На правах рукописи

Эльшенави Аталлах Аталлах Мохаммед Али

Приближенно-аналитическое решение задачи Дирихле в односвязной и многосвязной областях

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань–2020

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный руководитель: **Широкова Елена Александровна,**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Прохоров Дмитрий Валентинович,**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического,
анализа ФГБОУ ВО "Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского"

Миронова Светлана Рафаиловна,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической и,
прикладной механики и математики
Казанского национального исследовательского технического университета
им. А.Н. Туполева - КАИ

Ведущая организация: ФГАОУ ВО Волгоградский государственный университет, г. Волгоград

Защита состоится 23 апреля 2020 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета КФУ.01.05 на базе ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская д. 35. Электронная версия диссертации размещена на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета http://kpfu.ru.
Автореферат разослан " " 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета КФУ.01.05,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Р.Г. Насибуллин

Актуальность темы. Уравнение Лапласа является уравнением в частных производных второго порядка, названным в честь Пьера-Симона Лапласа, который впервые изучил его свойства. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими функциями. Уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0$$

было впервые исследовано Лапласом в работе над изучением полей гравитационного потенциала примерно в 1780 г. Оператор $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_d^2$ называется лапласианом. Другими стандартными обозначениями для лапласиана функции u являются $\Delta^2 u, \nabla \cdot \nabla u$, и *div grad* u. Один из методов решения краевых задач для уравнений в частных производных и изучения свойств этих решений состоит в применении интегралов по соответствующим областям и носит название теории потенциала.

Уравнение Лапласа возникает при описании многих видов стационарных физических систем в равновесии. Например, если u - температура, то уравнение $\Delta u = 0$ означает, что u не зависит от времени. Другим примером является следующий: если u - гравитационный (или электростатический) потенциал, то уравнение $\Delta u = 0$ выражает условие сохранения энергии для массивной (заряженной) частицы в области, свободной от других масс (зарядов). Другие приложения уравнения Лапласа в задачах математической физики рассмотрены, например, в работах [1] [2] [3] [4] [5]. Задача нахождения решения уравнения Лапласа в области, принимающего заданные граничные значения, известна как задача Дирихле. Задача нахождения решения уравнения Лапласа, для которого заданы значения нормальной производной на границе, известна как проблема Неймана. Задачи Дирихле и Неймана также известны как первая и вторая краевые задачи теории потенциала. Существование и единственность решения уравнения Лапласа при этих граничных условиях можно показать при условии, что форма границы и функции, входящие в граничные условия, удовлетворяют некоторым достаточно слабым требованиям. Например, единственность решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа может быть получена из применения

[1] Backus, G. E. Application of a non-linear boundary-value problem for Laplace's equation to gravity and geomagnetic intensity surveys / G. E. Backus // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1968. — V. 21, № 2. — P. 195–221.

[2] Hao, D. N. The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method / D. N. Hao, D. Lesnic // IMA Journal of Applied Mathematics.— 2000. — V. 65, № 2. — P. 199–217.

[3] Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. — Наука, Москва, 1966.

[4] Yosibash, Z. Circular edge singularities for the Laplace equation and the elasticity system in 3-d domains / Z. Yosibash, S. Shannon, et al. // International Journal of Fracture. — 2010. — V. 168, № 1. — P. 31–52.

[5] Zongo, O. M. Determining the potential field within a square transformer / O. M. Zongo, Sie Kam, et al. // Advances in Applied Science Research. —2016. — V. 7, № 3. — P. 45–57.

принципа максимума уравнения Лапласа [6].

Уравнение Лапласа является, пожалуй, самым важным дифференциальным уравнением во всей прикладной математике. Решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа помимо непосредственных приложений в задачах математической физики являются основой для решения других задач. Например, краевых задач для уравнения Пуассона, краевых задач для бигармонического уравнения и др.

В течение 19-го века был введен ряд аналитических методов для нахождения решения уравнения Лапласа, например, метод разделения переменных и суперпозиции решений линейных уравнений [7] [8] [9], которые были введены Даламбером (1747) и Эйлером (1748) для волнового уравнения. Аналогичные идеи были использованы Лапласом (1782) и Лежандром (1782) для уравнения Лапласа.

В 1835 г. для решения уравнения Лапласа был предложен метод построения функций Грина и получения фундаментальных решений. Идея, использования функции Грина подробно объяснялась многими авторами например, в работах [10] [11] [12].

Большую роль в решении уравнений с частными производными стала играть теория аналитических функций комплексного переменного после того, как Коши в 1827 г. заметил, что две гладкие вещественные функции u, v двух вещественных переменных x, y являются вещественной и мнимой частями одной аналитической функции комплексного переменного $z = x + iy$, если они удовлетворяют системе Коши-Римана уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

С более поздней точки зрения Римана (1851) это стало центральной определяющей особенностью аналитических функций. С этой точки зрения Риман изучал свойства аналитических функций, исследуя гармонические функции на плоскости.

---

[6] Evans, L. C. Partial Differential Equations second edition / L. C. Evans. — American Math Society, 2010.

[7] Polianin, A. D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists / A. D. Polianin. — Chapman and Hall/CRC Press, Florida, 2002.

[8] Myint-U, T. Linear partial differential equations for scientists and engineers / T. Myint-U, L. Debnath. — Birkhäauser, Boston, 2007.

[9] kreyszig, E. Advanced engineering mathematics 10th edition / E. kreyszig — John Wiley Sons, New York, 2011.

[10] Kline, M. Mathematical thought from ancient to modern times / M. Kline. — Oxford university press, New York, 1972. — V. 2.

[11] Evans, L. C. Partial Differential Equations second edition / L. C. Evans. — American Math Society, 2010.

[12] Courant, R. Methods of mathematical physics / R. Courant, D. Hilbert. — Interscience Publishers, New York, 1953.

Двумерная задача Дирихле в области Ω с гладкой граничной кривой $\partial\Omega$ определяется следующим образом: необходимо найти гармоническую функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in \Omega$$

при задании граничных условий Дирихле

$$u(x(t), y(t)) = f(t), \qquad (x(t), y(t)) \in \partial\Omega.$$

Многие широко разработанные численные (сеточные) методы, такие как метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод граничных элементов, широко используются в последние 50 лет для решения краевых задач вследствие развития вычислительной техники. Общая теория приближенных методов для решения дифференциальных уравнений и граничных задач математической физики обсуждались в книге [13]. Метод конечных разностей, изученный и описанный в работах[14] [15] [16] [17] [18],— это быстрый и простой программный метод. Метод конечных элементов является эффективным численным методом решения задач теории потенциала в сложных областях [19] [20] [21] [22]. Недостатком методов конечных разностей и конечных элементов является следующий: для сложной формы области эти стандартные методы обычно требуют большого количества узлов и элементов в соответствии со сложной геометрической формой границы.

[13] Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — Наука, Москва, 1984.

[14]

[15] Smith, G. D. Numerical solution of partial differential equations (2nd edition) / G. D. Smith. — Oxford, London, 1978.

[16] Ames, W. F. Numerical methods for partial differential equations (3rd edition) / W. F. Ames. — Academic Press, San Diego, 1992.

[17] Dhumal, M. L. Finite difference method for Laplace equation / M. L. Dhumal, S. B. Kiwne // International Journal of Statistika and Mathematika. — 2014.— V. 9, № 1. — P. 11–13.

[18] Patil, P. V. Numerical Solution for Two Dimensional Laplace Equation with Dirichlet Boundary Conditions / P. V. Patil, Dr. J. S. V. R. Krishna Prasad // IOSR Journal of Mathematics. — 2013. — V. 6, № 4. — P. 66–75.

[19] Olson, L. G. An efficient finite element method for treating singularities in Laplace's equation / L. G. Olson, G. C. Georgiou, et al. // Journal of Computational Physics. — 1991. — V. 96, № 2. — P. 391–410.

[20] Cai, Z. A finite element method using singular functions for Poisson equations: mixed boundary conditions / Z. Cai, S. Kim, et al. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2006. — V. 195, № 19–22. — P. 2635–2648.

[21] Shabbir, M. Finite element solution for two dimensional Laplace equation with Dirichlet boundary conditions / M. Shabbir, M. Rafq, et al. // Pak. J. Engg. Appl. Sci. — 2012. — V. 10.

[22] Patil, P. V. Numerical solution for two dimensional Laplace equation with Dirichlet boundary conditions / P. V. Patil, Dr. J. S. V. R. Krishna Prasad // IOSR Journal of Mathematics. — 2013. — V. 6, № 4. — P. 66–75.

Методы граничных элементов могут уменьшить размерность рассматриваемых задач, превратившись в эффективный альтернативный вычислительный инструмент для замены метода конечных разностей на основе областей и метода конечных элементов. Многие авторы , например, в работах [23] [24] [25] [26] [27] [28] использовали интегральные уравнения для решения двумерного уравнения Лапласа для вычисления потенциального поля. Основным недостатком метода граничных элементов является сингулярность решения: слабая особенность функции ядра, сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши. Многие авторы посвятили свои исследования преодолению трудностей, возникающих из-за особенностей в граничных интегральных уравнениях. Во-первых, Landweber и Macagno [29] предложили метод избавления от сингулярности путем вычитания определенной функции из подынтегрального выражения, чтобы ядро стало неособым, а затем добавив обратно точное интегрирование функции к интегральному уравнению. Этот метод был модифицирован и упоминается как неособый метод граничного интеграла в статьях [30] [31]. Другой способ избежать сингулярности был предложен в статьях [32] [33] [34]. Этот способ

[23] Fredholm, E. I. Sur une classe d'equations fonctionnelles / E. I. Fredholm // Acta Math. — 1903. — V. 27.

[24] Hess, J. L. Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies / J. L. Hess, A. M. O. Smith // Journal of ship research. -1964.- V. 8, № 2. — P. 22-44.

[25] Jaswon, M. Integral equation methods in potential theory / M. Jaswon // Proceedings of the royal society of London. Series A. — 1963. — V. 275.

[26] Mikhailov, S. E. On an integral equation of some boundary value problems for harmonic functions in plane multiply connected domains with nonregular boundary / S. E. Mikhailov // Mat. Sb. (N.S.). — 1983. — V. 121, № 163. — P. 533–544.

[27] Cialdea, A. On the Dirichlet problem for the Stokes system in multiply connected domains / A. Cialdea, V. Leonessa, A. Malaspina // Abstr. Appl. Anal. — 2013. — P. 12 pages.

[28] Costabel, M. Converging expansions for Lipschitz self similar perforations of a plane sector / M. Costabel, M. D. Riva, et al. // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2017. — V. 88. — P. 401–449.

[29] Landweber, L. Irrotational flow about ship forms / L. Landweber, M. Macagno. — IIHR Report No. 123, Iowa University, 1969.

[30] Hwang, W. S. Nonsingular direct formulation of boundary integral equations for potential flows / W. S. Hwang, Y. Y. Huang // Int. J. Numer. Methods Fluids. — 2008. — V. 26. — P. 627–635.

[31] Hwang, W. S. Nonsingular direct formulation of boundary integral equations for potential flows / W. S. Hwang, Y. Y. Huang // Int. J. Numer. Methods Fluids. — 2008. — V. 26. — P. 627–635.

[32] Cao, Y. Three-dimensional desingularized boundary integral methods for potential problems / Y. Cao, W. W. Schultz, R. F. Beck // Int. J. Numer. Methods Fluids. — 1991. — V. 12. — P. 785–803.

[33] Lalli, F. On the accuracy of the desingularized boundary integral method in free surface flow problems / F. Lalli // Int. J. Numer. Methods Fluids. — 1991. — V. 25. — P. 1163–1184.

[34] Zhang, Y. L. Simulation of three-dimensional bubbles using desingularized boundary integral method / Y. L. Zhang, K. S. Yeo, et al. // Int. J. Numer. Methods Fluids. — 1999. — V. 31. — P. 1311–1320.

состоит в перемещении вычислительных узлов вне границы и вне области решения уравнения. Однако, этот метод, позволяющий справиться с сингулярностью, имеет еще одну проблему некорректности из-за появления интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Хотя Юнг [35] и Юнг и другие [36] успешно применили метод десингуляризованных граничных интегральных уравнений к задачам теории потенциала.

Другим методом решения эллиптических краевых задач является метод фундаментальных решений [37], аппроксимирующий решение линейной комбинацией фундаментальных решений с особенностями, известными как точки источника, расположенные на фиктивной границе вне области решения задачи. Хотя метод фундаментальных решений помогает избежать трудностей, связанных с методами граничных элементов, все же возникает проблема, что система линейных уравнений может стать плохо обусловленной, когда число точек источника увеличивается [38] или когда расстояния от точек источника возрастает [39].

Численный метод коллокации широко применяется для решения рассматриваемых задач и дает достаточно точные результаты. Метод коллокации, основанный на методе Чебышева и Чебышева-тау для решения уравнения Лапласа, изучался в статьях [40] [41] , метод Чебышева-тау для уравнений типа Пуассона в нерегулярной области [42], метод интерполяции-коллокации решение для решения уравнения Пуассона [43] и метод колло-

[35]Young, S. A. A solution method for two-dimensional potential flow about bodies with smooth surfaces by direct use of the boundary integral equation / S. A. Young // Commun. Numer. Methods Eng. — 1999. — V. 15. — P. 469–478.

[36]Young, D. L. Novel meshless method for solving the potential problems with arbitrary domain / D. L. Young, K. H. Chen, C. W. Lee // J. Comput. Phys. — 2005. — V. 209. — P. 290–321.

[37]Fairweather, G. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems / G. Fairweather, A. Karageorghis // Adv. Comput. Math. — 1998. — V. 9. — P. 69–95.

[38]Golberg, M. A. Discrete projection methods for integral equations, Computational Mechanics Publications / M. A. Golberg, C. S. Chen. — Southampton, 1996.

[39]Chen, C. S. Some comments on the ill-conditioning of the method of fundamental solutions / C. S. Chen, H. A. Cho, M. A. Golberg // Eng. Anal. Boundary Elem. — 2006. — V. 30. — P. 405–410.

[40]Ahmadi, M.R. The Chebyshev tau technique for the solution of Laplace's equation / M.R. Ahmadi, H. Adibi // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — V. 184, № 2. — P. 895–900.

[41]Gumgum, S. Chebyshev collocation method for the two-dimensional heat equation / S. Gumgum, E. Kurul, N. B. Savasaneril // Communication in Mathematical Modeling and Applications. — 2018. — V. 3, № 2. — P. 1–8.

[42]Kong, W. Chebyshev tau matrix method for Poisson-type equations in irregular domain / W. Kong, X. Wu // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2009. — V. 228, № 1. — P. 158–167.

[43]Babuba, S. Interpolation-collocation method of solution for solving Poisson equation / S. Babuba // Journal of Biometrics Biostatistics. — 2018. — V. 9, № 1. — P. : 388.

кации на основе радиальной базисной функции интерполяция [44] [45] могут быть непосредственно применены в сложных областях.

Недавно были разработаны несколько комбинированных приближенных численных методов для решения двумерной задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона в односвязных и двусвязных областях с гладкими границами. Одним из этих численных методов является метод коллокации Трефтца [46], когда решение удовлетворяет уравнению, но приближает граничные условия, являющийся высокоточным для регулярной области коллокации. Способы численного решения задач в теории потенциала в нерегулярных двусвязных областях приведены в статьях [47] [48].

В данной диссертации ищется приближенно-аналитическое решение задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа в сложных одно- или двусвязных областях с гладкими границами методом, основанным на существенном применении комплексного анализа.

Для двумерной задачи ищется приближенно-аналитическое решение путем сведения задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для граничных значений сопряженной гармонической функции. Сингулярность свободного члена интегрального уравнения Фредгольма обходится применением формулы Гильберта для граничного значения сопряженной гармонической функции в единичном круге. Приближенное решение интегрального уравнения имеет вид усеченных рядов Фурье, и мы получаем коэффициенты, решая усеченную конечную линейную систему уравнений. Приводится оценка точности получаемого приближенного решения. Наконец, решение двумерной задачи Дирихле является вещественной частью интеграла Коши. Хотя интегральная форма решения и применение интегрального уравнения напоминают метод потенциалов, именно присутствие интеграла Коши — аналитической функции — позволяет применять аналитическое продолжение для вычисления решения в точках, сколь угодно близких к границе.

При решении двумерной задачи Коши в двусвязной области также су-

[44] Hu, H. Y. Weighted radial basis collocation method for boundary value problems / H. Y. Hu, J. S. Chen, W. Hu // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2007. — V. 69, № 13. — P. 2736–2757.

[45] Ling, L. An improved subspace selection algorithm for meshless collocation methods / L. Ling, R. Schaback // Internationa Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2009. — V. 80, № 13. — P. 1623–1639.

[46] Liu, C. A highly accurate collocation trefftz method for solving the Laplace equation in the doubly connected domains / C. Liu // Numer. Methods Partial Differ. Equ. — 2008. — V. 24. — P. 179–192.

[47] Wang, Z. A highly accurate regular domain collocation method for solving potential problems in the irregular doubly connected domains / Z. Wang, S. Li, et al. // Math. probl. eng. — 2014. — P. 9.

[48] Liu, C. S. A meshless regularized integral equations method (MRIEM) for solving the Laplace equation in the doubly connected domain / C. S. Liu // Proceeding of the 2^{nd} Asia-Pacifc International Conference on Computational Methods in Engineering Nov. 14–16. — 2006.

щественно используется свойство интеграла Коши, позволяющее вычислить коэффициент при логарифмическом слагаемом. Предложенный в диссертации метод был недавно перенесен на решение задачи Коши в областях любой конечной связности [49].

Основными преимуществами представленного в диссертации метода решения задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа, названного методом интеграла Коши, по сравнению с перечисленными численными методами являются следующие:

- Полученное решение имеет аналитическую форму, и значение решения можно найти в любой точке области.
- Полученное аналитическое решение имеет производную любого порядка, и это свойство очень полезно для исследования свойств решения и при решении прикладных вопросов.
- Метод применим для областей с любой гладкой граничной кривой, аппроксимированной полиномом Фурье, когда возникают трудности при решении методами конечных разностей и коллокации.
- Форма решения, содержащего интеграл Коши, позволяет применять аналитическое продолжение для вычисления значений в точках, сколь угодно близких к границе.

Отсюда вытекает **актуальность** применения метода интеграла Коши решения двумерной задачи Дирихле.

Цель настоящей работы - разработать новый приближенно- аналитический метод решения двумерной задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в произвольных односвязных областях и задачи Дирихле в двусвязных областях с гладкими границами, основанный на применении интеграла Коши и усеченных многочленов Фурье. Найти новый, основанный на аналитическом продолжении способ приближенного вычисления интеграла Коши во внутренних точках области вблизи границы.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Разработать приближенно-аналитический метод интеграла Коши для решения двумерной задачи Дирихле в односвязных и двусвязных областях с гладкими границами.
2. Разработать метод приближенного вычисления интеграла Коши во внутренних точках области вблизи границы и продолжения гармонической функции во внешность области.

[49] Abzalilov, D. F. Solution the Dirichlet problem for multiply connected domain using numerical conformal mapping / D. F. Abzalilov, P. N. Ivanshin, E. A Shirokova // Complex Analysis and Operator Theory. — 2019. — V. 13, № 3. — P. 1419–1429.

3. Разработать метод интеграла Коши для решения двумерной задачи Неймана в односвязных областях с гладкими границами.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Метод решения двумерного уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле и Неймана в конечных односвязных областях с гладкими границами на основе применения интеграла Коши.

2. Метод решения двумерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двусвязной области с гладкими границами на основе применения интеграла Коши, имеющий обобщение на область любой связности.

3. Сравнение предложенного приближенно-аналитического решения в каждом случае с соответствующим точным решением и решениями, полученными численными методами, для демонстрации эффективности предложенных в диссертации методов.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В диссертации разработан новый метод, который сводит двумерную задачу Дирихле к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода для граничных значений сопряженной гармонической функции. Новая техника, основанная на многочленах Фурье, используется для того, чтобы свести решение полученных интегральных уравнений к решению конечной линейной системы уравнений. Предложен новый способ вычисления значений гармонической функции во внутренних точках области вблизи границы.

Практическая значимость. Предлагаемый метод дает хорошее приближение к точным решениям двумерных задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Полученное аналитическое решение дает преимущество вычисления в любой точке области решения, и это очень полезно как в практических применениях, так и при решении теоретических задач более общего вида.

Достоверность. Достоверность полученных в диссертации результатов обоснована теоретическими выкладками и строгими математическими доказательствами.

Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих научных конференциях:

- XIII Международная летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань 21-27 августа 2017 г.).

- XVI Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2017» (Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань 24-29 ноября 2017 г.).

- Международная научная конференция «Современные методы, проблемы и применение операторной теории и гармонического анализа VIII» (Ростов-на-Дону, 22-27 апреля 2018 г.).

- XXV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Московский государственний университет имени М.В.Ломоносова, Москва 9-13 апреля 2018 г.)

- V научная конференция с международным участием «Геометрия многообразий и её приложения»,посвященная 100-летию профессора Р.Н. Щербакова (г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 3-6 июля 2018 г.).

- Двенадцатая Международная конференция «Сеточные методы для краевых задач и приложения (Казанский (приволжский) федеральный университет, Казань 20 – 25 сентября 2018 г.).

- XIV Международная летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань 7-12 сентября 2019 г.).

Личный вклад автора. Автор принимал активное участие в доказательстве основных утверждений, представленных в работе. Все вычислительные эксперименты были проведены непосредственно автором с использованием пакета прикладных программ Matlab. Постановка задачи и идея применения метода интеграла Коши и сплайн-интерполяции принадлежат научному руководителю. Диссертанту принадлежит от 68% до 85% содержания всех опубликованных тезисов и статей в соавторстве с руководителем. В статьях 5 и 9 диссертанту принадлежит 50% содержания.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** обоснована актуальность диссертационный работы, дан краткий исторический очерк проблематики диссертации, приведен обзор литературы. Определяется объект обосновываются, его цель и задачи. Приводятся основные результаты диссертации, научная новизна, практическая ценность и апробация работы. Также приведены публикации автора по теме диссертации, краткое содержание работы.

В **первой главе** разработан метод построения непрерывных приближенных решений двумерных задач Дирихле и Неймана в произвольной односвязной области с гладкой границей.

В **§ 1.1** поставлена задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

с граничными условиями в виде:

$$u(x(t), y(t)) = f_0(t), \qquad (x(t), y(t)) \in \partial\Omega, t \in [0, 2\pi], \tag{2}$$

где $f_0(t)$ непрерывная функция на гладком простом контуре $\partial\Omega$. В этом параграфе задача Дирихле (1 - 2) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для граничных значений сопряженной гармонической функции.

Теорема 1.1 *Пусть Ω - односвязная область с простой границей $\partial\Omega = \{z = z(t), t \in [0, 2\pi]\}$. Пусть $z(t) = x(t)+iy(t)-2\pi$-периодическая функция, представленная с помощью многочлена Фурье:*

$$z(t) = \sum_{j=-m}^{m} c_j e^{ijt}. \tag{3}$$

Пусть $f_0(t) \in C^{2,\alpha}[0, 2\pi]-2\pi$-периодическая функция, $\alpha \in (0, 1]$, тогда решение двумерной задачи Дирихле (1- 2) в точке $(x, y) \in \Omega$ является вещественной частью интеграла Коши

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f_0(t) + ig_0(t)}{z(t) - x - iy} z'(t)dt\right),$$

где $g_0(t)$- решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$g_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)\left(\arg\left[z(\tau) - z(t)\right]\right)'_\tau d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau)\left(\log|z(\tau) - z(t)|\right)'_\tau d\tau. \tag{4}$$

В соответствии с (3) рассмотрим сомножитель $(e^{i\tau} - e^{it})$ в выражении $(z(\tau) - z(t))$, чтобы вычислить несобственный PV-интеграл в (4):

$$\begin{aligned} z(\tau) - z(t) &= \sum_{k=-m}^{m} c_k\left(e^{ik\tau} - e^{ikt}\right) \\ &= \left(e^{i\tau} - e^{it}\right)\left[\sum_{k=1}^{m} c_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^{m} c_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right] \\ &= e^{i\left(\frac{\tau+t}{2}\right)} 2i\sin\left(\frac{\tau - t}{2}\right)\left[\sum_{k=1}^{m} c_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right. \\ &\qquad \left. - \sum_{k=1}^{m} c_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right], \end{aligned}$$

$$\log[z(\tau)-z(t)] = \log(2i) + \log\left(\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right)\right) + i\frac{\tau+t}{2} + \log\left(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^{m} c_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right).$$

Поэтому уравнение (4) имеет вид:

$$g_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)K(\tau,t)d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau)\cot\frac{\tau-t}{2}d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau)L(\tau,t)d\tau, \quad (5)$$

где

$$K(\tau,t) = \mathrm{Im}\left[\log\left(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^{m} c_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right)\right]'_{\tau},$$

$$L(\tau,t) = \mathrm{Re}\left[\log\left(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^{m} c_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right)\right]'_{\tau}.$$

Для построения приближенного решения уравнения (5) приведем следующую лемму.

Лемма 1.1 *Пусть Ω - односвязная область с простой гладкой границей $\partial\Omega = \{z = z(t), t \in [0,2\pi]\}$ с представлением (3). Пусть $f_0(t) \in C^{2,\alpha}[0,2\pi]$— 2π-периодическая функция, $\alpha \in (0,1]$, тогда приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма (4) может быть сведено к решению конечной линейной системы уравнений.*

Интегральное уравнение (4) сводится к решению конечной системы линейных уравнений неизвестных коэффициентов разложения Фурье $g_0(t)$.

Наконец, приближенное решение уравнения Лапласа (1 - 2) является вещественной частью интеграла Коши:

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f_0(t)+ig_0(t)}{z(t)-(x+iy)}z'(t)dt\right). \quad (6)$$

Поскольку медленная сходимость решения (6) вблизи граничных точек обусловлена сингулярностью интеграла Коши , введены два метода для улучшения приближенного решения в точках вблизи границ:

- метод линеаризации,
- метод аналитического продолжения.

Кроме того, исследуется возможность продолжения решения задачи Дирихле во внешность области.

Представлены два примера решения задачи Дирихле и проведено сравнение с точным решением по норме пространства C и с методом конечных элементов по норме пространства L_2, чтобы показать эффективность предложенного метода.

В **§ 1.2** рассмотрена задача Неймана для уравнения Лапласа в односвязной области

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{7}$$

и граничным условиям Неймана, определенным в параметрической форме:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(t), \qquad (x,y) \in \partial\Omega = \{z(t) = x(t) + iy(t), \qquad t \in [0, 2\pi]\}, \tag{8}$$

где n - направление внешней нормали к границе Ω в точке $z(t)$.

Задача Неймана превращается в эквивалентную задачу Дирихле относительно сопряженной гармонической функции с помощью условий Коши-Римана. Интегральный метод Коши применяется для решения задачи Дирихле, и мы получаем решение задачи Неймана с произвольным слагаемым. Представлены два примера и проведено сравнение с точным решением по норме пространства C, чтобы показать эффективность предложенного метода.

В **второй главе** строится приближенное аналитическое решение двумерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двусвязной области с гладкими границами.

В **§ 2.1** поставлена задача Дирихле в конечной двусвязной области $\Omega, 0 \notin \Omega$, с гладкими граничными кривыми $\partial\Omega = L_0 \cup L_1$. Предположим, что граница состоит из внешней простой гладкой кривой $L_0 = \{z = z_0(t), t \in [0, 2\pi]\}$, которая обходится в направлении против часовой стрелки и внутренней простой гладкой кривой $L_1 = \{z = z_1(t), t \in [0, 2\pi]\}$, которая обходится по часовой стрелке с ростом параметра t. Задача Дирихле формулируется следующим образом: необходимо построить гармоническую функцию $u(x,y)$ в Ω по её заданным граничным значениям $f_j(t)$ на граничных кривых L_j, $j = 0, 1$, то есть найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{9}$$

по граничным условиям, заданным в виде

$$u\left(x(t), y(t)\right) = \begin{cases} f_0(t), & (x(t), y(t)) \in L_0, \quad t \in [0, 2\pi], \\ f_1(t), & (x(t), y(t)) \in L_1, \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 2.1 *Пусть $\Omega, 0 \notin \Omega$ - двусвязная область с границей $\partial\Omega = L_0 \cup L_1$, $L_0 = \{z = z_0(t), t \in [0, 2\pi]\}$, $L_1 = \{z = z_1(t), t \in [0, 2\pi]\}$, состоящей*

из простых гладких компонент. Пусть $z_k(t) = x_k(t) + iy_k(t), k = 0, 1\text{-}\ 2\pi$ *периодические функции, представимые с помощью многочленов Фурье:*

$$\begin{aligned} z_0(t) &= \sum_{j=-m}^{m} c_j e^{ijt}, \\ z_1(t) &= \sum_{j=-m}^{m} d_j e^{ijt}. \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть $f_k(t) \in C^{2,\alpha}[0, 2\pi], k = 0, 1\text{-}\ 2\pi-$ *периодические функции, тогда решение двумерной задачи Дирихле (9- 10) в точке* $(x, y) \in \Omega$ *вычисляется по формуле*

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{1} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f_j(t) - A\log|z_j(t)| + ig_j(t)}{z_j(t) - \zeta} z_j'(t)dt\right) + \frac{A}{2}\log\left(x^2+y^2\right),$$

где $\zeta = x + iy$ *и* $g_k(t), k = 0, 1\text{-}$ *решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:*

$$\begin{aligned} g_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} & g_0(\tau)\left[\arg\left(z_0(\tau) - z_0(t)\right)\right]_\tau' d\tau \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\left[\arg\left(z_1(\tau) - z_0(t)\right)\right]_\tau' d\tau \\ & - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_0(\tau) - A\log|z_0(\tau)|\right)\left[\log\left(z_0(\tau) - z_0(t)\right)\right]_\tau' d\tau \\ & - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_1(\tau) - A\log|z_1(\tau)|\right)\left[\log\left(z_1(\tau) - z_0(t)\right)\right]_\tau' d\tau, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} g_1(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} & g_0(\tau)\left[\arg\left(z_0(\tau) - z_1(t)\right)\right]_\tau' d\tau \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\left[\arg\left(z_1(\tau) - z_1(t)\right)\right]_\tau' d\tau \\ & - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_0(\tau) - A\log|z_0(\tau)|\right)\left[\log\left(z_0(\tau) - z_1(t)\right)\right]_\tau' d\tau \\ & - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_1(\tau) - A\log|z_1(\tau)|\right)\left[\log\left(z_1(\tau) - z_1(t)\right)\right]_\tau' d\tau. \end{aligned} \tag{13}$$

Константа A вычисляется из соотношения:

$$\sum_{s=0}^{1}\left(\int_0^{2\pi}\left[f_s(t) - A\log|z_s(t)| + ig_s(t)\right]\frac{z_s'(t)}{z_s(t)}dt\right) = 0.$$

В соответствии с (11) рассмотрим так же, как в случии односвязной области, сомножитель $(e^{i\tau}-e^{it})$ в выражении $(z_k(\tau)-z_k(t)), k=0,1$, чтобы вычислить несобственные PV-интегралы. После упрощения уравнение (12) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
g_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)K_0(\tau,t)d\tau \\
- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_0(\tau) - A\log|z_0(\tau)|\right)\cot\frac{\tau-t}{2}d\tau \\
- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_0(\tau) - A\log|z_0(\tau)|\right)Y_0(\tau,t)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)K_1(\tau,t)d\tau \\
- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_1(\tau) - A\log|z_1(\tau)|\right)Y_1(\tau,t)d\tau, \quad (14)
\end{aligned}
$$

где функции ядра определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
K_0(\tau,t) &= \mathrm{Im}\left[\log\left(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^{m} c_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right)\right]'_\tau, \\
Y_0(\tau,t) &= \mathrm{Re}\left[\log\left(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^{m} c_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right)\right]'_\tau, \\
K_1(\tau,t) &= \mathrm{Im}\left[\log\left(z_1(\tau)-z_0(t)\right)\right]'_\tau, \\
Y_1(\tau,t) &= \mathrm{Re}\left[\log\left(z_1(\tau)-z_0(t)\right)\right]'_\tau.
\end{aligned}
$$

Уравнение (13) принимает вид

$$
\begin{aligned}
g_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\tau) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)K_2(\tau,t)d\tau \\
- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_1(\tau) - A\log|z_1(\tau)|\right)\cot\frac{\tau-t}{2}d\tau \\
- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_0(\tau) - A\log|z_0(\tau)|\right)Y_2(\tau,t)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)K_3(\tau,t)d\tau \\
- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f_1(\tau) - A\log|z_1(\tau)|\right)Y_3(\tau,t)d\tau, \quad (15)
\end{aligned}
$$

где функции ядра определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
K_2(\tau,t) &= \operatorname{Im}\left[\log\left(z_0(\tau)-z_1(t)\right)\right]'_\tau,\\
Y_2(\tau,t) &= \operatorname{Re}\left[\log\left(z_0(\tau)-z_1(t)\right)\right]'_\tau,\\
K_3(\tau,t) &= \operatorname{Im}\left[\log\left(\sum_{k=1}^{m} d_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^{m} d_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right)\right]'_\tau,\\
Y_3(\tau,t) &= \operatorname{Re}\left[\log\left(\sum_{k=1}^{m} d_k e^{ikt}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^{m} d_{-k}e^{-ik\tau}\sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right)\right]'_\tau.
\end{aligned}
$$

Для построения приближенного решения системы уравнений (14-15) приведем следующую лемму.

Лемма 2.1 *Пусть* $\Omega, 0 \notin \Omega$, - *двусвязная область с простыми гладкими граничными компонентами* L_0 *и* L_1, $L_0 = \{z = z_0(t), t \in [0,2\pi]\}$, $L_1 = \{z = z_1(t), t \in [0,2\pi]\}$. *Пусть* $z_k(t) = x_k(t)+iy_k(t) - 2\pi$*-периодические функции. Пусть* $f_k(t) \in C^{2,\alpha}[0,2\pi], k = 0,1, -2\pi$*-периодические функции,* $\alpha \in (0,1]$, *тогда система интегральных уравнений Фредгольма (14-15) может быть сведена к решению конечной системы линейных уравнений.*

Согласно лемме 2.1 мы ищем решение в виде:

$$
\begin{aligned}
g_0(t) &= \alpha_{00} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_{0n}\cos(nt) + \beta_{0n}\sin(nt)\\
g_1(t) &= \alpha_{10} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_{1n}\cos(nt) + \beta_{1n}\sin(nt),
\end{aligned}
$$

и система интегральных уравнений (14-15) сводится к решению конечной системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения Фурье функций $g_k(t), k = 0,1$. Мы можем выбрать $\alpha_{00} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)d\tau = 0$.

Значение $\alpha_{10} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)d\tau$ получен в одновременно со значением константы A следующим образом. Так как точка $z = 0$ является внешней точкой области Ω и функции $f_s(t) - A\log|z_s(t)| + ig_s(t), s = \{0,1\}$, являются граничными значениями аналитической функции в Ω, значение A и α_{10} можно рассчитать по формуле

$$
\sum_{s=0}^{1}\left(\int_0^{2\pi}\left[f_s(t) - A\log|z_s(t)| + ig_s(t)\right]\frac{z'_s(t)}{z_s(t)}dt\right) = 0,
$$

приравнивая нулю действительную и мнимую части.

Наконец, решение $u(x,y)$ задачи Дирихле (9-10) в двусвязной области

Ω может быть выражено как

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{1}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f_j(t) - A\log|z_j(t)| + ig_j(t)}{z_j(t)-(x+iy)}z_j'(t)dt\right) + \frac{A}{2}\log\left(x^2+y^2\right).$$

Так же как в первой главе, для вычисления значений гармонической функции вблизи границы применяются

- метод линеаризации, когда вблизи границы гармоническая функция заменяется линейной,
- метод аналитического продолжения, когда вблизи границы соответствующая аналитическая функция - интеграл Коши - заменяется отрезком ряда Тейлора..

В **§ 2.3** представлены четыре примера и проведено сравнение с точным решением, методом конечных элементов и методом Трефftца , чтобы показать эффективность предложенного метода.

В **§ 2.4** представлено решение двумерной задачи Дирихле в многосвязной области. Метод, использованный в диссертации для решения задачи Дирихле в двусвязной области был обобщен для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в произвольной многосвязной области с гладкими границами.

В **§ 2.5** обсуждается возможность на основе решения двумерных задач Дирихле получить интерполяцию решения трехмерной задачи Дирихле вблизи границы соответствующего тела.

Работы автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в следующих печатных работах автора: Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, входящих в перечень **ВАК** РФ.

1. El-Shenawy A. A Cauchy integral method to solve the 2D Dirichlet and Neumann problems for irregular simply-connected domains / A. El-Shenawy, E.A. Shirokova // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. V. 160, №. 4 , 2018. P. 778–787.

Scopus и WoS:

2. Shirokova E. A. A Cauchy integral method of the solution of the 2D Dirichlet problem for simply or doubly connected domains / E. A. Shirokova, A. El-Shenawy// Numerical Methods for Partial Differential Equations. V. 34, 2018 P. 2267–2278.

3. El-shenawy A. The approximate solution of 2D Dirichlet problem in doubly connected domains / A. El-shenawy E. A. Shirokova// Advances in Mathematical Physics. V. 2018, Article ID 6951513, 6 pages.

4. El-Shenawy A. Approximate solution for 3D Dirichlet problem in a doubly connected arbitrary finite solid with smooth surface / A. El-Shenawy, E. A. Shirokova// Journal of Physics: Conference Series. V. 1158, № 2, 2019. P. 022040.

В других изданиях:

5. El-Shenawy A. Linear spline interpolation solution for 3D Dirichlet problem for arbitrary solid with smooth surface / A. El-Shenawy, P. N. Ivanshin // Geometry of manifolds and its applications: the fifth scientific conference, Ulan-Ude-Lake Baikal, July 3-6,2018. P. 190-203.

6. Elshenawy A. Dirichlet problem solution for simply and doubly connected domains with smooth boundaries / A. Elshenawy, E.A. Shirokova // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2017. – Т. 54. – С. 12–15.

7. Эльшенави А. Построение приближенного решения двумерной задачи Дирихле в двусвязных областях вблизи границ / А. Эльшенави, Е.А. Широкова // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2017. - Т.55. – С. 160-162.

8. Elshenawy A. Approximate solution of 2D Neumann problem in arbitrary simply connected domains with smooth boundaries// Материалы Международного молодежного научного форума. Ломоносов-2018., [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2018.

9. Elshenawy A. Linear spline interpolation solution for 3d Dirichlet problem in a simply connected solid with smooth boundary / A. Elshenawy, P.N. Ivanshin // Proceedings of the VIII international conference Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis, Rostov-on-Don, 2018. P.59-60.

10. Эльшенави А. Оценка ошибки линейного сплайн-интерполяционного решения трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном теле/ А. Эльшенави, Е. А. Широкова // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2019. – Т. 57. – С. 380–382.