

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи



Березинская Светлана Николаевна

О механических системах с односторонними
неголономными связями.

Специальность 01 02 01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

19 ИЮЛ 2007



Москва 2007

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и
мехатроники механико-математического факультета
МГУ им М В Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических
наук Е И Кугушев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических
наук, профессор И И Косенко

кандидат физико-математических
наук А С Сумбатов

Ведущая организация: Институт прикладной математики
им М В Келдыша
Российской академии наук

Защита состоится 21 сентября 2007 года в 16 00 часов на засе-
дании специализированного совета Д 501 001 22 по механике при
Московском государственном университете им М В Ломоносо-
ва по адресу 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-
математический факультет, аудитория 16-10

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-
математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 2007 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501 001.22
доцент



В А Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория механических систем с односторонними связями, как и теория неголономных систем, являются важными разделами современной теоретической механики. Развитие методов их изучения и расширение класса изучаемых систем является важной и актуальной задачей теоретической механики. В диссертации исследуются новые типы односторонних связей — неголономные и условные. Показывается, что методы классической теории удара могут быть расширены и применены к системам с такими связями. В частности метод Рауса игнорирования циклических координат, применяемый при изучении систем с двухсторонними связями, распространяется на системы с односторонними связями.

Цель работы. Изучение систем с односторонними неголономными связями и условными связями и иллюстрация разработанных методов на решении конкретных задач.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Они базируются на классических утверждениях механики. Среди новых результатов следует отметить расширение методов классической теории удара на системы с новыми типами односторонних связей (неголономные и условные) и распространение метода Рауса игнорирования циклических координат на системы с односторонними связями. Новыми являются также примеры механических систем с указанными типами односторонних связей.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы строго обоснованы, они базируются на утверждениях теоретической механики.

Используемые методы. В работе используются методы аналитической механики и функционального анализа, которые прилагаются к рассматриваемым механическим системам.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер, полученные в ней результаты дают возможность изучать свойства механических систем как с классическими, так и с новыми типами односторонних связей. Причем это относится как к голономным, так и к неголономным механическим системам.

Апробация работы и публикации. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на сле-

дующих научных семинарах и конференциях

- Семинар по гамильтоновым системам и статистической механике кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством академика В В Козлова, чл -корр РАН Д В Трещева, проф С В Болотина, 2003 г ;
- Научная конференция Ломоносовские чтения МГУ им М.В Ломоносова, апрель 2003 г ;
- Семинар по динамике относительного движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл -корр РАН В В Белецкого, проф Ю Ф Голубева, доц К Е. Якимовой, доц Е В Мелкумовой, 2004 г ,
- Семинар отдела механики ВЦ РАН под рук проф С Я Степанова, проф А В. Карапетяна, 2004 г ,
- Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 23-28 августа 2004 г.,
- Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством академика В В Румянцева, чл -корр РАН В.В. Белецкого, проф А В Карапетяна, 2005 г

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в печатных работах, список которых приведен в конце автореферата

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 54 наименований. Общий объем диссертации — 90 страниц

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, связанных с односторонними и двусторонними голономными и неголономными связями, также приведено краткое содержание диссертации

В первой главе рассматриваются механические системы с неголономными односторонними и условными односторонними связями

Условия идеальности связей и принцип Даламбера–Лагранжа формулируются в интегральной форме и обобщаются на случай односторонних связей. На этой основе формулируются основные законы движения. Выводятся уравнения движения в форме уравнений Лагранжа 1-го и 2-го рода. Формулируется и доказывается метод Рауса понижения порядка системы. Рассмотрение ведется на языке возможных перемещений, используется аппарат функций ограниченной вариации.

Рассматривается система из N материальных точек, перемещающихся в пространстве под действием приложенных к ним сил. Координаты точек объединяются в вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, $n = 3N$.

Удерживающие или *двухсторонние связи*, наложенные на систему, описываются как система уравнений $A(x, t)x + b(x, t) = 0$, где $A = \|a_{ij}(x, t)\| - n \times k$ матрица, $b \in R^k$.

Неудерживающие или *односторонние связи* включают в свое описание системы неравенств относительно координат и скоростей точек. Если связи удастся привести к виду, не содержащему скоростей, то они называются *голономными*. Иначе — *неголономными*.

Голономные односторонние связи имеют вид $g(x, t) = (g_1, g_2, \dots, g_m) \leq 0$, где $g_i(x, t) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$.

В диссертации рассматриваются неголономные односторонние связи линейные по скоростям. Они задаются системой неравенств $W(x, t)x + h(x, t) \leq 0$, где W — матрица $n \times l$, $h \in R^l$.

В диссертации рассматриваются *условные связи* — это удерживающие связи, выполнение которых требуется только на границе каких-то других односторонних связей $C(x)x + d(x, t) = 0$ при условии, что $g_1(x) = 0$, где C — матрица $n \times r$, $d \in R^r$.

Пространством возможных перемещений $V(x, t)$ в точке (x, t) назовем множество векторов $\delta x \in R^n$, удовлетворяющих условиям

$$A(x, t)\delta x = 0, \quad \partial g(x, t)\delta x \leq 0, \quad C(x, t)\delta x = 0, \quad W(x, t)\delta x \leq 0,$$

(здесь i -я строка матрицы $\partial g(x, t)$ — это вектор $\partial g_i = \partial g_i(x, t)/\partial x$). Условия $A(x, t)\delta x = 0$ и $W(x, t)\delta x \leq 0$ проверяются при любых (x, t) , а неравенства $\partial g_i(x, t)\delta x \leq 0$ надо проверять на границе связи, т.е. в тех точках, где $g_i(x, t) = 0$. Равенство $C(x, t)\delta x = 0$ надо проверять в тех точках, где $g_1(x, t) = 0$.

Во *втором разделе* обсуждается каким должны быть пространство траекторий движения В системах с односторонними связями возможны скачки скорости (при ударах о связь) и, в частности, скорости точек системы могут быть кусочно-постоянными функциями времени Поэтому для их описания предлагается использовать пространство функций ограниченной вариации, являющееся минимальным полным линейным пространством, содержащим кусочно-постоянные функции Считается, что траектории движения таковы, что скорости движения представляют собой функции ограниченной вариации При этом сами траектории являются, по крайней мере, абсолютно непрерывными функциями Уравнения движения Ньютона $M\dot{x} = F(x, x, t)$ записываются в форме *n уравнений с мерами*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x} dt, \quad M\dot{x}(t) = x(t+0) + \int_{t_0}^t F(x, x, t) dt$$

(M — матрица масс точек системы, F — сводный вектор сил), в которых интегралы понимаются как интегралы Римана–Стилтьеса Используется также краткая запись этих уравнений $Mdx = Fdt$, и терминология мер Лебега–Стилтьеса, в которой, например, $dx(t)$ описывается как мера Лебега–Стилтьеса с производящей функцией $x(t)$

В *третьем и четвертом разделах* принцип Даламбера–Лагранжа для систем с двухсторонними идеальными связями формулируется в интегральной форме, которая эквивалентна классической, локальной Затем этот принцип распространяется на системы с односторонними связями Дадим его формулировку

Пусть $x(t)$ — траектория движения Считается, что систему можно освободить от связей и добавить реакцию связей таким образом, что $x(t)$ останется траекторией движения освобожденной системы При этом будут выполнены уравнения движения с мерами $Mdx = F(x, x, t)dt + d\rho(t)$, где $\rho(t)$ — некоторые функции ограниченной вариации, являющиеся производящими функциями реакций связей $d\rho(t)$ (они могут иметь скачки, сосредоточенные на множестве тех моментов времени, в которые траектория $x(t)$ выходит на границу односторонних ограничений)

Возможной вариацией кривой $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ будем называть любую непрерывную вектор-функцию $\nu(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t), \dots, \nu_n(t))$,

если в каждый момент времени вектор $\nu(t)$ является вектором возможных перемещений, т.е. $\nu(t) \in V(x(t), t)$ для всех t

Связи называются *идеальными*, если для любой траектории системы $x(t)$ и для любой ее возможной вариации $\nu(t)$ интегральная элементарная работа сил реакции связей неотрицательна, т.е.
$$\Phi(\nu) = \int_{t_0}^{t_1} (\nu(t), d\rho(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \nu_i(t) d\rho_i(t) \geq 0$$
 Для удерживающих связей вариация $-\nu(t)$ является возможной одновременно с $\nu(t)$, и это неравенство эквивалентно равенству $\Phi(\nu) = 0$ Для односторонних связей оно означает, что, при выходе траектории системы на границу удерживающих связей, реакция связей направлена внутрь области, допустимой этими связями

Принцип Даламбера-Лагранжа Пусть абсолютно непрерывная кривая $x(t)$ удовлетворяет идеальным связям, наложенным на систему, а ее производная существует почти всюду и является функцией ограниченного изменения. Кривая $x(t)$ является траекторией движения тогда и только тогда, когда для любой возможной вариации $\nu(t)$ выполнены соотношения
$$\Psi(\nu) = \int_{t_0}^{t_1} (M d\dot{x} - F(x, x, t) dt, \nu(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n (m_i dx_i - F_i(x, \dot{x}, t) dt) \nu_i(t) \geq 0$$

Используя известные утверждения функционального анализа выводим отсюда *уравнения Лагранжа 1-го рода*. Кривая $x(t)$ является траекторией движения системы с идеальными связями тогда и только тогда, когда найдутся такие векторные меры Лебега-Стилтьеса $d\lambda = (d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_k)$, $d\mu = (d\mu_1, d\mu_2, \dots, d\mu_m)$, $d\xi = (d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_r)$ и $d\eta = (d\eta_1, d\eta_2, \dots, d\eta_l)$, что $M d\dot{x} = F dt + A' d\lambda + \partial g' d\mu + C' d\xi + W' d\eta$, где знак $()'$ означает транспонирование матриц. При этом каждая мера $d\mu_i$ и $d\eta_j$ неположительна и сосредоточена на множестве моментов времени, в которые $g_i(x(t), t) = 0$ и $\sum_{i=1}^n w_{ji}(x, t) x_i + h_j(x, t) = 0$ соответственно. Каждая мера $d\xi_i$ сосредоточена на множестве моментов времени, в которые $g_1(x(t), t) = 0$

В *пятом разделе* приводятся условия на скачках, представляющие собой соотношения между скоростями точек системы сразу до и после удара о границу односторонней связи. Функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\xi(t)$ и $\eta(t)$, как функции ограниченной вариации, однозначно рас-

кладываются на сумму трех функций — абсолютно непрерывной, непрерывной сингулярной и функции скачков. В точках скачка мер (и только в них) траекторная скорость x также может иметь скачок. Обозначив эти скачки соответственно $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и Δx , получаем условие на скачках $M\Delta x = A'\Delta\lambda + \partial g'\Delta\mu + C'\Delta\xi + W'\Delta\eta$.

В шестом разделе первой главы из принципа Даламбера–Лагранжа выводятся известные основные законы динамики системы.

Теорема об изменении количества движения. Если удерживающие, и односторонние связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поступательный сдвиг всех точек системы как твердого тела вдоль какого-нибудь направления постоянного во времени, то проекция количества движения системы на это направление является абсолютно непрерывной функцией и скорость ее изменения равна суммарной проекции на это направление вектора активных сил.

Теорема об изменении момента количества движения. Если удерживающие и односторонние связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поворот всех точек системы как твердого тела вокруг какой-нибудь постоянной оси проходящей через начало координат, то момент количества движения системы относительно этой оси является абсолютно непрерывной функцией и скорость его изменения равна суммарной проекции на эту ось векторов моментов активных сил.

В седьмом разделе выводятся уравнения Лагранжа 2-го рода. Пусть удерживающие связи голономны, и $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ являются обобщенными координатами. Пусть на систему наложены односторонние голономные связи $g_i(q, t) \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, группа условий связей $C(q, t)q + d(q, t) = 0$, при $g_1(q, t) = 0$, где $C - s \times r$ матрица, $d \in R^r$, неголономные односторонние связи $W(q, t)q + h(q, t) \leq 0$, где $s -$ число связей, $W - s \times l$ матрица, $h \in R^l$. Введем вектор обобщенных сил $Q = (\partial x / \partial q)' F$. Тогда уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$d \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} dt = Q dt + \left(\frac{\partial g}{\partial q} \right)' d\mu + C'(q, t) d\xi + W'(q, t) d\eta$$

В восьмом разделе формулируется теорема Аппеля, о том, что при ударе о границу односторонней связи проекция вектора обоб-

щенных импульсов $p(t) = \partial T / \partial q$ на плоскость касательную поверхности удара сохраняются

В девятом разделе метод Рауса игнорирования циклических координат распространяется на системы с односторонними связями

Пусть силы имеют силовую функцию $U(q, t)$ Введем функцию Лагранжа $L(q, \dot{q}, t) = T + U$ Обобщенная координата q_i называется *циклической*, если она не входит явно в функцию Лагранжа L $\partial L / \partial q_i = 0$ Назовем ее *отделяющейся*, если от нее не зависят связи, т.е. для всех j, p и k выполняется условие

$$\frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial d_j}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial w_{pk}}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial h_j}{\partial q_i} = 0$$

Пусть координаты q_r, q_{r+1}, \dots, q_s являются отделяющимися циклическими Им соответствуют циклические интегралы $\partial L / \partial \dot{q}_i = \beta_i = \text{const}, i = r, r+1, \dots, s$ Считая выполненными обычные условия независимости, разрешаем эти соотношения относительно циклических скоростей и составляем функцию Рауса $R(q_{\Pi}, \dot{q}_{\Pi}, \beta, t) = L - \dot{q}_i \beta$ ($q_{\Pi} = (q_1, \dots, q_{r-1})$ и $\dot{q}_{\Pi} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{r-1})$ — позиционные координаты и скорости)

Теорема Рауса Пусть $q(t)$ — траектория движения нашей системы, тогда для позиционных координат выполнены уравнения Лагранжа второго рода, в которых в качестве функции Лагранжа берется функция Рауса

$$d \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\Pi}} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_{\Pi}} dt = \left(\frac{\partial g}{\partial q_{\Pi}} \right)' d\mu + C' d\xi + W' d\eta.$$

Во второй главе для введенных новых типов связей рассматриваются уравнения движения в рамках классической лагранжевой теории удара Данные уравнения имеют больший практический смысл по сравнению с уравнениями с мерами Исследования конкретных систем, произведенные в третьей главе, опираются именно на эти уравнения В диссертации они называются “основные уравнения теории удара” Переход от уравнений с мерами к уравнениям теории удара можно произвести, если функции, описывающие связи, имеют второй класс гладкости Тогда скорость движения имеет только две составляющие — абсолютно непрерывную функцию и функцию скачков

В *первых двух разделах* известные положения теории систем с односторонними связями распространяются на случай неголономных и условных связей. Рассмотрение производится на языке возможных перемещений. Пусть в момент времени \bar{t} произошел удар, т.е. система вышла на границу односторонних ограничений. Предполагается, что существуют значения $v^- = x(\bar{t} - 0)$ и $v^+ = x(\bar{t} + 0)$. Величина $P = M(v^+ - v^-) = M\Delta v$ называется *ударным импульсом* реакции односторонних связей. Связи называются *идеальными при ударе*, если на множестве возможных перемещений выполняется $P\delta x \geq 0$. В этом случае выполняется *основное уравнение теории удара* на множестве возможных перемещений $(M\Delta v, \delta x) \geq 0$.

Выводятся *уравнение Лагранжа первого рода для удара* если кривая $x(t)$, удовлетворяющая идеальным связям является траекторией движения то в момент удара о границу связей найдутся такие вектора $\lambda \in R^k, \mu \in R^m, \xi \in R^j, \eta \in R^l$, что

$$M\Delta v = A'\lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)'\mu + C'\xi + W'\eta$$

При этом векторы μ и η по координатам неположительны $\mu \leq 0$ и $\eta \leq 0$, т.е. $\mu_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$, и $\eta_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, l$.

В *третьем разделе* формулируется основное уравнение удара в лагранжевых координатах. Пусть q — лагранжевы координаты ($x = x(q, t)$), $T = T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}(Mx, \dot{x})$ — кинетическая энергия. Уравнение удара в лагранжевых координатах

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A'\lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial q}\right)'\mu + C'\xi + W'\eta, \text{ где } \mu \leq 0, \eta \leq 0$$

В *четвертом разделе* известные основные законы динамики удара распространяются на новые типы односторонних связей.

Теорема об изменении количества движения. Если связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поступательный сдвиг всех точек системы как твердого тела вдоль какого-нибудь направления постоянного во времени, то проекция количества движения системы на это направление сохраняется.

Теорема об изменении момента количества движения. Если связи, наложенные на систему, идеальны и допускают поворот всех точек системы как твердого тела вокруг какой-нибудь постоянной

оси, то скорость изменения проекции момента количества движения системы на эту ось сохраняется

В *пятом разделе* распространяется на новые типы связей теорема Аппеля, о том, что при ударе о границу односторонней связи проекция вектора обобщенных импульсов $p(t) = \partial T / \partial q$ на плоскость касательную поверхности удара сохраняются

В *шестом разделе* рассматривается метод Рауса игнорирования циклических переменных, обоснованный в первой главе. Здесь он обосновывается в терминах лагранжевой теории удара. На примере односторонних голономных связей $g(q, t) \leq 0$ показывается, что для введенной функции Рауса при ударе условия скачка будут выглядеть так

$$\Delta \frac{\partial R}{\partial q_{\Pi}} = \left(\frac{\partial g}{\partial q_{\Pi}} \right)' \mu$$

Эти условия такие, какие были бы выписаны для системы, описываемой позиционными координатами и скоростями с лагранжианом в виде функции Рауса. Значит, в случае, когда циклические переменные отделяющиеся мы можем их исключать и рассматривать с систему с односторонними связями, но с меньшим числом степеней свободы.

В заключительном *седьмом разделе* главы доказывается, что в системах с односторонними линейными неголономными связями в общем случае движение носит безударный характер, т.е. при выходе на границу ограничений скачка скорости не происходит.

Рассмотрим натуральную механическую систему $L = \frac{1}{2}(M(q)\dot{q}, \dot{q}) + U(q)$. Пусть на систему наложены только неголономные односторонние связи $W(q)\dot{q} + d(q) \leq 0$, причем все компоненты вектора d неотрицательны $d \geq 0$. Считаем, что при ударе полная энергия может только рассеиваться. В точках скачка координаты и, значит, потенциальная энергия остаются непрерывными. Следовательно, в них может рассеиваться только кинетическая энергия $(Mq^+, q^+) \leq (Mq^-, q^-)$.

Допустим, что в момент $t = \bar{t} - 0$ траектория вышла на ограничение $Wq^- + d = 0$. Показывается, что $\dot{q}^+ = q^-$, т.е. скачки скорости отсутствуют.

Третья глава посвящена рассмотрению примеров конкретных механических систем с неголономными (и условными) односторон-

ними связями на основе теории, развитой во второй главе

В *первом разделе* рассматривается задача о плоском теле с каналом. Это плоское тело, свободно движущееся по гладкой плоскости. Внутри тела вырезан тонкий канал K . Пусть в плоскости задана абсолютная система координат $O\xi\eta$ и в точке $(0, 0)$ установлен "столбик". В начальный момент тело расположено так, что этот столбик попадает в канал K . На движение тела наложена односторонняя связь, состоящая в том, что "столбик" располагается в канале K . Толщину "столбика" и ширину канала считаем нулевыми.

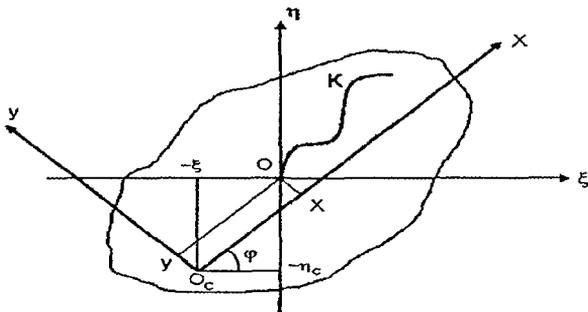


Рис 1 Плоское тело с каналом

Свяжем с телом систему координат O_cxy (см рис 1), начало которой O_c совпадает с центром тяжести тела. Будем считать, что канал K в теле это гладкая кривая, которая задается параметрически

$$x = x_K(s), \quad y = y_K(s), \quad 0 \leq s \leq a,$$

где s — натуральный параметр, длина вдоль кривой K . Сама кривая имеет длину $a > 0$. Положение тела описывается тройкой (x, y, φ) , где (x, y) — координаты начала абсолютной системы координат O в связанной системе, а φ — угол наклона оси O_cx связанной системы координат по отношению к оси $O\xi$ абсолютной системы. Массу тела считаем единичной. Лагранжиан системы $L = \frac{1}{2}(s^2 + r^2(s)\varphi^2 + 2\mu(s)s\varphi) + \frac{J\varphi^2}{2}$, где J — центральный момент инерции тела, $r = (x_K, y_K)$, $v = \frac{dr}{ds}$, $\mu = (r \times v)_z = -x'_K y_K + y'_K x$, и использовано, что $v^2 = 1$, так s — это натуральный параметр

На систему наложено две односторонних связи $-s \leq 0$, $s - a \leq 0$. Координата φ является циклической и отделяющейся. Циклический интеграл имеет вид $(r^2 + J)\dot{\varphi} + \mu s = \beta$. Функция Рауса

$$R = L - \beta\dot{\varphi} = \frac{s^2}{2} \left(1 - \frac{\mu^2}{r^2 + J} \right) + s \frac{\mu\beta}{J + r^2} - \frac{\beta^2}{2(J + r^2)}$$

Это система с одной степенью свободы. Она интегрируется в квадратурах. При абсолютно упругих соударениях интеграл энергии позволяет нарисовать фазовый портрет. Общий характер движения — периодическое вращение по углу φ и периодические же движения с ударами в канале.

Во втором разделе исследуется система с условной односторонней связью — однородный диск на горизонтальной плоскости, движение которого ограничено абсолютно шероховатой прямой.

По гладкой плоскости Oxy скользит однородный диск единичной массы и радиуса R . Положение диска можно описать тремя параметрами (x, y, φ) , где (x, y) — координаты центра диска, а φ — угол его поворота. Движение диска ограничено полуплоскостью $y \geq R$. При выходе на границу, т.е. на прямую $y = R$, обод диска касается прямой $y = 0$. Предположим, что контакт диска с этой прямой является абсолютно шероховатым: $R - y \leq 0$ и $x + R\dot{\varphi} = 0$ при $y - R = 0$. Обозначим J — центральный момент инерции диска. Для использования теоремы Рауса, перейдем к координатам (u, y, φ) , где $u = x + R\varphi$. Тогда связи и лагранжиан системы приобретут следующий вид:

$$R - y \leq 0, \quad u = 0, \quad \text{при } y - R = 0,$$

$$L = \frac{1}{2}((\dot{u} - R\dot{\varphi})^2 + \dot{y}^2) + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

Координата φ является циклической и отделяющейся. Исключив методом Рауса циклическую переменную, получим систему с теми же связями и Лагранжианом $R = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{Ju^2}{2(J + R^2)} - \frac{R\beta u}{J + R^2} - \frac{\beta^2}{2(J + R^2)}$

Рассмотрим абсолютно упругий (сохраняется энергия системы) одиночный удар. Поскольку в момент удара мы выходим на границу сразу двух неудерживающих связей, то скорости после удара \dot{y}^+ и u^+ восстанавливаются неоднозначно. Если обозначить h — энергию системы, то

$$y^{-2} + \frac{Ju^{-2}}{J + R^2} = y^{+2} + \frac{J\dot{u}^{+2}}{J + R^2} = 2h.$$

Из условия односторонности имеем $y^+ \geq 0$, т.е. (на плоскости (u^+, y^+)) реализуется только правая половина дуги эллипса

Рассмотрим простой случай $y^- < 0$, $x^- > 0$, $\varphi^- = 0$. Здесь $u^- = x^- > 0$. Выберем на дуге нижнюю точку $y^+ = 0$, $\frac{J u^{+2}}{J + R^2} = 2h$, $u^+ < 0$. Тогда $x^+ < x^-$ и при $\frac{R^2}{J} \leq 1$ или при достаточно большом значении y^{-2} будет $x^+ < 0$. Видно, что здесь в принципе возможно даже возникновение ситуации при которой диск будет отскакивать в сторону противоположную первоначальному горизонтальному движению.

Для однозначности решения рассматривается модель удара, из которой можно получить дополнительные условия — это задание степени “шероховатости” прямой, о которую ударяется диск. Скорость u характеризует величину отклонения значений x и φ от таких, при которых диск катится по горизонтальной прямой без проскальзывания (т.е. от $u = 0$). Для абсолютно гладкого случая положим $\dot{u}^+ = \dot{u}^-$, а для абсолютно шероховатого $\dot{u}^+ = 0$. В линейном приближении этот закон можно задать следующим образом $u^+ = k u^-$, где $(1 - k)$, $0 \leq k \leq 1$ — степень шероховатости. Тогда $\dot{y}^+ = \sqrt{2h(1 - k^2) + k^2 \dot{y}^{-2}}$.

В *третьем разделе* рассматривается система с двусторонней неголономной связью — двусторонний конек Чаплыгина. Исследуется его свободное движение и удар о горизонтальную прямую.

Пусть по плоскости движется плоское тело с коньком, причем центр масс тела совпадает с коньком. Обозначим (x, y) координаты центра масс тела (рис. 2). Конек углом φ наклона своего лезвия

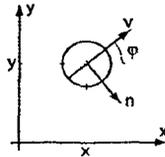


Рис. 2 Двусторонний конек

к оси Ox . Ограничение на движение состоит в том, что скорость точки тела, совпадающего с коньком, направлена по лезвию конька $-x \sin \varphi + y \cos \varphi = 0$

Считаем массу конька единичной. Обозначим J — момент инерции тела относительно центра масс. Уравнения Лагранжа первого рода имеют вид

$$x = -\sin \varphi \lambda, \quad y = \cos \varphi \lambda, \quad \dot{\varphi} = 0,$$

где $\lambda(t)$ некая функция. Анализ уравнений показывает, что $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 = \text{const}$, т.е. величина линейной скорости центра масс постоянна. Также $\varphi = at + b$, т.е. конек вращается с постоянной угловой скоростью a . С этой же угловой скоростью поворачивается и вектор линейной скорости центра масс. Значит, центр масс движется по окружности радиуса $r = v/a$, и вектор конька направлен по касательной к этой окружности (рис. 3).

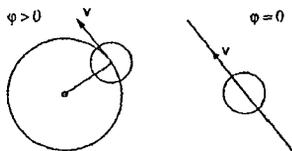


Рис. 3 Свободное движение двустороннего конька

Далее рассматривается удар двухстороннего конька о голономную связь. Пусть на движение двухстороннего конька наложена голономная односторонняя связь $-y \leq 0$. Условия скачка имеют вид

$$\Delta x = -\xi \sin \varphi, \quad \Delta y = \xi \cos \varphi - \eta, \quad \Delta \varphi = 0,$$

где ξ и η — некоторые неизвестные нам константы, $\eta \leq 0$. Рассмотрим абсолютно упругий удар, т.е. такой, при котором сохраняется энергия. Тогда охраняется модуль скорости центра масс $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Угол поворота φ при ударе не меняется и скорости центра масс до и после удара параллельны. После удара конек будет двигаться по окружности того же радиуса. Эта окружность касается окружности, имевшейся до удара, и движение идет в противоположную сторону. В целом картина движения в этом случае такова.

Тело движется по окружности с постоянной скоростью так, что конек все время касается окружности. При ударе линейная скорость

центра масс меняется на противоположную, и тело начинает двигаться по окружности того же радиуса, которая касается предыдущей окружности в точке удара. После второго соударения процесс периодически продолжается (рис 4)

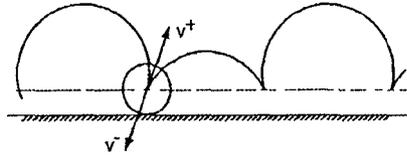


Рис 4 Удар двустороннего конька о полуплоскость

В четвертом разделе рассматривается система с односторонней неголономной связью — односторонний конек Чаплыгина. По гладкой плоскости движется диск радиуса ρ . Он снабжен “односторонним коньком”, который накладывает на движение диска одностороннюю неголономную связь $x \sin \varphi - y \cos \varphi \leq 0$

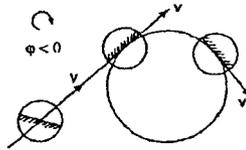


Рис 5 Свободное движение одностороннего конька

Движение системы описывается следующим образом. Диск все время вращается с постоянной угловой скоростью. Центр диска движется по прямой до тех пор, пока лезвие конька не повернется в положение, направленное по скорости движения центра. Затем движение перейдет по касательной к обычной круговой траектории диска с двухсторонним коньком (рис 5). Сойти с этой окружности траектория не сможет.

На движение одностороннего конька накладывается односторонняя голономная связь $-y \leq 0$. Будем считать удар об эту связь абсолютно упругим.

Как и раньше обозначим угол между лезвием конька и горизонтальной осью φ , а угол между вектором скорости и горизонтальной

осью — α Направление скорости после удара о прямую $y = -\rho$, где ρ — радиус диска конька, зависит от соотношения углов φ и α во время удара

1) Пусть $\varphi \geq \alpha$ Тогда модуль скорости сохраняется и угол падения равен углу отражения (рис 6)

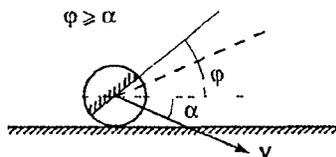


Рис 6 Момент удара одностороннего конька $\varphi \geq \alpha$

На рисунке показаны примеры движения конька в этом случае с отрицательной угловой скоростью (рис 7) На первом из них конек сначала движется по прямой, т.е. находясь на неограничении $x^- \sin \varphi - y^- \cos \varphi < 0$ Во время удара о горизонтальную прямую его скорость скачком меняется так, что ее величина остается постоянной, а угол падения равен углу отражения После удара конек продолжает двигаться по прямой, пока односторонняя неголономная связь не выходит на ограничение $x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0$, и конек начинает двигаться по окружности радиуса $r = |v|/|\dot{\varphi}|$

На втором рисунке конек сначала движется по окружности радиуса r После удара о горизонтальную прямую направление вектора скорости конька уже не совпадает с направлением лезвия конька, поэтому конек начинает двигаться по прямой до тех пор, пока эти

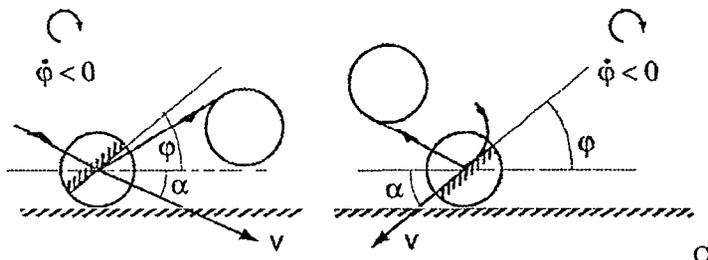


Рис 7 Примеры ударов одностороннего конька $\varphi \geq \alpha$

направления не совпадут, и конек выходит на движение по окружности первоначального радиуса r

2) Пусть $\varphi < \alpha$ Тогда угол падения уже не может быть равен углу отражения, так как в этом случае вектор скорости лежит в недопустимой для движения конька области (рис 8) Допустимая область отраженной скорости конька — клин с углом раствора φ , образованный лезвием конька и горизонтальной осью В рамках имеющихся предположений о системе однозначного ответа о движении конька дать нельзя Один из возможных путей нахождения точного значения угла отражения — это исключить одновременное срабатывание двух связей

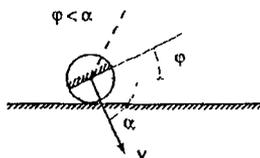


Рис 8 Момент удара одностороннего конька $\varphi < \alpha$

Для этого рассмотрим более сложную систему, в которой у некоторых связей имеется запаздывание реакции, что исключает их одновременность с другими связями Введем в систему дополнительный параметр s , характеризующий степень этого запаздывания Такая система будет совпадать с нашей исходной при $s = 0$, а знание о ее поведении при $s \rightarrow 0$ можно использовать для устранения неопределенности Чтобы ввести запаздывание реакции связи у конька, будем считать, что у конька есть люфт в том смысле, что он может проехать в запрещенном направлении расстояние s Будем называть такой конек *“односторонний конек с люфтом”*

Когда конек с люфтом ударяется о горизонтальную плоскость, его скорость отражается под тем же углом и конек проезжает расстояние s в запрещенном направлении Теперь, когда конек не ощущает воздействия первой связи, он испытывает удар о лезвие конька Считаем s таким малым, что лезвие конька не успевает повернуться, т.е. нет эффекта наличия угловой скорости Значит вектор скорости отразится от лезвия конька под тем же углом Спустя некоторое время, конек с люфтом снова ударяется о горизонтальную плоскость и

снова связи включаются не одновременно. Происходит серия соударений — поочередно о горизонтальную плоскость и лезвие конька (см рис 9)

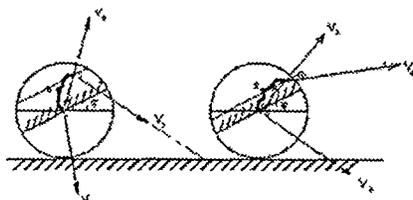


Рис 9 Односторонний конек с люфтом

Поскольку прямые, о которые происходит удар, параллельны и углы отражения вектора скорости не меняются, то схема изменения этих углов такая как, на рисунке 10, где ψ_1 — угол 1-го отражения вектора скорости при выходе на ограничение.

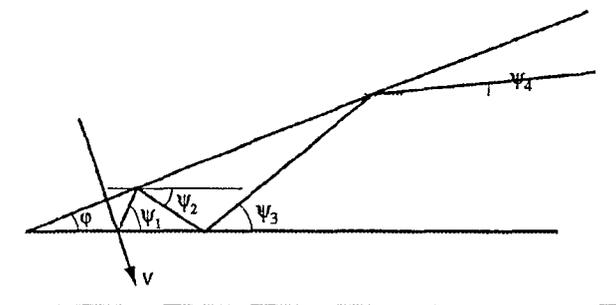


Рис 10 Преобразования углов отражения для случая $\varphi < \alpha$

Простые геометрические подсчеты показывают закономерность изменения углов

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \alpha, & \psi_2 &= -(\alpha - 2\varphi), \\
 \psi_3 &= \alpha - 2\varphi, & \psi_4 &= -(\alpha - 4\varphi), \\
 \psi_5 &= \alpha - 4\varphi, & \psi_6 &= -(\alpha - 6\varphi), \\
 \psi_7 &= \alpha - 6\varphi & & \dots
 \end{aligned}$$

Тк абсолютная величина углов ψ_i монотонно убывает, то наступит

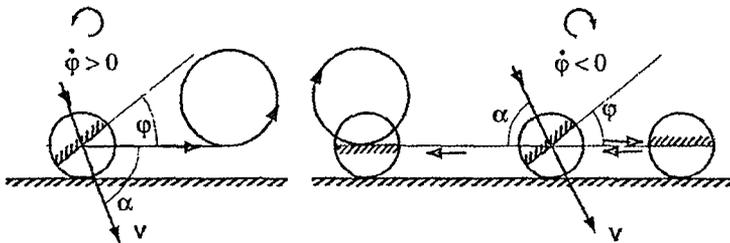


Рис 11 Примеры ударов одностороннего конька $\alpha = 2k\varphi$

момент, когда цепь ударов прекратится Это условие запишем так $\psi_i \geq 0$ для четных i

При уменьшении параметра s кратные соударения будут происходить все быстрее, рис 10 как бы сжимается, но углы остаются теми же. В результате конек отскочит от горизонтальной прямой под углом ψ_N

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда конек подходит к горизонтальной плоскости под углом $\alpha = 2k\varphi$ с некоторым натуральным $k > 1$ (рис 11) Тогда после удара конек будет двигаться вдоль плоскости Если угловая скорость положительная $\varphi > 0$, то в какой-то момент конек начнет двигаться по окружности Если же $\varphi < 0$, то рассмотренная модель последовательного наложения связей не позволяет определить характер движения конька, если направление лезвия совпадет с горизонталью

Для разрешения этого вопроса можно предложить новую модель, в которой уже будет учитываться угловая скорость вращения диска Предположим, что лезвие успело повернуться на малый угол ϕ Теперь оно не параллельно прямой, значит будет опять серия ударов и можно применить метод отложенных связей Находим угол выхода из этого "клина" и устремляем угол ϕ к нулю Получим, что конек будет стоять на месте, но его лезвие совершит поворот на 180° , после чего конек начнет двигаться по горизонтали в обратную сторону

В завершение раздела приводится пример, когда происходит заклинивание в системе с односторонней неголономной связью

Рассмотрим удар одностороннего конька о горизонтальную прямую, если в начальный момент времени $\dot{\varphi} = 0$, вектор скорости перпендикулярен лезвию, лезвие параллельно прямой, о которую будет

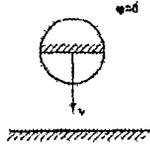


Рис 12 Особый случай $\varphi = 0$

удар (см рис 12)

Применим метод отложенных связей. Вектор скорости будет бесконечное число раз менять свое направление с вертикального вниз на вертикальное вверх и наоборот. Если говорить формально, то из-за отсутствия сходимости по скорости данный метод применять нельзя для решения этого случая. Однако, по положению есть сходимость к ситуации, при которой конек после удара двигаться не будет.

В заключении приведены основные результаты и выводы.

Рассмотрены два подхода к исследованию движения механических систем с неголономными односторонними и условными связями: на основе уравнений с мерами, и на основе классической лагранжевой теории удара.

На системы с этими типами связей распространены известные положения теории систем с односторонними голономными связями: условия идеальности связей, принцип Даламбера–Лагранжа, условия на скачке, теорема Аппеля, теоремы об изменении импульса и кинетического момента системы.

Метод Рауса исключения циклических координат распространен на системы с односторонними связями.

Для систем с неголономными односторонними связями доказано общее свойство безударного выхода на связь.

Рассмотрены примеры механических систем, иллюстрирующие выведенные утверждения.

Система с односторонними связями — плоское твердое тело с каналом при помощи метода Рауса сведена к системе с одной степенью свободы.

Система с условной связью — однородный диск на горизонтальной плоскости, движение которого ограничено абсолютно шероховатой

той прямой При помощи метода Рауса система сведена к системе с одной степенью свободы Показана возможность обратных движений после удара.

Исследован удар симметричного конька Чаплыгина о прямую
Получены периодические движения

Изучено движение симметричного конька с односторонней неголономной связью Оно раскладывается в композицию прямолинейных движений центра масс с равномерным вращением и движений по окружности. Проведено исследование удара симметричного одностороннего конька Чаплыгина о прямую Для анализа случая кратного удара предложен метод отложенных связей.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

- 1 Березинская С. Н , Кугушев Е.И Об уравнениях движения механических систем с условными односторонними связями. Препринт ИПМ РАН им. М В Келдыша, 2002, N 16, с. 32
- 2 О В Сорокина, С.Н Березинская, В В Белецкий, Е И Кугушев О периодических движениях динамических бильярдов. Препринт ИПМ РАН им М.В Келдыша, 2003, N 14, с. 32
3. С Н Березинская, О В Сорокина, Е И Кугушев Об односторонних неголономных связях Препринт ИПМ РАН им М В Келдыша, 2003, N 16, с 20
4. Березинская С Н О механических системах с односторонними неголономными связями.// Пятый международный симпозиум по классической и небесной механике Август 2004, Великие Луки, Тезисы докладов, М , ВЦ РАН 2004, с. 45-46
- 5 Березинская С Н Несколько задач на системы с односторонними неголономными связями // Сборник трудов конференции-конкурса молодых ученых, Москва, 12 10-14.10 2004г , под ред Г.Г. Черного и В.А Самсонова, М , МГУ, 2004 г. с. 63-71
- 6 Березинская С Н , Кугушев Е И , Сорокина О.В О движении механических систем с односторонними связями. // Вестн Моск. ун-та, сер 1 мат ,мех., 2005, N3, 18-24с.

Подписано в печать г

Формат 60×90 1/16 Усл. печ л 1,5

Заказ /з/ Тираж 50 экз

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ
г Москва, Воробьевы горы

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета