Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

На правах рукописи

УДК 519.174, 519.179.1

Хузиева Алина Эдуардовна

ЗАДАЧИ О РАСКРАСКАХ РАЗРЕЖЕННЫХ ГИПЕРГРАФОВ

01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертаци на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2019

Работа выполнена на кафедре дискретной математики
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Шабанов Дмитрий Александрович

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

Защита состоится «5» декабря 2019 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.004 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):
https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php

Работа представлена «2» сентября 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона "О науке и государственной научно-технической политике".

Введение

Актуальность темы

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению ряда известных задач одного из центральных разделов современной дискретной математики — теории гиперграфов. Данные задачи относятся к теории раскрасок гиперграфов, чье возникновение как самостоятельного направления принято связывать с классической работой 1961 года П. Эрдеша и А. Хайнала[1]. В ней авторы поставили первую экстремальную задачу о раскрасках гиперграфов, ныне известную как проблему Эрдеша–Хайнала. В дальнейшем Эрдеш и Хайнал ввели понятие хроматического числа гиперграфа, и в этих терминах их проблему можно сформулировать следующим образом: найти *величину* $m(n,r)$, *равную минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе* n*-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше* r. Отметим, что вопрос легко находит ответ в случае графов, при $n = 2$, но становится нетривиальным при любых $n > 2$ и в настоящее время является центральным в теории раскрасок гиперграфов. Изучению проблемы Эрдеша–Хайнала посвящены работы таких классиков комбинаторной математики, как Л. Ловас[2], Н. Алон[3], П. Сеймур[4], Й. Бек[5], Дж. Спенсер[6], А.В. Косточка[7] и др. В последнее десятилетие задача изучалась особенно активно, тут стоит выделить работы А. Плухара[8], Д.А. Шабанова[9], Х. Гебауэр[10], Я. Козика, Д.Д. Черкашина[11] и др.

[1] P. Erdős, A. Hajnal, “On a property of families of sets”, *Acta Mathematica of the Academy of Sciences*, Hungary, **12**:1-2 (1961), 87–123.

[2] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627

[3] N. Alon, “Hypergraphs with high chromatic number”, *Graphs and Combinatorics*, **1**:1 (1985), 387–389

[4] P. D. Seymour, “A note on a combinatorial problem of Erdős and Hajnal”, J. London Math. Soc., 8:2 (1974), 681–682.

[5] J. Beck, “On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász”, Discrete Math.,17:2 (1977), 127–131.

[6] J. Spencer, “Coloring n-sets red and blue”, J. Combin. Theory Ser. A, 30:1 (1981),112–113

[7] A. V. Kostochka, “Coloring uniform hypergraphs with few colors”, Random Structures Algorithms, 24:1 (2004), 1–10

[8] A. Pluhár, “Greedy colorings for uniform hypergraphs”, Random Structures Algorithms, 35:2 (2009)

[9] Д. А. Шабанов, “О хроматическом числе конечных систем подмножеств”, Матем.заметки, 85:6 (2009), 951–954; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On the chromatic number of finite systems of subsets”, Math. Notes, 85:6 (2009), 902–905.

[10] H. Gebauer, “On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges”, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 120 (2013), 1483–1490.

В настоящее время существует очень много различных обобщений проблемы Эрдеша–Хайнала. Одна часть из них связана с изучением некоторого специального подкласса полного класса n-однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, определяемого ограничениями на структуру гиперграфа. Второе направление рассматривает запреты на наличие других раскрасок, а не только правильных r-раскрасок. Третий класс задач изучает экстремальное значение не числа ребер, а другой характеристики гиперграфа. В последнее десятилетие появился значительный интерес к, так называемым, онлайн раскраскам, относящимся и к алгоритмическим вопросам теории гиперграфов. В общем виде проблему типа Эрдеша–Хайнала можно сформулировать следующим образом: *"найти минимально возможное значение некоторой характеристики гиперграфа (число ребер, максимальная степень вершины, т.п.) в классе n-однородных гиперграфов, не допускающих раскрасок специального вида (например, правильных r-раскрасок, полноцветных r-раскрасок, предписанных раскрасок и т.д.), а также, возможно, обладающих дополнительными структурными свойствами (b-простой гиперграф, с обхватом больше s и т.п.)"*.

Одной из фундаментальных работ по теории раскрасок гиперграфов является знаменитая статья 1973 года П. Эрдеша и Л. Ловаса, в которой они поставили ряд проблем, а также предложили один из основных вероятностных инструментов современной комбинаторики — Локальную лемму. В этой статье авторами была доказана теорема о существовании n-однородного гиперграфа с хроматическим числом больше r и обхватом больше s для любых $n \geqslant 3, r \geqslant 2, s \geqslant 2$. Более того, они показали, что число ребер и максимальную степень вершины в подобном гиперграфе можно разумно ограничить сверху. Тем самым, было положено начало изучению экстремальной величины $m(n, r, s)$, равной минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r и обхватом больше s. Изучению $m(n, r, s)$ в разное время были посвящены работы З. Сабо[12], А.В. Косточки, Д. Мубаи, В. Рёдля, П. Тетали[13], А. Фриза, Т, Бомана[14], Д.А. Шабанова[15] и других авторов, что говорит об интересе,

[11] Cherkashin, J. Kozik, "A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs", Random Structures and Algorithms, 47:3 (2015), 407–413.

[12] Z. Szabó, "An application of Lovasz Local Lemma – a new lower bound for the vander Waerden number", Random Structures Algorithms, 1:3 (1990), 343–360.

[13] A.V. Kostochka, D. Mubayi, V. Rödl, P. Tetali, "On the chromatic number of set systems", *Random Structures and Algorithms*, **19**:2 (2001), 87–98.

[14] T. Bohman, A. Frieze, D. Mubayi, "Coloring H-free hypergraphs", Random Structures Algorithms, 36:1 (2010), 11–25.

[15] Д. А. Шабанов, "О нижних оценках в комбинаторной задаче Эрдеша–Ловаса", Докл. РАН, 431:5 (2010), 602–604; англ. пер.: D. A. Shabanov, "Lower bounds in the combinatorial problem of Erdős and L. Lovász", Dokl. Math., 81:2 (2010), 286–288.

который представляет данная задача. Несмотря на это, зазор между известными верхними и нижними оценками этой величины все еще остается достаточно существенным, что говорит об актуальности получения новых продвижений в ней. Представленные в первой главе данной работы результаты позволяют улучшить известные нижние оценки $m(n, r, s)$ для $s > 5$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена задаче об онлайн предписанном хроматическом числе полного r-дольного k-однородного гиперграфа $H(m, r, k)$ с равными размерами долей m. Понятие предписанного хроматического числа, как и понятие предписанной раскраски, появилось независимо в работах В.Г. Визинга[16] и П. Эрдеша, А.Л. Рубина, Г. Тейлора[17]. Одним из первых результатов относительно предписанного хроматического числа стал тот факт, что предписанное хроматическое число может быть значительно больше обычного хроматического числа. П. Эрдеш с соавторами показали, что предписанное хроматическое число полного двудольного графа $K_{m,m}$ растет как двоичный логарифм m. В недавней работе[18] Л. Дюрай, Г. Гутовский и Я. Козик доказали интересный факт, что предписанное онлайн хроматическое число имеет ту же самую асимптотику, однако разность между онлайн предписанным и предписанным хроматическими числами $K_{m,m}$ может быть сколь угодно велика.

Далее последовали работы, по-разному обобщающие результат Эрдеша и соавторов. Значительное число работ посвящено поиску асимптотического поведения предписанного хроматического числа полного r-дольного графа K_{m*r}, среди авторов выделим Х. Киерстеда[19], М. Кривелевича, Н. Газита[20], Д.А. Шабанова[21]. П. Хакселл и Ж. Верстрате[22] отыскали асимптотику предписанного хроматического числа полного r-дольного r-однородного гиперграфа с мощностью каждой доли равной m. Совсем недавно Д.А. Шабанов и Т.М. Шайхеева[23] обобщили предыдущие результаты и установили асимптотику предписанного хроматического числа

[16]В.Г. Визинг, “Раскраска вершин графа в предписанные цвета”, *Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: сборник научных трудов*, Изд-во Института математики СО АН СССР, Новосибирск, **29** (1976), 3–10

[17]P. Erdős, A. L. Rubin and H. Taylor, “Choosability in graphs”, *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, 1979, Congr. Numer. **26** (1980), 125–157.

[18]L. Duraj, G. Gutowski, J. Kozik, “Chip games and paintability”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **23**:3 (2016), Paper №P3.3.

[19]H.A. Kierstead, “On the choosability of complete multipartite graphs with part size three”, *Discrete Mathematics*, **211**:1-3, (2000), 255-259.

[20]N. Gazit and M. Krivelevich, “On the asymptotic value of the choice number of complete multi-partite graphs”, *Journal of Graph Theory*, **52** (2006), 123–134.

[21]D.A. Shabanov, “On a generalization of Rubin’s theorem”, *Journal of Graph Theory*, **67**:3 (2011), 226–234.

[22]P. Haxell, J. Verstraëte, “List coloring hypergraphs”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **17** (2010), Research paper N 129.

[23]D.A. Shabanov, T.M. Shaikheeva, “On the list chromatic number of the complete multi-partite hypergraphs and multiple coverings by independent sets”, preprint, https://mipt.ru/education/chairs/dm/laboratoriya-prodvinutoy-kombinatoriki-i-setevykh-prilozheniy/preprinty.

для полного r-дольного k-однородного гиперграфа $H(m,r,k)$ с мощностью каждой доли m, каждое ребро которого содержит ровно одну вершину из некоторых $k < r$ долей. Можно смело утверждать, что представленные во второй главе данной работы результаты об асимптотическом поведении онлайн предписанного хроматического числа гиперграфа $H(m,r,k)$ являются актуальными и находятся в тренде мировых исследований.

Третье направление исследований диссертации связано с раскрасками случайных гиперграфов в биномиальной модели $H(n,k,p)$. Данная модель хорошо известна, в первую очередь, в случае графов: $G(n,p) = H(n,2,p)$. Случайный граф $G(n,p)$ является одним из основных объектов изучения в вероятностной комбинаторике, его систематическое исследование началось с классических работ П. Эрдеша и А. Реньи[24],[25]. Основные результаты сформировавшейся в настоящее время теории могут быть найдены в монографиях Б. Боллобаша[26] и С. Янсона, Т. Лучака, А. Ручинского[27]. Задача о хроматическом числе случайного графа $G(n,p)$ всегда находилась в центре интереса исследователей по теории случайных графов. Ее изучению посвящены работы таких известных математиков, как Дж. Гриммет, К. Макдиармид[28], Б. Боллобаш[29], Т. Лучак[30], Дж. Спенсер, Н. Алон, М. Кривелевич[31], Д. Ахлиоптас, А. Коджа-Оглан[32] и многие др. В гиперграфах понятие правильной раскраски можно определить по-разному. В третьей главе изучается вопрос о возможности сильной раскраски случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ в r цветов. Изучению хроматического числа $H(n,k,p)$ и сильного хроматического числа $H(n,k,p)$ посвящены работы Дж. Шмидт, Э. Шамира[33], М. Кривелевича, Б. Судакова[34], А. Коджа-Оглана[35], А. Фриза, К. Гринхилл[36], Д.А. Шабанова[37] и

[24] P. Erdős, A. Rényi, "On random graphs I", *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.

[25] P. Erdős, A. Rényi, "On the evolution of random graphs", *Publications of the Mathematical Institute of of the Hungarian Academy of Sciences*, **5**:1–2 (1960), 17–61.

[26] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[27] S. Jansen, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[28] G. Grimmett, C. McDiarmid, "On colouring random graphs", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **77**:2 (1975), 313–324.

[29] B. Bollobás, "The chromatic number of random graphs", *Combinatorica*, **8**:1 (1988), 49–56.

[30] T. Łuczak, "The chromatic number of random graphs", *Combinatorica*, **11**:1 (1991), 45–54.

[31] N. Alon, M. Krivelevich, "The concentration of the chromatic number of random graphs", *Combinatorica*, **17**:3 (1997), 303–313.

[32] A. Coja–Oghlan, K. Panagiotou, A. Steger, "On the chromatic number of random graphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **98** (2008), 980–993.

[33] J. Schmidt-Pruzan, E. Shamir, E. Upfal, "Random hypergraph coloring algorithms and the weak chromatic number", *Journal of Graph Theory*, **8** (1985), 347–362.

[34] M. Krivelevich, B. Sudakov, "The chromatic numbers of random hypergraphs", *Random Structures and Algorithms*, **12**:4 (1998), 381–403.

[35] A. Coja-Oghlan, L. Zdeborová, "The condensation transition in random hypergraph 2-coloring", *Proc. 23rd Annual ACM SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SIAM, 2012, 241–250.

[36] M. Dyer, A. Frieze, C. Greenhill, "On the chromatic number of a random hypergraph", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **113** (2015), 68–122.

др. В третьей главе настоящей диссертации получена новая оценка точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у 4-однородного случайного гиперграфа $H(n,4,p)$.

Подведем итоги. В диссертации изучаются хорошо известные и актуальные задачи теории гиперграфов, находящиеся в центре мировых исследований по комбинаторике.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является исследование известных проблем теории раскрасок гиперграфов. Основными задачами являются:

1. исследование экстремальной проблемы комбинаторного анализа об отыскании минимально возможного количества ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше r и обхватом больше s;

2. исследование онлайн предписанного хроматического числа полных многодольных гиперграфов;

3. исследование онлайн аналогов экстремальных задач о раскрасках гиперграфов;

4. изучение точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у 4-однородного случайного гиперграфа в биномиальной модели.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно.

Методы исследования

В настоящей диссертационной работе использованы комбинаторные и вероятностные методы теории гиперграфов. В первой главе доказательства опираются на метод случайной перекраски. Во второй главе используется связь предписанных раскрасок полных многодольных графов и гиперграфов с экстремальными

[37] Д.А. Шабанов, “О концентрации хроматического числа случайного гиперграфа”, *Доклады Академии Наук*, **475**:1 (2017), 24–28.

задачами о раскрасках гиперграфов. В третьей главе основным инструментом доказательств является метод второго момента.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы, которыми они получены, могут найти применения в исследованиях по экстремальным и вероятностным задачам теории гиперграфов, по теории Рамсея и аддитивной комбинаторике.

Положения, выносимые на защиту

В диссертационной работе были исследованы актуальные задачи экстремальной комбинаторики и теории гиперграфов. Основные полученные результаты состоят в следующем:

- получены новые оценки величины $m(n, r, s)$, равной минимальному числу ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше r и обхватом больше s;

- доказан структурный результат о количественной связи характеристик однородного гиперграфа с большим обхватом и большим хроматическим числом;

- найдена асимптотика онлайн предписанного хроматического числа полного r-дольного k-однородного гиперграфа $H(m, r, k)$;

- обоснована новая нижняя оценка точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у случайного 4-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, 4, p)$.

Апробация результатов

Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

1. 57-я научная конференция МФТИ, посвященная 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы (Долгопрудный, 24-29 ноября 2014 года);

2. 59-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 21-26 ноября 2016 года);

3. 60-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 20-25 ноября 2017 года).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в работах [A1]–[A4]. Всего по теме опубликовано четыре работы, из них три в соавторстве. Работы [A1], [A2] опубликованы в изданиях, индексируемых Scopus и Web of Science. Работы [A3] и [A4] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. Все результаты данной диссертации, включая результаты, опубликованные в совместных работах, были получены автором диссертации самостоятельно.

Структура работы

Настоящая диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации составляет 83 страницы. Список литературы содержит 60 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава диссертации состоит из 5 параграфов и посвящена экстремальной проблеме комбинаторного анализа об отыскании минимально возможного количества ребер n-однородного гиперграфа с обхватом больше s и хроматическим числом больше r. Формально данную величину можно записать следующим образом:

$$m(n,r,s) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный},\ \chi(H) > r, g(H) > s\}.$$

В параграфе **1.1** приводится история задачи и основные определения. Так же рассматриваются известные результаты исследований, посвященных изучению величины $m(n,r,s)$.

В параграфе **1.2** формулируется теорема, улучшающая результат Косточки и Кумбхвата[38] для случая гиперграфов с обхватом больше пяти.

Пусть $H = (V,E)$ — n-однородный гиперграф, а δ — некоторое положительное число. Вершина $v \in V$ называется δ-*легкой*, если ее степень в гиперграфе H не превосходит δ. В противном случае, вершина называется δ-*тяжелой*. Ребро называется δ-*тяжелым*, если в нем более половины вершин являются δ-тяжелыми. В противном случае ребро называется δ-*легким*.

[38] A.V. Kostochka, M. Kubmhat, "Coloring uniform hypergraphs with few edges", *Random Structures and Algorithms*, **35**:3 (2009), 348–368.

Теорема 1. *Пусть $a_0 > 0$ — фиксированное число. Тогда существуют такие положительные $c = c(a_0)$ и $n_0 = n_0(a_0)$, что при $\delta = \delta(n) = c \cdot r^{n-1}$ и $n > n_0$ для любого n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ с обхватом больше пяти и с условиями:*

(1.C.1) $\Delta(H) \leqslant n^{a_0} r^{n-1}$,

(1.C.2) *каждая вершина H содержится не более чем в $c \cdot r^{n-1}$ δ – тяжелых ребрах,*

выполнено $\chi(H) \leqslant r$.

Новые нижние оценки для величины $m(n, r, s)$ при $5 \leqslant s < n/2$ доказываются в данном параграфе, как следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *Существует такая абсолютная константа $c > 0$, что для $5 \leqslant s < n/2$ выполнено*

$$m(n, r, s) \geqslant c^{\lfloor s/2 \rfloor} r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} \text{ при четном } s;$$

$$m(n, r, s) \geqslant c^{\lfloor s/2 \rfloor} n\, r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} \text{ при нечетном } s.$$

В параграфе **1.3** приводится формулировка и доказательство варианта Локальной леммы, предложенной в работе Козика и Шабанова[39]. Данная лемма позволяет доказывать положительность вероятности одновременного невыполнения ряда событий в условиях слабой зависимости. Локальная лемма является основным инструментом доказательства теоремы 1.

Теорема 2. (Локальная лемма). *Пусть $X_1, \ldots, X_N$ — независимые случайные векторы, а $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_M$ — события из алгебры, порожденной ими. Обозначим через $vln(\mathcal{A}_j)$ — такой минимальный набор векторов X_i, что $\mathcal{A}_j \in \sigma(X_i : i \in vln(\mathcal{A}_j))$. Введем для каждого $i = 1, \ldots, N$ следующие многочлены:*

$$w_i(z) = \sum_{\mathcal{A} : X_i \in vln(\mathcal{A})} \mathsf{P}(\mathcal{A}) z^{|vln(\mathcal{A})|}.$$

Если существует такой многочлен $w(z)$, что для любого $i = 1, \ldots, N$ и любого $z \geqslant 1$ выполнено $w_i(z) \leqslant w(z)$, и, кроме того, существует такое $\tau \in (0, 1)$, что

$$w\left(\frac{1}{1-\tau}\right) \leqslant \tau,$$

то $\mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{M} \overline{\mathcal{A}_j}\right) > 0$.

[39] J. Kozik, D.A. Shabanov, "Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **116** (2016), 312–332.

Параграф **1.4** посвящен доказательству теоремы 1. В качестве основного метода доказательства используется метод случайной перекраски. В нем наследуются идеи Косточки и Кумбхата относительно двухэтапной перексраски, идеи построения раскраски из работы Купавского и Шабанова[40], а так же техника вероятностного анализа из работы Козика и Шабанова.

Наконец, в заключительном параграфе **1.5** обсуждаются условия усиления теоремы 1.

Вторая глава диссертации посвящена онлайн раскраскам гиперграфов. Данная глава состоит из 5 параграфов.

Параграф **2.1** дает определения предписанного хроматического числа и онлайн предписанного хроматического числа. Гиперграф $H = (V, E)$ называется предписанно r-раскрашиваемым, если для каждого предложенного списка цветов $L = \{L(v) : |L(v)| = r, v \in V\}$ (такой список будем называть r-однородным вершинным предписанием), существует правильная раскраска, соответствующая предписанию, т.е. каждая вершина $v \in V$ раскрашена в цвет из $L(v)$. Предписанным хроматическим числом гиперграфа H, $\chi_l(H)$, называется такое минимальное r, что H является предписанно r-раскрашиваемым.

Онлайн аналог предписанного хроматического числа был предложен в работах Шауца[41] [42] и Жу[43] и выглядит следущим образом. Два игрока Lister и Painter играют в игру $Game_1(H, r)$ на заданном гиперграфе $H = (V, E)$ при $r \geqslant 2$. X_0 пологаем равным пустому множеству. В раунде игры под номером i Lister должен выбрать непустое множество вершин $V_i \subset V \setminus (X_0 \cup ... \cup X_{i-1})$, а Painter, в свою очередь, должен выбрать независимое подмножество $X_i \subset V_i$, вершины V_i, которые будут раскрашены в цвет i. После того, как сыграно i раундов, все вершины в $X_1 \cup ... \cup X_i$ являются раскрашенными. Если вершина v принадлежит ровно l множествам $V_{j_1}, \ldots, V_{j_l}, 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_l \leqslant i$, то будем говорить, что у v имеется l *допустимых* цветов после i раундов. Игра заканчивается в следующих случаях:

- если после некоторого количества раундов найдется нераскрашенная вершина с r допустимыми цветами, то выигрывает Lister;

- если после некоторого количества раундов все вершины являются раскрашенными, то выигрывает Painter.

[40] A.B. Kupavskii, D.A. Shabanov, "Colourings of uniform hypergraphs with large girth and applications", *Combinatorics, Probability and Computing*, **27**:2 (2018), 245–273.

[41] U. Schauz, "Mr. Paint and Mrs. Correct", *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**:1 (2009), Research Paper №R77.

[42] U. Schauz, "A paintability version of the combinatorial nullstellensatz, and list colorings of k-partite k-uniform hypergraphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, **17** (2010), Research Paper №R176.

[43] X. Zhu, "On-line list colouring of graphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**:1 (2009), Research Paper №R127.

Гиперграф $H = (V, E)$ называется онлайн предписанно r-раскрашиваемым, если у игрока Painter существует выигрышная стратегия в $Game_1(H, r)$-игре. Минимальное такое r, что H является онлайн предписанно r-раскрашиваемым, называется *онлайн предписанным хроматическим числом* и обозначается как $\chi_{ol}(H)$. Несложно заметить, что имеет место следующая связь

$$\chi(H) \leqslant \chi_l(H) \leqslant \chi_{ol}(H).$$

В параграфе **2.2** приводится история развития и известные результаты задачи о раскрасках полных многодольных графов и гиперграфов.

В параграфе **2.3** формулируется основной результат второй главы диссертации – теорема, устанавливающая асимптотику для онлайн предписанного хроматического числа полного k-однородного r-дольного гиперграфа $H(m, r, k)$.

Теорема 3. *Для фиксированного* $2 \leqslant k \leqslant r$ *выполнено:*

$$\chi_{ol}(H(m, r, k)) = (1 + o(1)) \log_{\frac{r}{r-k+1}}(m) \text{ при } m \to \infty. \tag{1}$$

Подобное асимптотическое равенство сохраняется для любых функций $r = r(m)$, $k = k(m)$, *т.к.* $\ln r = o(\ln m)$.

В параграфе **2.4** рассматривается связь между онлайн предписанными раскрасками многодольных гиперграфов и экстремальными задачами о раскрасках гиперграфов. Пункт **2.4.1** раскрывает историю связи задачи предписанных раскрасок полных многодольных графов и классической проблемы B - свойства. В пункте **2.4.2** рассматривается онлайн аналог задачи о свойстве B и формулируется лемма, играющая важнейшую роль в оценке онлайн предписанного хроматического числа.

Лемма 1. *Пусть* $n, m, r \geqslant 2, r \geqslant k \geqslant 2$ *целые числа.*

1. *Если* $rm < c_{ol}(n, r, r - k + 1)$, *то* $\chi_{ol}(H(m, r, k)) \leqslant n$.
2. *Если* $m \geqslant c_{ol}(n, r, r - k + 1)$, *то* $\chi_{ol}(H(m, r, k)) > n$.

$c_{ol}(n, r, s)$ — это такое минимальное N, что Lister имеет выигрышную стратегию в игре $Game_3(N, n, r, s)$. Игра определяется следующими параметрами:

- n — мощность ребер;
- N — число ребер;
- r — итоговое число цветов;

- s — количество цветов, которое должно быть предписано каждой вершине.

Игроков двое — Lister и Painter. Значения параметров известны игрокам до начала игры. В каждом раунде Lister выбирает одну из вершин гиперграфа и говорит, в каких ребрах она содержится. Он не может добавлять вершины в ребра, которые уже содержат n вершин. Painter должен приписать заявленной вершине s цветов из множества $[r] = 1, \dots, r$. Игра заканчивается, когда все вершины были выбраны, т.е. все N ребер содержат ровно n вершин. Painter выигрывает, если получившееся s-покрытие является покрытием r независимыми множествами для построенного n-однородного гиперграфа. В противном случае выигрывает *Lister*.
В пункте **2.4.3** формулируются оценки для величины $c_{ol}(n, r, s)$. Новая нижняя оценка:

Лемма 2. *Для всех $n \geqslant 2$, $r > s \geqslant 1$,*

$$c_{ol}(n, r, s) \geqslant \frac{r^{n-1}}{s^n}. \tag{2}$$

Так же новым результатом является следующая лемма об оценке сверху для величины $c_{ol}(n, r, s)$ в случае $s = r - 1$ (онлайн полноцветные раскраски).

Лемма 3. *Пусть $n > r$. Тогда*

$$p_{ol}(n, r) = c_{ol}(n, r, r-1) \leqslant 3r(r-1)^2 n \left(\frac{r}{r-1}\right)^{n+1}. \tag{3}$$

В параграфе **2.5** даются доказательства всех представленных ранее результатов.

Третья глава диссертационной работы посвящена задаче об ассимптотическом поведении сильного хроматического числа в случайных гиперграфах.

В параграфе **3.1** вводятся основные определения и рассматриваемая модель. Основным объектом изучения третьей главы является случайный k-однородный гиперграф в биномиальной модели $H(n, k, p)$, в которой каждое k-подмножество некоторого множества из n вершин включается в $H(n, k, p)$ в качестве ребра независимо от других с вероятностью $p \in (0, 1)$.

В параграфе **3.2** рассматривается история данной задачи.

В параграфе **3.3** формулируется новый результат о нижней оценке пороговой вероятности для сильной r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ при $k = 4$. Раскраска множества вершин гиперграфа называется *сильной*, если любые вершины $u \neq v$, лежащие в одном ребре, имеют различные цвета. Если существует сильная раскраска гиперграфа H в r цветов, то H является *r-сильно раскрашиваемым. Сильным хроматическим числом* гиперграфа H, $\chi_{str}(H)$, называется такое минимальное r, что H является r-сильно раскрашиваемым.

Теорема 4. *Существует такое r_0, что для любого $r > r_0$ и любого $c > 0$, удовлетворяющего неравенству*

$$c < \frac{r \ln r}{6} - \frac{13}{36} \ln r - \frac{1}{6} - r^{-1/9}, \tag{4}$$

выполнено

$$\Pr\left(\chi_{str}\left(H\left(n, 4, cn/\binom{n}{4}\right)\right) \leqslant r\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

В параграфе **3.4** происходит доказательство теоремы 4, основным методом доказательства является метод второго момента, при этом формулируется вспомогательная лемма. В параграфе **3.5** вспомогательная лемма доказывается, громоздкие вычисления вынесены в параграф **3.6**.

Заключение

Перспективы дальнейших исследований очевидны. Было бы интересно дополнительно улучшить полученные оценки числа ребер в n-однородном гиперграфе с большим хроматическим числом и большим обхватом. Требуют тщательного изучения величины $c_{ol}(n, r, s)$ из параграфа 2.3, было бы интересно получить содержательные верхние оценки для них. Кроме того, в диссертации получена нижняя оценка точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у случайного 4-однородного гиперграфа, в то время как усиление верхней оценки остается открытой проблемой.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Дмитрию Александровичу Шабанову за постановку задач и неоценимую помощь в работе.

Список работ автора по теме диссертации

[A1] А. Э. Хузиева, Д. А. Шабанов, "Об однородных гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом", *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 112–133.

[A2] А. Э. Хузиева, Д. А. Шабанов, "Количественные оценки характеристик в гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом", *Математические заметки*, **98**:6 (2015), 948–951.

[A3] Alina Khuzieva, Dmitry Shabanov, Polina Svyatokum, "On-line and list on-line colorings of graphs and hypergraphs", *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **7**:4 (2017), 39–57.

[A4] А.Э. Хузиева, "О сильных раскрасках 4-однородных случайных гиперграфов", *Труды МФТИ*, **11**:2 (2019), 91–107.