Шалайко Тарас Олександрович. Назва дисертаційної роботи: "Стохастичний аналіз змішаних моделей"

Київський нацiональний унiверситет iменi Т. Г. Шевченка

На правах рукопису

Шалайко Тарас Олександрович

УДК 519.21

Стохастичний аналiз змiшаних моделей

01.01.05 — теорiя ймовiрностей i математична статистика

Дисертацiя на здобуття наукового ступеня

кандидата фiзико-математичних наук

Науковий керiвник

Шевченко Георгiй Михайлович,

доктор фiзико-математичних наук, доцент

Київ — 2015

2

ЗМIСТ

0.1. Позначення та стандартнi домовленостi . . . . . . . . . . . . 5

Вступ 7

Роздiл 1. Огляд лiтератури 18

1.1. Огляд лiтератури за Роздiлом “Нижня межа точностi наближення деяких функцiоналiв вiд дробового броунiвського руху функцiоналами вiд приростiв” . . . . . . . . . . . . . . . . 18

1.2. Огляд лiтератури за Роздiлом “Представлення випадкових

величин iнтегралами по дробовому броунiвському руху” . . 19

1.3. Огляд лiтератури за Роздiлом “Побудова локальних версiй

для деяких мультидробових процесiв” . . . . . . . . . . . . . 21

1.4. Огляд лiтератури за Роздiлом “Стохастичний аналiз змiшаних рiвнянь” . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

Роздiл 2. Попереднi та допомiжнi вiдомостi 26

2.1. Дробовий броунiвський рух . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

2.1.1. Малi вiдхилення суми квадратiв приростiв дробового

броунiвського руху . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

2.1.2. Iнтегрування по дробовому броунiвському руху . . . 29

2.1.3. Локальна невизначенiсть . . . . . . . . . . . . . . . . 32

2.2. Числення Маллявена . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

2.2.1. Iзонормальнi гауссiвськi процеси та похiдна Маллявена 33

2.2.2. Розклад Iто-Вiнера . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

2.2.3. Числення Маллявена для змiшаних рiвнянь . . . . . 38

2.3. Елементи теорiї шершавих траєкторiй (rough path) . . . . . 39

2.4. Iншi допомiжнi твердження . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

3

Роздiл 3. Нижня межа точностi наближення деяких функцiоналiв вiд дробового броунiвського руху функцiоналами вiд приростiв 45

3.1. Наближення випадкових величин функцiоналами вiд приростiв 45

3.1.1. Формулювання та обговорення результату . . . . . . 46

3.1.2. Доведення основного результату . . . . . . . . . . . . 46

3.2. Наближення дробової площi Левi . . . . . . . . . . . . . . . . 53

3.2.1. Постановка задачi та основний результат . . . . . . . 53

3.2.2. Представлення умовного математичного сподiвання та

формула для похибки наближення . . . . . . . . . . . 56

3.2.3. Доведення основного результату . . . . . . . . . . . . 59

3.2.4. Лiстинг програми для обчислення e(n)n

4H−1

. . . . . 63

Висновки до роздiлу 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65

Роздiл 4. Представлення випадкових величин iнтегралами по

дробовому броунiвському руху 66

4.1. Узагальнений iнтеграл Лебега-Стiлтьєса по дробовому броунiвському руху . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66

4.2. Обговорення та доведення основного результату . . . . . . . 68

4.3. Доведення допомiжних тверджень про узагальнений iнтеграл

Лебега-Стiлтьєса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

Висновки до роздiлу 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78

Роздiл 5. Побудова локальних версiй для деяких мультидробових процесiв 79

5.1. Обговорення та доведення результату . . . . . . . . . . . . . 80

Висновки до роздiлу 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89

Роздiл 6. Стохастичний аналiз змiшаних рiвнянь 91

6.1. Iснування щiльностi для змiшаних стохастичних диференцiальних рiвнянь . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91

4

6.1.1. Iснування щiльностi за спрощеної умови Хермандера 92

6.1.2. Iснування щiльностi за сильної умови Хермандера . . 95

6.1.3. Допомiжнi леми . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 98

6.2. Теорiя шершавих траєкторiй застосовна до змiшаних рiвнянь 109

6.2.1. Вiд рiвнянь iз шершавими траєкторiями до змiшаних

рiвнянь . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110

6.2.2. Вiд змiшаних рiвнянь до рiвнянь iз шершавими траєкторiями . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

6.2.3. Гранична теорема для змiшаних рiвнянь . . . . . . . 116

6.2.4. Чисельнi методи для змiшаних рiвнянь . . . . . . . . 121

6.3. Змiшанi рiвняння iз затримкою . . . . . . . . . . . . . . . . . 122

6.3.1. Гранична теорема для змiшаних рiвнянь . . . . . . . 123

6.3.2. Рiвняння iз зникаючою затримкою . . . . . . . . . . . 133

6.3.3. Ейлеровi наближення . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

6.3.4. Гранична теорема для рiвнянь Iто . . . . . . . . . . . 137

Висновки до роздiлу 6 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141

Висновок 143

Список використаних джерел 145

ВИСНОВОК

Дисертацйнуроботуприсвяченовивченнюмоделейздробовимброунвськимрухоммультидробовимброунвськимрухомтавнервськимпроцесом

Уроботпобудованопроцесзлокальноюверсєю∞нанескнченност

таувсхскнченнихточкахДлятакогопроцесудоведенострогу

локалзовнсть

Длявипадковихвеличинзневиродженимпершимвнервськимхаосом

встановленонижнюмежуточностнаближенняфункцоналамивдприроствдробовогоброунвськогорухунантервалахрвномрногорозбиття

ДоведенощооптимальнимусередньоквадратичномусенсметодомнаближеннядробовоїплощЛевєформулатрапецйавдповднашвидксть

збжностмаєпорядок

−депозначаєзагальнуклькстьточокрвномрногорозбиттявикористанихдляпобудовинаближення

ВстановленонтегральнепредставленнявипадковихвеличинщоєкнцевимиточкамиузгодженихпроцесвзлогарифмчногельдеровимитраєкторямУцьомупредставленннтегралрозумєтьсявузагальненомусенс

ЛебегаСтлтьєса

УроботвивчаютьсятакожзмшанстохастичндиференцальнрвнянняВстановленоналежнстьрозв’язкулокальномусоболвськомупростору





Доведеноснуваннятагладкстьщльнострозподлурозв’язквтаких

рвняньзаумовтипуумовиХермандераДлярозв’язквзмшанихрвнянь

доведеноаналоглемиНоррса

Встановленозв’язокмжрозв’язкамизмшанихрвняньтавдповднимирвняннямизшершавимитраєкторямиВикористовуючитакийзв’язокдоведенаосновнаграничнатеоремапрозбжнстьрозв’язкврвняньз



“згладженим”дробовимброунвськимрухомдорозв’язкувихдногозмшаногорвнянняОтриманотакожрезультатищодозбжностсхемиЕйлера

Увипадкузмшанихрвняньззатримкоюмиотрималиграничнутеоремунаступногоплануякщокоефцєнтитапочатковданзмшанихрвнянь

ззатримкоюзбгаютьсятозбгаютьсявдповднрозв’язкиНаслдком

такогорезультатуєнаприкладзбжнстьсхемиЕйлерадорозв’язкувихдногозмшаногорвнянняПридостатньом’якихумовахнакоефцєнти

довелищопослдовнстьрозв’язкврвняньззатримкоющопрямуєдо

нулязбгаєтьсядорозв’язкурвняннябеззатримкирвномрнозаймоврнстюВстановленотакожграничнутеоремудлярвняньтозвипадковимикоефцєнтами