Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

Арутюнян Лаврентий Мартунович

Измеримые многочлены на бесконечномерных пространствах

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2018

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель:	**Богачев Владимир Игоревич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Колесников Александр Викторович** доктор физико-математических наук, НИУ ВШЭ, профессор факультета математики НИУ ВШЭ
	Ульянов Владимир Васильевич доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической статистики факультета ВМиК МГУ имени М.В.Ломоносова
	Шавгулидзе Евгений Тенгизович доктор физико-математических наук, профессор, МГУ имени М.В.Ломоносова, профессор кафедры математического анализа МГУ имени М.В.Ломоносова

Защита диссертации состоится «23» ноября 2018 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинский горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.
E-mail: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

https://istina.msu.ru/dissertations/142967960/

Автореферат разослан «22» октября 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07,
доктор физико-математических наук
профессор

Власов
Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Измеримые многочлены на бесконечномерном пространстве — функции, измеримые относительно некоторой меры на данном пространстве, которые при этом являются алгебраическими многочленами. Такие объекты возникают во многих классических ситуациях. Нередко функционалы, которые рассматриваются на бесконечномерном пространстве с мерой, могут трактоваться как измеримые многочлены или полилинейные формы. Скажем, если (X, μ) — пространство с конечной борелевской мерой, то функционал

$$u\colon C(X) \to \mathbb{R}, \quad u(f) = \int f^k d\mu,$$

который сопоставляет всякой непрерывной функции f интеграл от ее k-й степени по мере μ, может рассматриваться как многочлен степени k на пространстве $C(X)$. Менее тривиальным примером может служить функционал

$$B(f,g)\colon F \times C[0,1] \to \mathbb{R},$$

который сопоставляет случайному процессу f и траектории винеровского процесса g результат применения стохастического интегрирования процесса f по винеровскому процессу, взятый в точке g. То, что этот функционал совпадает почти всюду с измеримой билинейной формой на указанном произведении пространств, будет показано в первой главе, что даст положительный ответ на вопрос, поставленный Х. фон Вайцзеккером, см. с. 275 в книге[1].

Фактически рассмотрения измеримых многочленов имеются уже у Винера[2]. Отметим также классическую работу Ито[3], где в частности показано, что многочленами являются кратные стохастические интегралы Винера. Это направление развивалось Камероном и Мартином[4]. Исследование общих измеримых многочленов было начато А.М. Вершиком[5] и О.Г. Смоляновым[6] и продолжено многими исследователями (ссылки можно найти

[1] Богачев В.И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997. - 352 с.

[2] Wiener N. The homogeneous chaos // Amer. J. Math. - 1938. - Vol. 60. - P. 879-936.

[3] Itô K. Multiple Wiener integral // J. Math. Soc. Japan. - 1951. - Vol. 3. - №1. - P. 157-169.

[4] Cameron R.H., Martin W.T. The orthogonal development of non linear functionals in series of Fourier-Hermite polynomials // Ann. Math. - 1947. - Vol. 48. - P. 385-392.

[5] Вершик А.М. Общая теория гауссовских мер в линейных пространствах // Успехи матем. наук. - 1964. - Т. 19. - №1. - С. 210-212.

[6] Смолянов О.Г. Об измеримых полилинейных и степенных функционалах в некоторых линейных пространствах с мерой // Докл. АН СССР. - 1966. - Т. 170. - №3. - С. 526-529.

в работах[1,7,8,9]). Как правило, исследователи не обращаются напрямую к алгебраической структуре функций, которые они рассматривают, ибо им бывает достаточно того, что данные функции являются пределами в том или ином смысле конечномерных многочленов. В то же время, если отойти от гауссовского случая, то не всегда ясно, являются ли все измеримые многочлены пределами более простых многочленов, например конечномерных или непрерывных.

Изучение общих вопросов, связанных с измеримыми полиномиальными отображениями, полезно не только для развития теории меры на бесконечномерных пространствах, но и для широкого круга задач стохастического анализа, теории вероятностей[10,11,12], математической физики, в том числе функционального интегрирования[13], а также самых различных приложений, включая проблематику оптимальной транспортировки[14].

В гауссовском анализе большую роль играют измеримые линейные функционалы[1]. Когда стало ясно, что у пределов многочленов тоже есть версии, являющиеся алгебраическими, то естественно встал вопрос о свойствах этих версий, аналогичных свойствам линейных функций. Поэтому во второй главе изучаются сужения измеримых многочленов на пространства Камерона–Мартина. Также отдельным вопросом (который, разумеется, не возникает при рассмотрении линейных функций) становятся свойства мономов измеримого многочлена. Например, оказывается, что мономы (начиная с третьей степени) не обязательно измеримы. Об измеримых линейных функциях было известно, что они однозначно восстанавливаются по своему сужению на пространство Камерона–Мартина. В частности, если линейная функция обнуляется на пространстве Камерона–Мартина, то она равна нулю почти всюду. Аналогом этого свойства для измеримых многочленов можно считать то, что многочлен, равный нулю на пространстве Камерона–Мартина, имеет версию, алгеб-

---

[7] Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 2, 2-е изд. М. – Ижевск: РХД, 2006. – 680 с.

[8] Богачев В.И. Распределения многочленов на многомерных и бесконечномерных пространствах с мерами // Успехи матем. наук. – 2016. Т. 71, №4. – С. 107–154.

[9] Богачев В.И., Смолянов О.Г., Соболев В.И. Топологические векторные пространства и их приложения. М. – Ижевск: РХД, 2012. – 584 с.

[10] Богачев В.И. Слабая сходимость мер. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. – 396 с.

[11] Гётце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. Оценки для характеристических функций многочленов от асимптотически нормальных случайных величин // Успехи матем. наук. – 1996. Т. 51. – №2. – С. 3–26.

[12] Гётце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. О гладком поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях // Теория вероятн. и ее примен. – 1997. – Т. 42. – N 1. – С. 51–62.

[13] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. 2-е изд. М.: УРСС, 2015. – 336 с.

[14] Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы // Успехи матем. наук. – 2012. – Т. 67. – №5. – С. 3–110.

раическая степень которой на 2 меньше. Одним из сюрпризов, которые преподносит бесконечномерный случай, стало наличие многочлена в точности второй степени, который равен единице почти всюду. Это влечет, например, то, что всякий бесконечномерный многочлен имеет версию, которая является суммой двух однородных многочленов.

Отдельный интерес представляют образы мер под действием полиномиальных отображений, в частности образы равномерных распределений на выпуклых телах в $\mathbb{R}^n$ под действием многочленов от n переменных. Бургейн[15] доказал неравенство типа Хинчина для многочленов на выпуклых телах, которое не зависит от размерности n, и применил его для получения новой оценки в гипотезе о гиперплоскости. Гипотеза о гиперплоскости — довольно естественный вопрос о выпуклых телах в произвольной размерности: верно ли, что существует универсальная постоянная $c > 0$, не зависящая от размерности n, такая, что всякое выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ объема 1 имеет сечение гиперплоскостью площади хотя бы c? Под площадью здесь понимается $(n-1)$-мерный объем. Начиная с работ самого Бургейна[16,17], этот вопрос довольно интенсивно исследовался последние десятилетия[18,19,20], см. также дальнейшие ссылки в упомянутых работах. В работе Каннана, Ловаса и Шимоновича[21] сформулирована еще одна гипотеза о выпуклых телах, получившая название KLS-гипотезы, которая заключается в наличии универсальной (не зависящей от размерности n) константы $c > 0$, с которой выполняется некоторое изопериметрическое неравенство в форме Чигера для произвольного выпуклого тела. Как оказалось, KLS-гипотеза влечет справедливость гипотезы о гиперплоскости[22] (см. также работу Ли[23] с наилучшей оценкой в KLS-гипотезе). Кроме того, в этой же работе доказывается другое по-

[15]Bourgain J. On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets // Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Math. - 1991. - Vol. 1469. - P. 127-137.

[16]Bourgain J. On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies // Amer. J. Math. - 1986. - Vol. 108. - №6. - P. 1467-1476.

[17]Bourgain J. Geometry of Banach spaces and harmonic analysis // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. (Berkeley, Calif., 1986), pp. 871-878. Amer. Math. Soc., Providence, 1987.

[18]Klartag B. On convex perturbations with a bounded isotropic constant // Geom. Funct. Anal. GAFA. - 2006. - Vol. 16. - №6. - P. 1274-1290.

[19]Milman V., Pajor A.. Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space // Lecture Notes in Math. - 1989. - Vol. 1376. - P. 64-104.

[20]Ball K. Normed spaces with a weak-Gordon-Lewis property // Lecture Notes in Math. - 1991. - Vol. 1470. - P. 36-47.

[21]Kannan R., Lovasz L., Simonovits M. Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma // Discrete Comput. Geom. - 1995. - Vol. 13. - P. 541-559.

[22]Eldan R., Klartag B. Approximately gaussian marginals and the hyperplane conjecture // Amer. Math. Soc. - 2011. - Vol. 545. - P. 55-68

[23]Lee Y.T., Vempala S.S. Eldan's Stochastic localization and the KLS hyperplane conjecture: an improved lower bound for expansion // https://arxiv.org/pdf/1612.01507.pdf.

хожее изопериметрическое неравенство:

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial_K S) \geqslant \psi \min\bigl(\mathrm{vol}(S), \mathrm{vol}(K \setminus S)\bigr),$$

где K — произвольное выпуклое тело объема 1, S — произвольное измеримое множество, $\partial_K S$ — граница множества S внутри K, под vol и vol_{n-1} понимаются n-мерная мера Лебега и $(n-1)$-мерная поверхностная мера соответственно, а в качестве ψ подойдет величина $\frac{\ln 2}{M_1(K)}$, где $M_1(K)$ — среднее расстояние от точки внутри K до центра масс тела K. При более детальном рассмотрении оказывается, что эта оценка выводится авторами из аналогичного изопериметрического неравенства для образов мер, являющихся равномерными распределениями на выпуклых телах, под действием линейных функций (более точно, из регуляризованной версии такого неравенства). В диссертации изучается изопериметрическое неравенство для образов равномерных распределений на выпуклых телах, но уже под действием полиномиальных отображений.

Бесконечномерным аналогом распределения на выпуклом теле можно считать логарифмически вогнутую меру, чему есть несколько причин. Логарифмически вогнутой мерой называется мера, для которой при всех борелевских множествах A и B выполняется неравенство

$$\forall \alpha \in [0,1]: \quad \mu(\alpha A + (1-\alpha)B) \geqslant \mu(A)^{\alpha}\mu(B)^{1-\alpha}.$$

Такое неравенство можно получить, если формально устремить размерность n к бесконечности в неравенстве Брунна–Минковского для выпуклых тел:

$$\mu(\alpha A + (1-\alpha)B)^{1/n} \geqslant \alpha\mu(A)^{1/n} + (1-\alpha)\mu(B)^{1/n}.$$

Отличная от дираковской меры логарифмически вогнутая мера на $\mathbb{R}^d$ сосредоточена на некотором аффинном подпространстве и задается на нем плотностью вида $\exp(-V)$, где V — выпуклая функция. Всякое равномерное распределение на выпуклом множестве является логарифмически вогнутой мерой, хотя не всякая логарифмически вогнутая мера является равномерным распределением на некотором теле. Однако следующий пример в некотором смысле показывает, что с ростом размерности это несоответствие уходит. Рассмотрим $\mathbb{R}^\infty$ — счетную степень прямой со стандартной тихоновской топологией. На этом пространстве рассмотрим всевозможные конечномерные выпуклые тела, а затем рассмотрим всевозможные меры, являющиеся равномерными распределениями на этих телах. Тогда окажется, что слабые пределы последовательностей этих мер дадут всевозможные логарифмически вогнутые распределения. В совместной работе автора и Косова[24] доказано L^1-неравенство Ремеза для алгебраических многочленов на пространствах с логарифмически вогнутыми мерами. По-видимому, это одно из первых неравенств типа Ремеза, которые не зависят от размерности, а потому могут быть распространены на бесконечномерный случай. Из этой оценки следует, в частности, что для широкого класса измеримых многочленов L^1-норма на всем пространстве эквивалентна L^1-норме, взятой по сужению логарифмически вогнутой меры на множество положительной меры. В главе 4 этот результат получен качественными методами. Качественные методы также позволили распространить результат об эквивалентности на произвольные измеримые многочлены и даже полиномиальные отображения.

Цель работы. Развить теорию измеримых многочленов на бесконечномерных пространствах: изучить общие свойства, вытекающие из алгебраического определения, изучить особые свойства в гауссовской ситуации, изучить образы логарифмически вогнутых мер при полиномиальных отображениях, в том числе образы равномерных распределений на выпуклых телах.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты.

1. Доказано, что пределы измеримых многочленов являются измеримыми многочленами, т. е. обладают версиями, которые являются алгебраическими многочленами.

2. Изучены вопросы измеримости однородных компонент измеримого многочлена а также свойства сужений этих многочленов на пространство Камерона–Мартина для гауссовской меры.

3. Получено изопериметрическое неравенство в форме Чигера для полиномиальных образов мер, являющихся равномерными распределениями на выпуклых телах в $\mathbb{R}^n$, причем с константой, которая зависит лишь от среднего значения модуля многочлена на выпуклом теле, а также от размерности n и степени многочлена d. Как следствие, получено неравенство Пуанкаре с аналогичной константой.

4. Доказана абсолютная непрерывность образов логарифмически вогнутых мер под действием непостоянных многочленов, а также функций из других широких классов. Для полиномиальных отображений доказа-

[24] Арутюнян Л.М., Косов Е.Д. Оценки интегральных норм многочленов на пространствах с выпуклыми мерами // Матем. сб. - 2015. - Т. 206. - №8. - С. 3-22.

ны законы $0-1$ для мер подпространств, а также множеств сходимости последовательностей таких отображений. Получены условия абсолютной непрерывности распределений норм, взятых от полиномиальных отображений, измеримых относительно логарифмически вогнутых мер. Для произвольных измеримых многочленов фиксированной степени доказана эквивалентность L^1-нормы по логарифмически вогнутой мере и L^1-нормы по сужению этой меры на произвольное множество положительной меры.

Методы исследования. Основные методы лежат в русле теории меры и функционального анализа. Используется техника выпуклого анализа, а также ряд разработанных автором конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области теории меры, функционального анализа, стохастического анализа и выпуклого анализа.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются линейные и полиномиальные отображения бесконечномерных пространств, Кроме того, рассматриваются меры и их образы под действием таких отображений, поэтому диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ».

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, Н. А. Толмачева и С. В. Шапошникова (2013–2018 г., многократно), на международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в МГУ им. М. В. Ломоносова (2013–2015 г.), на международной конференции "Infinite-dimensional analysis" (the 19th ISE), Казальмаджоре, Италия, 2016 г., на международном научно-исследовательском семинаре "Infinite-dimensional stochastic analysis" в университете г. Билефельда, Германия (ежегодно в 2014–2017 г.), на научно-исследовательском семинаре в Пекинском Нормальном университете, Китай (2014, 2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы с доказательствами в 4 работах автора в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science (две работы написаны в соавторстве) и представлены также в 3 тезисах международных конференций. Список этих работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из четырех глав, включающих 10 параграфов, заключения и списка литературы из 66 наименований. Общий объем диссертации составляет 80 страниц.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проектами 14-11-00196 и 17-11-01058 Российского научного фонда (выполняемыми при МГУ им. М. В. Ломоносова).

Краткое содержание диссертации

Глава 1. В этой главе доказано существование полиномиальных в обычном смысле версий измеримых многочленов на бесконечномерных пространствах с мерами. Многочленом степени d на вещественном линейном пространстве X называется функция f вида

$$f(x) = b_0 + b_1(x) + \cdots + b_d(x, \ldots, x),$$

где b_0 — постоянная, $b_k\colon X^k \to \mathbb{R}$ — полилинейная функция (т.е. функция, линейная по каждому аргументу). Аналогично определяются полиномиальные отображения степени d из X в линейное пространство Y.

Основной результат этой главы дает полиномиальное продолжение функции, заданной как поточечный предел последовательности многочленов степени d на множестве всех точек сходимости этой последовательности.

Теорема. 1.2.4. *Пусть X — линейное пространство, $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ — последовательность многочленов степени d, сходящаяся на множестве $\Omega \subset X$ к функции f_0. Тогда существует такой многочлен f степени d на всем X, что $f|_\Omega = f_0$.*

В этой теореме не используются меры или измеримость. Однако ее основные применения связаны с мерами. Напомним, что неотрицательная мера μ на борелевской σ-алгебре множеств топологического пространства называется радоновской, если для всякого борелевского множества B и всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B \backslash K) < \varepsilon$. Вероятностная радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве называется гауссовской, если всякий непрерывный линейный функционал на этом пространстве является гауссовской случайной величиной. Если все эти функционалы имеют нулевые средние, то мера называется центрированной. Всякая гауссовская мера есть сдвиг некоторой центрированной гауссовской меры, поэтому при изучении измеримых многочленов можно иметь дело с центрированными мерами. Все гауссовские меры являются логарифмически вогнутыми.

Следствие. 1.2.5. *Пусть μ — радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве. Тогда всякий μ-измеримый многочлен μ-почти всюду совпадает с некоторым многочленом.*

Глава 2. В этой главе изучаются сужения измеримых многочленов по гауссовской мере на пространство Камерона–Мартина. Напомним, что пространство Камерона–Мартина центрированной гауссовской меры γ на локально выпуклом пространстве X с сопряженным X^* есть множество всех векторов с конечной нормой

$$|h|_H = \sup\{l(h) \colon l \in X^*,\ \|l\|_{L^2(\gamma)} \leqslant\}.$$

С этой нормой пространство Камерона–Мартина оказывается сепарабельным гильбертовым пространством, компактно вложенным в исходное пространство. Для общей гауссовской меры пространство Камерона–Мартина определяется как такое пространство для соответствующей центрированной меры, полученной сдвигом.

В этой главе показано, что на всяком пространстве с радоновской гауссовской мерой всякий измеримый многочлен f обладает версией $\widetilde{f}$, представимой в виде

$$\widetilde{f}(x) = g_d(x) + g_{d-1}(x),$$

где g_d и g_{d-1} — мономы степени d и $d-1$ соответственно.

Теорема. 2.2.7. *Всякий измеримый по радоновской гауссовской мере однородный многочлен, т. е. многочлен, состоящий из одного монома, непрерывен вдоль пространства Камерона–Мартина в почти всех точках пространства.*

Из этой теоремы выводится такой результат.

Теорема. 2.2.9. *Пусть f — многочлен, измеримый по радоновской гауссовской мере γ. Тогда существует его версия $\widetilde{f}$ со следующим свойством: функция $\widetilde{f}(x+h)$ при почти всех x является непрерывным многочленом по h на пространстве Камерона–Мартина меры γ.*

Также построен пример многочлена, сужения которого на пространства Камерона–Мартина разрывны, а также многочлен, не определяющийся своими значениями на пространстве Камерона–Мартина. В то же время верно следующее утверждение.

Теорема. 2.2.15. *Пусть f — измеримый многочлен степени d, причем $f(h) = 0$ для всякого вектора h из пространства Камерона–Мартина. Тогда найдется такая версия $\widetilde{f}$ функции f, что $\widetilde{f}$ является многочленом степени $d-2$. Если f однороден, то $\widetilde{f}$ можно взять тоже однородным.*

Глава 3. В этой главе изучаются образы равномерных распределений на выпуклых телах под действием полиномиальных отображений. Введем следующие обозначения.

Пусть μ — вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$, f — μ-измеримая функция,

$$\mu_f = \mu \circ f^{-1} \text{ — образ меры } \mu \text{ при отображении } f,$$

$$m_f = \int f d\mu \text{ — математическое ожидание случайной величины } f,$$

$$\alpha_f = \int |f - m_f| d\mu,$$

Пусть ν — вероятностная мера на вещественной прямой. Определим ν-периметр множества A следующим равенством:

$$\nu^+(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\nu(A + (-\varepsilon, \varepsilon)) - \nu(A)}{\varepsilon}.$$

Главным результатом этого раздела является следующее изопериметрическое неравенство в форме Чигера (из которого вытекает неравенство Пуанкаре с аналогичной константой).

Следствие. 3.2.6. *Для всяких чисел $n, d \in \mathbb{N}$ существует постоянная $\delta(d, n)$, зависящая только от d и n, такая, что для всякого выпуклого компактного множества K в $\mathbb{R}^n$ и для всякого многочлена f степени d выполнено неравенство*

$$\mu_f^+(A) \geqslant \frac{\delta(d, n)}{\alpha_f} \mu_f(A) \mu_f(\mathbb{R} \setminus A),$$

где $\mu_f := \lambda_K \circ f^{-1}$ и λ_K — нормированная мера Лебега на K.

Глава 4. В этой главе изучаются распределения многочленов и полиномиальных отображений на пространствах с логарифмически вогнутыми мерами. В частности, для случая многочленов доказана следующая теорема.

Теорема. 4.3.2. *Пусть μ — логарифмически вогнутая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E. Тогда распределение функции f, которая не равна постоянной μ-п.в., абсолютно непрерывно, если f удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *f является многочленом,*

2) *сужение f на всякую прямую в E, т. е. на одномерное аффинное подпространство, является аналитической функцией,*

3) *сужение f на всякую прямую в E либо обладает почти всюду ненулевой производной, либо является постоянной функцией.*

Основной результат последнего раздела состоит в следующем.

Теорема. 4.4.3. *Пусть μ_U — сужение логарифмически вогнутой радоновской меры μ на множество U положительной меры, т. е. мера, определяемая равенством $\mu_U(A) = \mu(A \cap U)$. Тогда для всякого d найдется такая постоянная $C = C(d, \mu, U)$, что для всякого полиномиального отображения степени d со значениями в банаховом пространстве верно неравенство*

$$\|f\|_{L^1(\mu)} \leqslant C\|f\|_{L^1(\mu_U)}.$$

Отметим, что для числовых многочленов фиксированной степени эквивалентность норм из разных L^p по логарифмически вогнутой мере на всем пространстве была известна ранее из работ Ж. Бургэна, С.Г. Бобкова, Р. Латалы (см., например, работы[25,26]).

Заключение

В диссертации рассмотрены измеримые многочлены на бесконечномерных пространствах. Доказано, что пределы измеримых многочленов являются измеримыми многочленами, т. е. обладают версиями, которые являются алгебраическими многочленами. Изучены вопросы измеримости однородных компонент измеримого многочлена, а также свойства сужений этих многочленов на пространство Камерона–Мартина для гауссовской меры. Получено изопериметрическое неравенство в форме Чигера для полиномиальных образов мер, являющихся равномерными распределениями на выпуклых телах в $\mathbb{R}^n$, причем с константой, которая зависит лишь от среднего значения модуля многочлена на выпуклом теле, а также от размерности n и степени многочлена d. Как следствие, получено неравенство Пуанкаре с аналогичной константой. Доказана абсолютная непрерывность образов логарифмически вогнутых мер под действием непостоянных полиномиальных отображений, а также других широких классов функций. Для полиномиальных отображений доказаны законы $0-1$ для мер подпространств, а также множеств сходимости последовательностей таких отображений. Получены условия абсолютной непрерывности распределений норм, взятых от полиномиальных отображений, измеримых относительно логарифмически вогнутых мер. Для произвольных измеримых многочленов и полиномиальных распределений фиксированной степени доказана эквивалентность L^1-нормы по логарифмически вогнутой

[25] Latała R. On the equivalence between geometric and arithmetic means for log-concave measures // In: Convex geometric analysis (Berkeley, 1996), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. - P. 123–127.

[26] Bobkov S.G. Remarks on the growth of L^p-norms of polynomials // Lecture Notes in Math. - 2000. - Vol. 1745. - P. 27–35.

мере и L^1-нормы по сужению этой меры на произвольное множество положительной меры.

Дальнейшее развитие методов диссертации имеет перспективы в аналитической теории меры и бесконечномерном анализе. Возможные применения результатов диссертации связаны со стохастическим анализом, теорией вероятностей и математической статистикой. Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в следующих направлениях.

1. Исследование вопроса о возможности приближения измеримых многочленов по тем или иным мерам более простыми классами многочленов, например непрерывными многочленами или многочленами от конечного числа переменных.

2. Изучение точных количественных выражений факта эквивалентности интегральных норм многочлена и его сужения на множество положительной меры.

3. Изучение количественных выражений факта эквивалентности интегральных норм полилинейных отображений и их сужений на множество положительной меры.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю профессору Владимиру Игоревичу Богачеву за постановку задач и поддержку на протяжении всего научного пути.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Арутюнян Л.М. Изопериметрическое неравенство и неравенство Пуанкаре для распределений полиномов на выпуклом компакте // Докл. РАН. – 2015. – Т. 465. – №3. – С. 267–268.

Arutyunyan L.M. Isoperimetric inequality and the poincare inequality for distributions of polynomials on convex compact set // Doklady Mathematics. – 2015. – V. 92. – №3. – P. 689–690.

[2] Арутюнян Л.М. Абсолютная непрерывность распределений многочленов на пространствах с логарифмически вогнутыми мерами // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100. – №5. – С. 672–681.

Arutyunyan L.M. Absolute continuity of distributions of polynomials on spaces with log-concave measures // Math. Notes. – 2017. – V. 101. – №1. – P. 31–38.

[3] Арутюнян Л.М., Ярославцев И.С. Об измеримых многочленах на бесконечномерных пространствах // Докл. РАН. – 2013. – Т. 446. – №9. – С. 627–631.

Arutyunyan L. M., Yaroslavtsev I. S. On measurable polynomials on infinite-dimensional spaces // Doklady Mathematics. – 2013. – V. 87. – №2. – P. 214–217.

[4] Арутюнян Л.М., Косов Е.Д., Ярославцев И.С. О некоторых свойствах многочленов, измеримых по гауссовской мере // Докл. РАН. – 2014. – Т. 457. – №2. – С. 131–135.

Arutyunyan L.M., Kosov E.D., Yaroslavtsev I.S. On some properties of polynomials measurable with respect to a Gaussian measure // Doklady Mathematics. – 2014. – V. 90. – №1. – P. 419–423.

В работе [3] диссертанту принадлежат теоремы 1, 2, 3, примеры 1,2, замечания 1,3. В работе [4] диссертанту принадлежат теоремы 1, 2, 3, 4, замечания 1, 3, 4, 5.

Тезисы конференций:

Арутюнян Л.М., Ярославцев И.С. Продолжение измеримых многочленов // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2014». М.: МГУ, 2014. – 1 с.

Арутюнян Л.М., Косов Е.Д., Ярославцев И.С. Интегрируемость измеримых многочленов по гауссовской мере // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015». М.: МГУ, 2015. – 1 с.

Арутюнян Л.М. О некоторых свойствах многочленов измеримых по гауссовской мере // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016». М.: МГУ, 2015. – 1 с.