных разложений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. -2016. - №5. - С.20–25.

[26] Тригуб Р.М. Обобщение метода Абеля-Пуассона суммирования тригонометрических рядов Фурье // Матем. заметки. - 2014. - Т.96. - №3. - С.473-475.

[27] Тригуб Р.М. Суммируемость рядов Фурье почти всюду с указанием множества сходимости // Матем. заметки. - 2016. - Т.100. - №1. - С.163-179.

[28] Passenbrunner M., Prochno J. On almost everywhere convergence of tensor product spline projections// URL: https://arxiv.org/abs/1310.6505.

[29] Goginava U. Almost Everywhere Strong Summability of Fejer means of rectangular partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier Series// URL: https://arxiv.org/abs/1609.01640.

[30] Goginava U., Gogoladze L., Karagulyan G. BMO-estimation and Almost Everywhere Exponential Summability of Quadratic Partial Sums of Double Fourier Series// URL: https://arxiv.org/abs/1303.0364.

более общих покрывающих их результатов. Действительно, есть теорема (см., например, [31], теорема 5.1.3) о последовательности операторов, действующих в пространстве интегрируемых функций на отрезке, устанавливающая сходимость почти всюду результатов их действия к исходной функции, использующая свойства максимального оператора данной последовательности, а именно, свойство слабого типа (1,1). Таким образом, вопрос о сходимости почти всюду можно свести к вопросу о наличии слабого типа у соответствующего максимального оператора.

Важность изучения операторов с мажорантой слабого типа также подчеркивается работами [32], [33], [34] (см. также [35], 16.2.8).

Естественным контекстом для результатов о сходимости почти всюду является абстрактная теория меры, поэтому возникает вопрос о переформулировке упомянутых результатов в соответствующих терминах и получении утверждения, обобщающего их все. Основными объектами здесь будут выступать пространство с мерой (X, μ) (вопросы, связанные с сигма-алгебрами множеств, не рассматриваются, поэтому их упоминание опускается) и пространства Лебега $L^p(X, \mu)$ $(p \geq 1)$ и Орлича $\Phi(L)(X, \mu)$. Рассматриваемая ситуация допускает еще несколько обобщений. Во-первых, семейство приближающих операторов не всегда образует последовательность, но вместо них можно использовать направленности, в этом случае множество, которым заиндексировано семейство, может не быть линейно упорядоченным, а лишь частично упорядоченным, а также несчетным. Во-вторых, оказывается возможным (и полезным, как будет видно далее) рассмотреть немного более общий случай, а именно, когда в пределе почти всюду получается не исходная функция, а результат действия на нее некоторого непрерывного линейного оператора (случай исходной функции соответствует тождественному оператору). Такого подхода оказывается достаточно для обобщения утверждений о кубических частичных суммах и аналогичных (т.е. в которых фигурирует пространство $L(X, \mu)$).

Однако для обобщения сходимости по Прингсхейму необходимо сделать еще одно наблюдение: в доказательстве классических результатов

---

[31] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. - М.: Изд. ЛКИ, 2008. - 346 с.

[32] Кижнашвили Л.В. Об отсутствии слабого типа (1.1) у некоторых классических операторов, возникающих в многомерном гармоническом анализе // Матем. заметки. - 2004. - Т.76. - №2. - С.183-195.

[33] Семенова Т.Ю. О некоторых максимальных операторах, связанных с операцией свертки // Фундамент. и прикл. матем. - 2000. - Т.6. -- №2. - С.565-581.

[34] Stein E. On Limits of Sequences of Operators // Annals of Mathematics. - 1961. - V.74. - No 1. - P.140-170.

[35] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении, т.2 - М.:Мир, 1985. - 400 с.

зачастую многомерный тор существенно рассматривался как декартово произведение торов меньшей размерности (в частности, двумерный — как произведение двух одномерных). Это разбиение в произведение допускает следующую интерпретацию: нам даны изначально два пространства (с мерой), и мы изучаем их декартово произведение. Пространство интегрируемых функций на произведении получается как пополнение (по подходящей норме) алгебраического тензорного произведения пространств интегрируемых функций на сомножителях. Более того, если были даны линейные непрерывные операторы, заданные на пространстве интегрируемых функций каждого из пространств с мерой, то существует канонический оператор на пространстве функций на произведении пространств с мерой, в определенном смысле продолжающий каждый из исходных. Все классические ситуации описываются изложенным образом.

Однако, теорема о дифференцировании неопределенного интеграла Лебега остается верной и для локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций. Классическое понятие локальной интегрируемости использует топологию пространства, на котором задана функция, поэтому без дополнительных конструкций этот результат на абстрактный случай не обобщается. Одним из возможных способов обобщить эту ситуацию является рассмотрение так называемых разложимых пространств — определенного класса пространств с мерой, которые позволяют изучение функции свести к изучению ее на отдельных частях пространства, имеющих конечную меру.

Дальнейшее развитие этой теории заключается в рассмотрении произведения бесконечного числа пространств с мерой. Сначала это имеет смысл сделать в частном случае бесконечномерного тора и, соответственно, функций счетного числа переменных, 2π-периодических по каждой. Аналогом тригонометрической системы на бесконечномерном торе является система, состоящая из всевозможных конечных произведений комплексных экспонент от одной переменной. Эту систему систематически исследовал Йессен ([36]), и она была названа в его честь. Бесконечномерный тор в настоящее время представляет интерес для

---

[36] Jessen B. The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions // Acta Math. – 1934. – V.63. – P.249-323.

гармонического анализа, см., например, работы [37], [38], [39]. Холщевниковой Н.Н., например, был получен (в отличие от конечномерного случая) окончательный результат в вопросе сходимости почти всюду по кубам рядов Фурье. Представляет интерес эта тематика и для приложений в теории вероятностей и математической физике ([40], [41], [42], [43]). Поэтому актуальным является изучение сходимости почти всюду средних Фейера на бесконечномерном торе и переформулировка полученных результатов в терминах теории меры.

Цель работы

Обобщение классических результатов о сходимости почти всюду для случая тензорных произведений направленностей операторов с мажорантой слабого типа, получение новых результатов для классических методов разложения, исследование суммируемости рядов Фурье на бесконечномерном торе.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказана сходимость почти всюду результатов действия на функцию тензорных произведений направленностей операторов, имеющих мажоранту слабого типа и некоторое условие для предельного перехода.

2. Введено понятие локально интегрируемой функции на разложимом пространстве с мерой и доказан результат, аналогичный п.1, с некоторыми дополнительными условиями.

3. Полученные результаты применены к некоторым семействам операторов классического гармонического анализа, среди которых средние Фейера, Абеля-Пуассона, Марцинкевича, ряды Фурье-Хаара, средние

---

[37] Платонов С.С. О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе: аналоги теорем Джексона // Алгебра и анализ. - 2014. - Т.26. – №6. – С.99-120.

[38] Холщевникова Н.Н. Сходимость по кубам рядов Фурье функций счетного множества переменных // Труды Международной летней матем. Школы С. Б. Стечкина по теории функций. – Тула: ТулГУ, 2007. – С.145-149.

[39] Холщевникова Н.Н. Счетнократные нуль-ряды // Ортогональные ряды, теория приближений и смежные вопросы, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Бориса Сергеевича Кашина, Тр. МИАН, 2013. - Т.280. – С.288-299.

[40] Berg Ch. Potential theory on the infinite dimensional torus // Invent. Math. - 1976. – V.32. – P.49-100.

[41] Holley R., Stroock D.W. Diffusions on the infinite dimensional torus // J. Funct. Anal. – 1981. – V.42. – P.29-63.

[42] Taylor Th. J. On the Wiener semigroup and harmonic analysis on the infinite dimensional torus // Acta Appl. Math. - 1987. – V.10. - No 2. - P.131-143.

[43] Bendikov A., Saloff-Coste L. On the sample parts of diagonal Brownian motions on the infinite dimensional torus // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. – 2004. – V.40. - No 2. - P.227-254.

интегральные, а также к орторекурсивному разложению по системе брусов.

4. Доказана суммируемость почти всюду рядов Фурье на бесконечномерном торе для различных случаев возрастания индекса суммирования.

5. Получена интерпретация результата о сходимости на бесконечномерном торе в терминах теории меры и тензорных произведений.

Методы исследования

В работе использованы методы теории меры, гармонического анализа и геометрии банаховых пространств.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории кратных рядов Фурье, теории меры, гармоническом анализе в евклидовых пространствах и на топологических группах.

Соответствие паспорту научной специальности.

В диссертации изучается приближение функций на основе понятий меры и интеграла, а также теория функциональных пространств, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «Действительный анализ».

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Научный семинар "Тригонометрические и ортогональные ряды" механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора М. К. Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко, профессора М. И. Дьяченко (2015-2018 гг.);
- Научный семинар "Ортоподобные системы" механико - математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора Т. П. Лукашенко, доцента В. В. Галатенко, доцента Т. В. Родионова (2014 г., неоднократно);
- Научный семинар "Алгебры в анализе" механико - математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора А. Я. Хелемского, доцента А. Ю. Пирковского (2018 г.);
- Международные Саратовские зимние школы "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2014, 2016, 2018);

- International Workshop "Probability, Analysis and Geometry" (Москва, 2014);
- Воронежские зимние математические школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2015, 2017);
- Международные Казанские летние школы-конференции "Теория функций, её приложения и смежные вопросы" (Казань, 2015, 2017);
- Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 2015, 2016, 2017).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, 2 из них опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science и 1 входит в перечень ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 70 наименований. Общий объем диссертации составляет 61 страницу.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дан обзор публикаций, связанных с темой исследования, и история рассматриваемых вопросов.

В **первой главе** вводится основной объект исследования — тензорное произведение направленностей операторов на пространстве интегрируемых функций, доказывается теорема о сходимости почти всюду данных направленностей при определенных условиях. Определяется пространство локально интегрируемых функций на разложимом пространстве с мерой и доказывается утверждение о сходимости почти всюду при условиях, обобщающих условия для утверждения об интегрируемых функциях. Точнее, доказано следующее утверждение:

Теорема 1.3.1. *Пусть* (X^i, μ^i), (Y^i, ν^i), $i = 1, \ldots, D$, *— разложимые пространства с выбранными разложениями* $\widetilde{\Lambda}^i$, $\widetilde{\Xi}^i$, $X = \prod_{i=1}^{D} X^i$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^{D} \mu^i$, $Y = \prod_{i=1}^{D} Y^i$, $\nu = \bigotimes_{i=1}^{D} \nu^i$, $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$, $i = 1, \ldots, D$, *— направленности непрерывных линейных интегральных операторов (т.е. имеющих вид* $T^i_{n^i} f(x) = \int\limits_{X^i} K^i_{n^i}(x,u) f(u) d\mu^i(u)$*) с неотрицательными ядрами, действующих из соответстующих* $L^1_{\widetilde{\Lambda}^i - loc}(X^i, \mu^i)$ *в* $L^1_{\widetilde{\Xi}^i - loc}(Y^i, \nu^i)$, *таких, что каждый максимальный оператор* T^i *имеет* $\widetilde{\Lambda}^i \to \widetilde{\Xi}^i$*-локально слабый тип (1,1) и слабый тип* (∞, ∞) *и, кроме того, для любого* $i = 1, \ldots, D$ *и любой ограниченной функции* ϕ *на пространстве* X^i *выполнено* $\lim\limits_{n^i \in A^i} T^i_{n^i} \phi(y) = U^i \phi(y)$ ν^i*—почти всюду, где* $U^i : L^1_{\widetilde{\Lambda}^i - loc}(X^i, \mu^i) \to L^1_{\widetilde{\Xi}^i - loc}(Y^i, \nu^i)$ *— непрерывные линейные операторы. Тогда для любой* $f \in L(\log^+ L)^{D-1}_{\widetilde{\Lambda} - loc}(X)$ *выполнено* $\lim\limits_{n \in A} T_n f(y) = U f(y)$ ν*—почти всюду, где* A *— произвольная поднаправленность тензорного произведения направленностей* $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$, $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}^1 \times \cdots \times \widetilde{\Lambda}^D$, $\widetilde{\Xi} = \widetilde{\Xi}^1 \times \cdots \times \widetilde{\Xi}^D$ *и* $U = U^1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} U^D : L^1_{\widetilde{\Lambda}^i - loc}(X, \mu) \to L^1_{\widetilde{\Xi}^i - loc}(Y, \nu)$.

Глава 2 посвящена применению результатов, полученных в главе 1, для некоторых классических систем приближения гармонического анализа, в частночти, для средних Фейера, Абеля-Пуассона, Марцинкевича, средних интегральных, а также для орторекурсивного разложения по системе брусов. Приводятся описания перечисленных методов разложения и установленных результатов. Приведем один из этих результатов:

Теорема 2.2.2. *Пусть* $f \in L(\log^+ L)^{D-1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $S_n(x)$ *- частичные суммы орторекурсивного разложения по системе характеристических функция брусов D-регулярной системы с вложением* $\Xi = \{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Тогда* $S_n(x)$ *сходятся к* f *почти всюду.*

В **Главе 3** исследуется суммируемость почти всюду средних Фейера на бесконечномерном торе. Полученные утверждения также верны и для некоторых других методов суммирования. Результаты для бесконечномерного случая опираются на результаты для конечномерного, в некотором смысле являясь их следствиями. Таким образом, при переходе к бесконечномерному случаю эффект заключается не в индивидуальных свойствах семейств приближающих операторов на каждом сомножителе, а в свойствах, которыми обладают конечномерные произведения. В терминах теории меры результат здесь формулируется так:

Теорема 3.2.1. *Пусть* (X^k, μ^k), $k \in \mathbb{N}$ *— пространства с мерой,* $\mu_k(X^k) = 1$, *для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *задана направленность операторов* $\{T^k_{n^k}\}_{n^k \in A^k}$, *переводящая* $L^1(X^k, \mu^k)$ *в себя, каждая из которых имеет "нулевой" элемент, тогда*

а) если для любого $p \in \mathbb{N}$ *и любой функции* $f \in L^1\left(\prod\limits_{k=1}^{p} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k\right)$ *направленность* $\widehat{\bigotimes\limits_{1\le k\le p}} T^k_{n^k} f$ *сходится* $\bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k$*-почти всюду к* f, *то для любой функции* $f \in L^1\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k\right)$ *направленность* $\widehat{\bigotimes\limits_{1\le k\le\infty}} T^k_{n^k} f$ *сходится* $\bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k$*-почти всюду к* f.

б) если для любого $p \in \mathbb{N}$ *и любой функции* $f \in L(\log^+ L)^{p-1}\left(\prod\limits_{k=1}^{p} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k\right)$ *направленность* $\widehat{\bigotimes\limits_{1\le k\le p}} T^k_{n^k} f$ *сходится*

$\bigotimes\limits_{k=1}^{p}\mu^k$*-почти всюду к* f*, то для любой функции* $f \in \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} L(\log^+ L)^r \left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty}\mu^k\right)$ *направленность* $\hat{\bigotimes\limits_{1\leq k\leq\infty}} T^k_{n^k} f$ *сходится* $\bigotimes\limits_{k=1}^{\infty}\mu^k$*-почти всюду к* f.

Заключение

В диссертации разработана техника применения проективных тензорных произведений для изучения сходимости почти всюду, получен результат, обобщающий классические теоремы о сходимости почти всюду, применением которого к классическим системам разложений получен результат о сходимости почти всюду для промежуточного случая регулярности возрастания индекса суммирования. Было введено понятие локально интегрируемой функции на пространстве с мерой и получены результаты, аналогичные упомянутым выше. Найдены условия для суммирования почти всюду рядов Фурье на бесконечномерном торе и получена инерпретация в терминах тензорных произведений.

Полученные в диссертации результаты дают задел на последующие исследования в данной области. В частности, актуальным является вопрос о неусиляемости накладываемых требований, ответ на который зависит от свойств пространства с мерой и заданной направленности операторов. Разработанные методы могут помочь в решении до сих пор не решенной задачи классического анализа — окончательном описании в терминах классов Орлича функций, ряд Фурье которых сходится почти всюду к разлагаемой функции. Кроме того, результаты могут найти применение также и в изучении сходимости кратных рядов Фурье.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Тарасу Павловичу Лукашенко за постановку задач, плодотворные обсуждения и постоянное внимание к представленной работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах, входящих в перечень ВАК:

[1] Фуфаев Д.В. Промежуточный случай регулярности в задаче дифференцирования кратных интегралов// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т.14. – № 4. – С.401-407.

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI:

[2] Фуфаев Д.В. О сходимости произведений направленностей операторов// Вестник Московского университета. Серия I. Матем., мех. – 2016. – № 4. – С.23-33.

[3] Фуфаев Д.В. Суммирование рядов Фурье на бесконечномерном торе// Матем. заметки. – 2018. – Т.103. – № 6. – С.927-935.

Иные публикации:

[4] Фуфаев Д.В. О промежуточном случае регулярности в задаче дифференцирования многомерных интегралов // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова, Саратов, 27 января - 3 февраля 2014 г. – Саратов: Научная книга, 2014. – С.276-279.

[5] Фуфаев Д.В. D-регулярная суммируемость рядов Фурье // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 27 января - 2 февраля 2015 г. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. – С.147-148.

[6] Фуфаев Д.В. Сходимость средних Марцинкевича // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2015. – Т.51. – С.452-453.

[7] Фуфаев Д.В. Бесконечнократные тензорные произведения и сходимость почти всюду // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2017. – Т.54. – С.380-382.

[8] Фуфаев Д.В. Операторы слабого типа и сходимость почти всюду// Современные методы теории краевых задач: Материалы международной конференции, посвящённой 90-летию Владимира Александровича Ильина, Москва, 2-6 мая 2018 г. - Москва: МАКС Пресс, 2018. – С. 228.

[9] Фуфаев Д.В. Сходимость операторов с мажорантой слабого типа и локально интегрируемые функции// Депонировано в ВИНИТИ РАН. – 2018. – № 47-В2018. – С. 1-19.

Отпечатано в копи-центре « СТ ПРИНТ »
Москва, Ленинские горы, МГУ, 1 Гуманитарный корпус.
e-mail: globus9393338@yandex.ru тел.: 8 (495) 939-33-38
Тираж 100 экз. Подписано в печать 01.10.2018 г.