На правах рукописи

БЫЧКОВ Алексей Игоревич

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	**Бутузов Валентин Федорович** доктор физико–математических наук, профессор кафедры математики физического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
Официальные оппоненты:	**Нестеров Андрей Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор Московского городского педагогического университета
	Денисов Игорь Васильевич доктор физико-математических наук, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н.Толстого
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Защита состоится 28 июня 2017 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу:

119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 2. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.43».

Автореферат разослан «___» __________ 20___ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43
доктор физико-математических наук,
профессор Захаров Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

В настоящей работе исследуется ряд начально-краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений параболического типа с кратными корнями вырожденного уравнения.

Актуальность темы. Нелинейные сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения выступают в качестве математических моделей при моделировании процессов в химической кинетике, экологии, физике полупроводников, космической электродинамике, нейрофизиологии, задачах тепло и массопереноса и в других областях.

Любая математическая модель является приближенной, не адекватной полностью тому процессу, который она описывает. Конечно, при составлении математической модели стремятся к тому, чтобы она отражала все наиболее существенные стороны процесса. Однако, с другой стороны, математическая модель должна быть достаточно простой для исследования, должна давать возможность извлечь из нее доступными средствами необходимую информацию о процессе. Поэтому какие-то факторы, влияние которых на процесс представляется малым, неизбежно приходится не учитывать, и они оказываются не представленными в математической модели процесса.

Естественно поставить вопрос о роли этих неучтенных факторов: будет ли их влияние на ход процесса несущественным, или, напротив, учет этих факторов, хотя они и кажутся нам незначительными, может существенно изменить ту информацию о процессе, которую мы получаем из математической модели. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно составить более сложную (расширенную) модель, учитывающую те малые факторы, которые в первоначальной (упрощенной) модели не были представлены, и затем исследовать вопрос о близости решений, полученных из упрощенной и расширенной модели.

Учет отмеченных малых фактов приводит, как правило, к тому, что в расширенной модели по сравнению с первоначальной появляются дополнительные члены с малыми множителями, которые и характеризуют малость этих факторов. Указанные малые множители называют малыми параметрами. Если математическая модель представляет собой дифференциальное уравнение, то вопрос о влиянии малых параметров на исследуемый процесс сводится к изучению зависимости решений дифференциальных уравнений от малых параметров. Члены уравнения, содержащие малые параметры, называются возмущением, исходное уравнение, не содержащее этих членов, - невозмущенным, а расширенное уравнение - возмущенным уравнением или уравнением с возмущением.

Задача, решение которой нельзя равномерно приблизить решением соответствующей задачи без возмущения, называется сингулярно возмущенной.

К такому классу задач относятся дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр при старшей производной. Систематическое развитие теории сингулярных возмущений началось с классических работ А.Н. Тихонова [1]–[3]. Наиболее известными методами теории являются метод пограничных функций [4]–[9], метод Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ) [10]–[12], метод сращивания (согласования) асимптотических разложений [13]–[15], метод исследования релаксационных процессов [16], метод регуляризации сингулярных возмущений [17], [18].

Метод пограничных функций для нелинейных уравнений был разработан А.Б. Васильевой и получил дальнейшее развитие в работах ее учеников и других авторов (см., например, [7], [19]-[27]). Он позволяет строить и обосновывать равномерные асимптотические разложения решений с пограничными и внутренними слоями в ряды по степеням малого параметра. Коэффициенты этих рядов зависят как от исходных, так и от растянутых (погранслойных) переменных. Для доказательства существования и обоснования асимптотики таких решений Н.Н. Нефедов предложил асимптотический метод дифференциальных неравенств, основанный на теоремах сравнения для эллиптических и параболических задач и использующий предварительно построенную формальную асимптотику [28].

Представляемая диссертация посвящена исследованию вопросов существования и асимптотики *классических* решений нового класса сингулярно возмущенных задач – дифференциальных уравнений параболического типа в случае (ранее не исследованном), когда вырожденное уравнение имеет кратный корень.

Цель работы. Основные цели работы могут быть кратко сформулированы следующим образом:

1. Исследовать некоторые новые сингулярно возмущенные задачи параболического типа:

   – начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного параболического уравнения с двукратным корнем вырожденного уравнения в прямоугольной области,

   – начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного параболического уравнения с двукратным корнем вырожденного уравнения в цилиндре, основанием которого является произвольная ограниченная двумерная область с достаточно гладкой границей,

   – начально-краевую задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения с трехкратным корнем вырожденного уравнения в прямоугольной области,

   – начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного параболического уравнения с трехкратным корнем вырожденного уравнения в цилиндре, основанием которого является произвольная ограниченная двумерная область с достаточно гладкой границей.

2. Определить условия, при которых в рассматриваемых задачах существуют решения погранслойного типа.

3. Разработать новый алгоритм построения асимптотических разложений решений для рассматриваемых задач, поскольку известный алгоритм в случае простого корня вырожденного уравнения становится неприменимым.

4. Доказать существование решений, обладающих построенной асимптотикой.

Основные результаты.

1. Получены условия, при которых в рассматриваемых задачах существуют решения погранслойного типа.

2. Разработан новый алгоритм построения асимптотических разложений решений для рассматриваемых задач.

3. Доказаны теоремы существования решений, обладающих построенной асимптотикой, для каждой из рассмотренных задач.

Методы исследования. В диссертационной работе применяется существенно модифицированный метод пограничных функций для нелинейных уравнений, предложенный А.Б. Васильевой (см., например, [5]-[7], [29]- [31]). Метод А.Б. Васильевой позволяет строить и обосновывать равномерные асимптотические разложения решений с пограничными и внутренними слоями в ряды по степеням малого параметра. Для доказательства существования решений с пограничными слоями применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств, предложенный Н.Н. Нефедовым (см. [28]), который основан на теоремах сравнения для эллиптических и параболических задач, использующий предварительно построенную формальную асимптотику .

Научная новизна. Настоящая работа посвящена развитию метода пограничных функций на некоторые (ранее не изученные) классы сингулярно возмущенных задач. Рассмотренные в диссертации сингулярно возмущенные параболические начально-краевые задачи относятся к тому случаю, когда соответствующее вырожденное уравнение, получающееся из исходного уравнения, если положить малый параметр равным нулю, имеет двукратный или трехкратный корень. Это обстоятельство приводит к существенным отличиям в асимптотике погранслойного классического решения задачи от случая простого корня вырожденного уравнения. В ходе исследования задач с кратными корнями вырожденного уравнения оказывается, что классический алгоритм А.Б. Васильевой ([4], [7]) построения погранслойной части асимптотики в случае простого корня вырожденного уравнения становится непригодным и требует принципиальной модификации. Основное содержание диссертации составляет разработка алгоритма построения асимптотических разложений решений.

В отличие от ранее изученных задач пограничные функции характеризуются различным поведением в трех зонах пограничного слоя, а погранслойная временная переменная имеет различные масштабы в разных зонах. Достоинство предложенного алгоритма состоит в том, что он дает возможность построить пограничные функции не раздельно по зонам пограничного слоя (как это делается в известном методе сращивания асимптотических разложений [15]), а единые пограничные функции, пригодные во всех зонах пограничного слоя.

Для каждой задачи доказана теорема существования решения с построенной асимптотикой. Результаты по обоснованию получены путем развития метода дифференциальных неравенств на задачи исследуемого типа.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит в основном теоретический характер. Развит метод пограничных функций в применении к новому классу сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, что позволит в дальнейшем рассматривать более широкие классы задач.

Предложен новый алгоритм построения пограничных функций, позволяющий строить единые пограничные функции, описывающие поведение решения во всех зонах пограничного слоя, что удобно для применения алгоритма в прикладных задачах.

Рассматриваемые в диссертации типы уравнений описывают в частности физические, химические и биологические процессы. Например, в химической кинетике рассматривают системы уравнений данного типа, описывающие химические реакции с учетом диффузии, в которых компоненты искомой вектор-функций являются концентрациями реагирующих веществ, а малый параметр ε - величиной, обратной константам скоростей быстрых реакций.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Личный вклад автора. Основные результаты, включенные в диссертационную работу и отраженные в совместных публикациях с научным руководителем, получены лично автором. Постановка задач и анализ полученных результатов проводились под руководством профессора В.Ф. Бутузова. Основное содержание и результаты достаточно полно изложены в 5 печатных работах.

Апробация работы. Содержание различных разделов диссертационной работы представлялось в виде докладов на научных конференциях «Ломоносовские чтения 2011» (МГУ, Москва, 2011), «Тихоновские чтения» (МГУ, Москва, 2015), «Международная конференция. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики» (МГУ, Москва, 2016). Работа докладывалась и обсуждалась на научных семинарах Ярославского Государственного Университета им. П.Г. Демидова (руководители семинара профессора С.А. Кащенко, С.Д. Глызин), факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова (руководитель академик РАН, профессор Е.И. Моисеев), РУДН (руководитель профессор А.Л. Скубачевский), кафедры математики физического факультета МГУ (руководители семинара профессора А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 5 научных работ, из которых 3 статьи в рецензируемых журналах по перечню ВАК. Список публикаций приведен в конце диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации составляет 100 страниц. Список литературы в диссертации включает 49 наименований.

Основное содержание работы

Во **Введении** освещен круг вопросов, охваченных диссертацией, охарактеризованы актуальность и новизна работы и изложено ее краткое содержание.

В **Главе 1** приведен обзор научных работ, близких к теме диссертации — посвященных исследованию решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с кратными корнями вырожденного уравнения.

Глава 2 посвящена исследованию начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения с двукратным корнем вырожденного уравнения в прямоугольной области.

Рассматривается задача:

$$\varepsilon^2(u_t - u_{xx}) = f(u, x, t, \varepsilon), \quad (x,t) \in D = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T), \quad (1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u_x(0, t, \varepsilon) = u_x(1, t, \varepsilon) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где ε - малый положительный параметр.

Исследуется вопрос о существовании и асимптотике при малых ε классического решения задачи (1) - (3) в прямоугольной области D, т.е. функции $u(x,t,\varepsilon)) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, которая в D удовлетворяет уравнению (1), а также начальному условию (2) и граничным условиям (3).

Сформулируем условия, при которых рассматривается задача.

Условие A_1.

Функция $f(u, x, t, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, t, \varepsilon) = -h(x,t)(u - \varphi(x,t))^2 + \varepsilon f_1(u, x, t, \varepsilon),$$

причем $h(x,t) > 0$, $(x,t) \in \bar{D}$. Очевидно, что при условии A_1 вырожденное уравнение $f(u, x, t, 0) = 0$ имеет двукратный корень $u = \varphi(x,t)$.

Условие A_2.

Функции $h(x,t)$, $\varphi(x,t)$, $f_1(u,x,t,\varepsilon)$, $u^0(x)$ являются достаточно гладкими (для построения асимптотики n-го порядка $n+2$ раза непрерывно дифференцируемыми), и для начальной функции $u^0(x)$ выполнены условия согласования начального и граничных условий

$$u_x^0(0) = u_x^0(1) = 0.$$

Для построения асимптотики произвольного порядка потребуем, чтобы эти функции были бесконечно дифференцируемыми.

Условие A_3.

$$\bar{f}_1(x,t) := f_1(\varphi(x,t), x, t, 0) > 0, \quad (x,t) \in \bar{D}.$$

Условие A_4.

$$\Pi^0(x) := u^0(x) - \varphi(x,0) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

В п. 2.2 при условиях $A_1 - A_4$ построено формальное асимптотическое разложение решения задачи (1) - (3). Формальная асимптотика n-го порядка имеет вид:

$$U_n(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}(\bar{u}_i(x,t) + \Pi_i(x,\tau)) + \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{2n-2} \varepsilon^{i/4}(Q_i(\xi,t) + \widetilde{Q}_i(\widetilde{\xi},t)) +$$

$$+\varepsilon^{1/4} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4}(P_i(\xi,\tau) + \widetilde{P}_i(\widetilde{\xi},\tau)).$$

Здесь $\bar{u}_i(x,t)$ - регулярные члены асимптотики; $\Pi_i(x,\tau,\varepsilon)$ - пограничные функции, описывающие погранслойное поведение решения в окрестности начального момента времени $t=0$, они зависят от x и погранслойной переменной $\tau = t/\varepsilon^2$ и имеют различный характер убывания с ростом погранслойной переменной в трех зонах пограничного слоя: в первой зоне пограничного слоя, где $0 \le \tau \le \varepsilon^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1/2$, функции $\Pi_i(x,\tau)$ убывают степенным образом, как $O\left(\frac{1}{1+\tau}\right)$, во второй (переходной) зоне, где $\varepsilon^{-\gamma} \le \tau \le \varepsilon^{-1/2}$, происходит изменение характера убывания и изменяется масштаб погранслойной переменной, и, наконец, в третьей зоне, где $\tau \ge \varepsilon^{-1/2}$ возникает новая погранслойная переменная $\widetilde{\tau} = \sqrt{\varepsilon}\tau$, и функции Π_i убывают с ростом $\widetilde{\tau}$ экспоненциально: $\Pi_i = O\left(\sqrt{\varepsilon}\exp(-\varkappa\widetilde{\tau})\right)$; таким образом, пограничный слой в окрестности начального момента времени оказывается трехзонным, что обусловлено кратностью корня вырожденного уравнения и приводит к существенному изменению алгоритма построения функций $\Pi_i(x,\tau)$ по сравнению со случаем простого корня вырожденного уравнения; $Q_i(\xi,t)$ и $\widetilde{Q}_i(\widetilde{\xi},t)$ - пограничные функции, описывающие поведение решения в окрестностях граничных точек $x=0$ и $x=1$, они зависят от погранслойных переменных $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$ и $\widetilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$ и являются экспоненциально убывающими при стремлении к бесконечности погранслойных переменных ξ и $\widetilde{\xi}$; $P_i(\xi,\tau)$ и $\widetilde{P}_i(\widetilde{\xi},\tau)$ - угловые пограничные функции, служащие для описания погранслойного поведения решения в окрестностях угловых точек $(0,0)$ и $(1,0)$ области D.

Известный алгоритм А.Б. Васильевой ([4], [7]) построения погранслойной части асимптотики в случае простого корня вырожденного уравнения становится непригодным и требует принципиальной модификации. В первую очередь это относится к П-функциям, описывающим погранслойное поведение решения в окрестности начального момента времени.

Погранслойный ряд $\Pi(x,\tau,\varepsilon)$ строится в виде

$$\Pi(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\Pi_i(x,\tau). \tag{4}$$

Уравнения для членов этого ряда извлекаются из равенства

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \Pi f + \varepsilon^2 \Pi_{xx}, \tag{5}$$

где Πf имеет вид (вводим еще одну погранслойную переменную $\tilde{\tau} = \sqrt{\varepsilon}\tau = \frac{t}{\varepsilon^{3/2}}$):

$$\Pi f = \left[f(\bar{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi(x,\tau,\varepsilon), x, t, \varepsilon) - f(\bar{u}(x,t,\varepsilon), x, t, \varepsilon)\right]_{t=\varepsilon^{3/2}\tilde{\tau}} =$$

$$= \left[-h(x,t)\left[(\bar{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi(x,\tau,\varepsilon) - \varphi(x,t))^2 - (\bar{u}(x,t,\varepsilon) - \varphi(x,t))^2\right] + \varepsilon\Pi f_1\right]_{t=\varepsilon^{3/2}\tilde{\tau}}, \tag{6}$$

а начальные условия для функций Π_i следуют из равенства

$$\Pi(x,0,\varepsilon) = u^0(x) - \bar{u}(x,0,\varepsilon).$$

При стандартном приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в разложениях левой и правой частей равенства (5) для главного члена Π_0 ряда (4) получается задача (x входит как параметр):

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = -h(x,0)\Pi_0^2, \ \tau > 0, \tag{7}$$

$$\Pi_0(x,0) = \Pi^0(x). \tag{8}$$

Для того, чтобы решение этой задачи стремилось к нулю при $\tau \longrightarrow \infty$, необходимо потребовать неотрицательности начальной функции $\Pi^0(x)$. Это обеспечено условием A_4. Однако, при этом $\Pi_0(x,\tau) \longrightarrow 0$ при $\tau \longrightarrow \infty$ как $O\left(\frac{1}{1+\tau}\right)$. Это следует из легко получаемого явного выражения для $\Pi_0(x,\tau)$:

$$\Pi_0(x,\tau) = \frac{\Pi^0}{1 + h(x,0)\Pi^0\tau}. \tag{9}$$

Однако, как показывает исследование задачи (1) - (3), ее решение ведет себя в пограничном слое более сложным образом, чем это описывается функцией (9). Степенное убывание абсолютных величин пограничных функций имеет место только в первой зоне пограничного слоя, потом следует вторая (переходная) зона, в которой происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания пограничных функций, а затем (в третьей зоне) пограничные функции убывают экспоненциально, как $\exp(-\varkappa\tilde{\tau})$, где $\tilde{\tau} = \frac{t}{\varepsilon^{3/2}}$. Чтобы построить пограничные функции, описывающие поведение решения во всех зонах пограничного слоя, требуется изменить стандартные уравнения для Π_0 и следующих членов погранслойного ряда. Уравнение для Π_0 нужно взять в виде :

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = -h(x,0)(\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0)\Pi_0), \tag{10}$$

т.е. нужно в правую часть уравнения (7) добавить член $-2\sqrt{\varepsilon}h(x,0)\bar{u}_1(x,0)\Pi_0$, содержащийся в разложении правой части (6).

Решение уравнения (10) с начальным условием (8) находится в явном виде:

$$\Pi_0(x,\tau) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0)\Pi^0(x)\exp(-2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0)h(x,0)\tau)}{2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0) + \Pi^0(x)(1-\exp(-2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0)h(x,0)\tau))}. \tag{11}$$

Анализ выражения (11) подтверждает сказанное выше о пограничных функциях в данной задаче: в первой зоне пограничного слоя, т.е. при $0 \le t \le \varepsilon^{2-\gamma}$, где $0 \le \gamma < \frac{1}{2}$, функция $\Pi_0(x,\tau)$ убывает с ростом погранслойной переменной τ степенным образом: $\Pi_0 = O\left(\frac{1}{1+\tau}\right)$; затем следует вторая (переходная) зона $\varepsilon^{2-\gamma} \le t \le \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, в которой происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания функции Π_0; и, наконец, в третьей зоне, т.е при $t \ge \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, погранслойная переменная имеет вид $\tilde{\tau} = \frac{t}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}$, а функция Π_0 убывает с ростом $\tilde{\tau}$ экспоненциально. Достоинство функции $\Pi_0(x,\tau)$, которую мы определили как решение задачи (10) с начальным условием (6), состоит в том, что она описывает поведение решения во всех зонах пограничного слоя.

Уравнения для функций $\Pi_i(x,\tau)$ получаются не стандартным способом (т.е. путем приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{\frac{i}{2}}$ в разложениях левой и правой частей равенства), а с определенными модификациями стандартного способа. Прежде всего в правую часть уравнения для $\Pi_i(x,\tau)$, левая часть которого равна $\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau}$, наряду с членом $-2h(x,0)\Pi_0(x,\tau)\Pi_i$, включается слагаемое $-2\sqrt{\varepsilon}h(x,0)\bar{u}_1(x,0)\Pi_i$, соответствующее слагаемому

$-2\sqrt{\varepsilon}h(x,0)\bar{u}_1(x,0)\Pi_0$, добавленному в уравнение (7) для Π_0. Поэтому $\Pi_i(x,\tau)$, $i=1,2,\ldots$ определяется как решение задачи:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} = -\alpha(x,\tau,\varepsilon)\Pi_i + \pi_i(x,\tau,\varepsilon), \quad \tau > 0,$$

$$\Pi_i(x,0) = -\bar{u}_i(x,0),$$

где

$$\alpha(x,\tau,\varepsilon) = 2h(x,0)(\Pi_0(x,\tau) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0)),$$

а π_i выражаются рекуррентно через функции $\Pi_k(x,\tau)$ с номерами $k<i$. При этом функции π_i формируются иначе, нежели при стандартном подходе. В состав $\pi_i(x,\tau,\varepsilon)$ нужно включить те коэффициенты при $\varepsilon^{i/2}$ в разложении Πf, оценка которых по модулю содержит не менее двух сомножителей $|\Pi_k||\Pi_m|$, $k+m \le i$, $k<i$, $m<i$, а также умноженные на $\sqrt{\varepsilon}$ коэффициенты при $\varepsilon^{(i+1)/2}$, оценка которых содержит только один сомножитель $|\Pi_k|$, $k<i$, и после этого заменить $\widetilde{\tau}$ на $\sqrt{\varepsilon}\tau$. Кроме того, при $i \ge 3$ в состав π_i нужно включить слагаемое $\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial^2 \Pi_{i-3}}{\partial x^2}$, представлящее собой умноженный на $\sqrt{\varepsilon}$ коэффициент при $\varepsilon^{\frac{i+1}{2}}$ в разложении слагаемого $\varepsilon^2 \Pi_{xx}$. Например, функция $\pi_1(x,\tau,\varepsilon)$ при таком подходе имеет вид

$$\pi_1(x,\tau,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}(-2h(x,0)\bar{u}_2(x,0)\Pi_0(x,\tau,\varepsilon) + \Pi_0 f_1),$$

поскольку выражение в круглых скобках имеет порядок $O(\Pi_0)$, в то время как при стандартном подходе $\pi_1(x,\tau,\varepsilon)=0$.

Указанная процедура формирования функций $\pi_i(x,\tau,\varepsilon)$ позволяет получить единообразную оценку пограничных функций $\Pi_i(x,\tau)$ и их производных $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2}(x,\tau)$, $i=0,1,2,\ldots$:

$$|\Pi_i(x,\tau)| \le c\Pi_\varkappa(x,\tau), \quad \left|\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2}(x,\tau)\right| \le c\Pi_\varkappa(x,\tau), \quad 0 \le x \le 1, \quad \tau \ge 0,$$

где функция $\Pi_\varkappa(x,\tau)$ имеет вид

$$\Pi_\varkappa(x,\tau) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0)\Pi^0(x)\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)}{2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0) + \Pi^0(x)(1-\exp(-2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,0)h(x,0)\tau))},$$

$\varkappa$ - положительное число, меньшее $2\bar{u}_1(x,0)h(x,0)$.

Претерпевает также существенное изменение стандартный алгоритм построения угловых погранслойных P-функций [29]-[31].

В п.2.3 доказана теорема существования классического решения с построенным асимптотическим разложением.

Теорема 1. Если выполнены условия $A_1 - A_4$, то для достаточно малых ε задача (1)-(3) имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$, для которого функция $U_n(x,t,\varepsilon)$ является асимптотическим приближением с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, т.е. для любого целого $n \geq 0$ справедливо равенство

$$u(x,t,\varepsilon) = U_n(x,t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad (x,t) \in \bar{D}.$$

Доказательство теоремы проведено с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Данная задача была рассмотрена в работе [32].

В **Главе 3** рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения с двукратным корнем вырожденного уравнения в цилиндре, основанием которого является произвольная ограниченная двумерная область g с достаточно гладкой границей ∂g:

$$\varepsilon^2 (u_t - \Delta u) = f(u,x,y,t,\varepsilon), \quad (x,y,t) \in D = g \times (0 < t \leq T), \qquad (12)$$

$$u\,|_{t=0} = u^0(x,y), \quad (x,y) \in \bar{g}, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,y,t) \in \{\partial g \times (0 \leq t \leq T)\}, \qquad (14)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, $f(u,x,y,t,\varepsilon)$ - достаточно гладкая функция, g - область на плоскости (x,y), ограниченная простой гладкой кривой ∂g, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внутренней нормали к поверхности $\{\partial g \times (0 \leq t \leq T)\}$, ε - малый положительный параметр.

Задача рассматривается при условиях:

Условие B_1. Функция $f(u,x,y,t,\varepsilon)$ имеет вид

$$f(u,x,y,t,\varepsilon) = -h(x,y,t)(u - \varphi(x,y,t))^2 + \varepsilon f_1(u,x,y,t,\varepsilon),$$

причем

$$h(x,y,t) > 0, \quad (x,y,t) \in \bar{D}.$$

Условие B_2. Функции $h(x,y,t)$, $\varphi(x,y,t)$, $f_1(u,x,y,t,\varepsilon)$, $u^0(x,y)$ являются достаточно гладкими (для построения асимптотики n-го порядка $n+2$ раза непрерывно дифференцируемыми), и для начальной функции $u^0(x,y)$ выполнено условие согласования начального и граничного условий

$$\left.\frac{\partial u^0}{\partial n}\right|_{\partial g} = 0.$$

Для построения асимптотики произвольного порядка потребуем, чтобы эти функции были бесконечно дифференцируемыми.

Условие B_3.

$$\bar{f}_1(x,y,t) := f_1(\varphi(x,y,t),x,t,0) > 0, \quad (x,y,t) \in \bar{D}.$$

Условие B_4.

$$\Pi^0(x,y) := u^0(x,y) - \varphi(x,y,0) > 0, \quad (x,y) \in \bar{g}.$$

Для классического решения задачи (12) - (14) построена асимптотика $U_n(x,y,t,\varepsilon)$ произвольного порядка точности, в процессе ее построения предложен модифицированный алгоритм построения пограничных функций, а затем проведено обоснование асимптотического приближения решения методом дифференциальных неравенств.

Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Если выполнены условия B_1 - B_4, то для достаточно малых ε задача (12)-(14) имеет решение $u(x,y,t,\varepsilon)$, для которого функция $U_n(x,y,t,\varepsilon)$ является асимптотическим приближением с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, т.е. для любого целого $n \geq 0$ справедливо равенство

$$u(x,y,t,\varepsilon) = U_n(x,y,t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad (x,y,t) \in \bar{D}.$$

Как и в случае начально-краевой задачи в прямоугольной области, функция $U_n(x,y,t,\varepsilon)$ представляет собой частичную сумму асимптотического ряда и состоит из регулярной части и функций пограничного слоя:

$$U_n(x,y,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}(\bar{u}_i(x,y,t) + \Pi_i(x,y,\tau)) + \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{2n-2} \varepsilon^{i/4} Q_i(\rho,l,t) +$$

$$+\varepsilon^{1/4}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}P_i(\rho,l,\tau),$$

здесь $\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$ и $\rho = \frac{r}{\varepsilon}$ - погранслойные переменные, (r,l) - локальные координаты точки области $\bar{g}$ в окрестности границы ∂g, r - расстояние от точки до ∂g вдоль нормали к ∂g, l - переменная, определяющая положение точки на границе ∂g, при $n = 0$ функции Q_i с отрицательными номерами считаются равными нулю.

Данная задача была рассмотрена в работе [33].

В **Главе 4** исследуется начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения с трехкратным корнем вырожденного уравнения в прямоугольной области:

$$\varepsilon^2\left(u_t - u_{xx}\right) = f(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in D = (0 < x < 1)\times(0 < t \le T), \qquad (15)$$

$$u(x,0,\varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (16)$$

$$u_x(0,t,\varepsilon) = u_x(1,t,\varepsilon) = 0, \quad 0 \le t \le T, \qquad (17)$$

где ε - малый положительный параметр.

Задача рассмотрена при условиях:

Условие C_1.

Функция $f(u,x,t,\varepsilon)$ имеет вид

$$f(u,x,t,\varepsilon) = -h(x,t)(u-\varphi(x,t))^3 + \varepsilon f_1(u,x,t,\varepsilon),$$

причем $h(x,t) > 0$, $(x,t)\in\bar{D}$.

Условие C_2.

Функции $h(x,t)$, $\varphi(x,t)$, $f_1(u,x,t,\varepsilon)$, $u^0(x)$ являются достаточно гладкими (для построения асимптотики n-го порядка $n+2$ раза непрерывно дифференцируемыми), и для начальной функции $u^0(x)$ выполнены условия согласования начального и граничных условий

$$u^0_x(0) = u^0_x(1) = 0.$$

Для построения асимптотики произвольного порядка потребуем, чтобы эти функции были бесконечно дифференцируемыми.

Условие C_3.

$$\bar{f}_1(x,t) := \bar{f}_1(\varphi(x,t),x,t,0) \neq 0, \quad (x,t) \in \bar{D}.$$

Условие C_4.

$$\Pi^0(x) := u^0(x) - \varphi(x,0) \begin{cases} > 0, & \text{если } \bar{f}_1(x,t) > 0, \\ < 0, & \text{если } \bar{f}_1(x,t) < 0. \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Для классического решения задачи (15) - (17) построена асимптотика $U_n(x,t,\varepsilon)$ произвольного порядка точности, в ходе ее построения предложен модифицированный алгоритм построения пограничных функций , а затем доказана теорема существования решения с построенной асимптотикой.

Основной результат:

Теорема 3. Если выполнены условия C_1 - C_4, то для достаточно малых ε задача (15)-(17) имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$, для которого функция $U_n(x,y,t,\varepsilon)$ является асимптотическим приближением с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{3}}\right)$, т.е. для любого целого $n \geq 0$ справедливо равенство

$$u(x,t,\varepsilon) = U_n(x,t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{3}}\right), \quad (x,t) \in \bar{D}$$

Функция $U_n(x,y,t,\varepsilon)$ представляет собой частичную сумму асимптотического ряда и состоит из регулярной части и функций пограничного слоя:

$$U_n(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/3}(\bar{u}_i(x,t) + \Pi_i(x,\tau)) + \varepsilon^{2/3} \sum_{i=0}^{n-2} \varepsilon^{i/3}\left(Q_i(\xi,t) + \widetilde{Q}_i(\widetilde{\xi},t)\right) +$$

$$+\varepsilon^{1/3} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^{i/3}\left(P_i(\xi,\tau) + \widetilde{P}_i(\widetilde{\xi},\tau)\right),$$

здесь $\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$, $\xi = \frac{x}{\varepsilon^{2/3}}$, $\widetilde{\xi} = \frac{1-x}{\varepsilon^{2/3}}$ - погранслойные переменные, а при $n = 0$ и $n = 1$ функции с отрицательными номерами считаются равными нулю.

При доказательстве **теоремы 3** использовался асимптотический метод дифференциальных неравенств.

Данная задача была рассмотрена в работе [34].

В **Главе 5** исследуется начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения с трехкратным корнем вырожденного уравнения в цилиндре, основанием которого является произвольная ограниченная двумерная область g с достаточно гладкой границей ∂g:

$$\varepsilon^2 (u_t - \Delta u) = f(u, x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in D = g \times (0 < t \leq T), \tag{18}$$

$$u \mid_{t=0} = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{g}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x, y, t) \in \{\partial g \times (0 \leq t \leq T)\}, \tag{20}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, $f(u, x, y, t, \varepsilon)$ - достаточно гладкая функция, g - область на плоскости (x, y), ограниченная простой гладкой кривой ∂g, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внутренней нормали к поверхности $\{\partial g \times (0 \leq t \leq T)\}$, ε - малый положительный параметр.

Задача рассматривается при условиях:

Условие D_1.

Функция $f(u, x, y, t, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = -h(x, y, t)(u - \varphi(x, y, t))^3 + \varepsilon f_1(u, x, y, t, \varepsilon),$$

причем $h(x, y, t) > 0$, $(x, y, t) \in \bar{D}$.

Условие D_2.

Функции $h(x, y, t)$, $\varphi(x, y, t)$, $f_1(u, x, y, t, \varepsilon)$, $u^0(x, y)$ являются достаточно гладкими (для построения асимптотики n-го порядка $n+2$ раза непрерывно дифференцируемыми), и для начальной функции $u^0(x, y)$ выполнено условие согласования начального и граничных условий

$$\left.\frac{\partial u^0}{\partial n}\right|_{\partial g} = 0.$$

Условие D_3.

$$\bar{f}_1(x, y, t) := \bar{f}_1(\varphi(x, y, t), x, y, t, 0) \neq 0, \quad (x, y, t) \in \bar{D}.$$

Условие D_4.

$$\Pi^0(x, y) := u^0(x, y) - \varphi(x, y, 0) \begin{cases} > 0, & \text{если } \bar{f}_1(x, y, t) > 0, \\ < 0, & \text{если } \bar{f}_1(x, y, t) < 0. \end{cases}, \quad (x, y) \in \bar{g}.$$

Для классического решения задачи (18) - (20) построена асимптотика $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ произвольного порядка точности, в ходе ее построения предложен модифицированный алгоритм построения пограничных функций , а затем доказана теорема существования решения с построенной асимптотикой.

Основной результат:

Теорема 4. Если выполнены условия D_1 - D_4, то для достаточно малых ε задача (18)-(20) имеет решение $u(x, y, t, \varepsilon)$, для которого функция $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ является асимптотическим приближением с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{3}}\right)$, т.е. для любого целого $n \geq 0$ справедливо равенство

$$u(x, y, t, \varepsilon) = U_n(x, y, t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{3}}\right), \quad (x, t) \in \bar{D}.$$

Функция $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ представляет собой частичную сумму асимптотического ряда и состоит из регулярной части и функций пограничного слоя:

$$U_n(x, y, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/3}(\bar{u}_i(x, y, t) + \Pi_i(x, y, \tau)) + \varepsilon^{2/3} \sum_{i=0}^{n-2} \varepsilon^{i/3} Q_i(\rho, l, t) +$$

$$+ \varepsilon^{1/3} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^{i/3} P_i(\rho, l, \tau),$$

здесь τ, ρ, r, l - те же переменные, что и в асимптотике решения задачи (12) - (14), а при $n = 0$ и $n = 1$ функции с отрицательными номерами считаются равными нулю.

При доказательстве **теоремы 4** использовался асимптотический метод дифференциальных неравенств.

Данная задача была рассмотрена в работе [33].

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получены условия, при которых в сингулярно возмущенных задачах параболического типа с кратными корнями вырожденного уравнения существуют решения погранслойного типа.

2. Разработан алгоритм построения асимптотических разложений решений для рассматриваемых задач.

   Асимптотическое разложение решения ведется по дробным степеням малого параметра, а не по целым степеням, как в случае простого корня. Эти дробные степени и также масштабы погранслойных переменных зависят от кратности корня.

   Известный алгоритм А.Б. Васильевой ([4], [7]) построения погранслойной части асимптотики в случае простого корня вырожденного уравнения становится непригодным и требует принципиальной модификации. В первую очередь это относится к П-функциям, описывающим погранслойное поведение решения в окрестности начального момента времени. Претерпевает также существенное изменение стандартный алгоритм построения угловых погранслойных P-функций [29]–[31]. Как П-функции, так и P-функции, характеризуются различным поведением в трех зонах пограничного слоя, а погранслойная временная переменная имеет разные масштабы в разных зонах. В отличие от случая простого корня вырожденного уравнения эталонной (оценочной) функцией для П-функций является теперь не $\exp(-\varkappa\tau)$, где τ - погранслойная переменная, а функция $\Pi_{\varkappa}(\tau)$, дающая правильную оценку характера убывания П-функций в разных зонах. Достоинство предложенного алгоритма построения П- и P-функций состоит в том, что он дает возможность построить пограничные функции не раздельно по зонам пограничного слоя (как это делается в известном методе сращивания асимптотических разложений [15]), а единые пограничные функции, пригодные во всех зонах пограничного слоя.

3. Доказаны теоремы существования решений, обладающих построенной асимптотикой, для каждой из рассмотренных задач.

   Обоснование построенной асимптотики проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, применение которого в сингулярно возмущенных задачах с кратными корнями вырожденного уравнения имеет определенные особенности. В отличие от случая простого корня вырожденного уравнения принципиальную роль в вопросах существования погранслойного решения и построения его асимптотики играют малые члены порядка ε, входящие в правую часть уравнения (условия A_1, B_1, C_1 и D_1).

Работа носит в основном теоретический характер. Развит метод пограничных функций в применении к новому классу сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, что позволит в дальнейшем рассматривать более широкие классы задач.

Дальнейшим этапом исследования сингулярно возмущенных задач указанного типа является рассмотрение следующих задач:

– сингулярно возмущенные параболические задачи с краевыми условиями Дирихле,

– системы сингулярно возмущенных уравнений в частных производных,

– исследование вопросов устойчивости решений и области их притяжения.

Задачи, описанные в диссертации, были рассмотрены в работах [32]–[36].

Автор выражает благодарность коллективу кафедрыматематики Физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за предоставленные ему благоприятные условия для работы.

Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю профессору Валентину Федоровичу Бутузову за постановку задачи и внимательное руководство процессом ее исследования.

Список литературы

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. // Матем. сб., 1948, Т. 22(64), N 2, с. 193-204.

2. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. // Матем. сб., 1950, Т. 27(69), N 1, с. 147-156.

3. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры. //Матем. сб., 1952, Т. 31(73), N 3, с. 575-586.

4. Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. // УМН, 1963, Т. 18, *N* 3, с. 15–86.

5. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. // УМН, 1957, Т. 12, *N* 5, с. 3–122.

6. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника – Вишика. // УМН, 1970, Т. 25, *N* 4, с. 123–156.

7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.

8. Fife P.C. Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters. // Arch. Rat. Mech. and Anal., 1973, V. 52, *N* 3, P. 205–232.

9. Файф П., Гринли В. Внутренние переходные слои для эллиптических краевых задач с малым параметром. // Успехи мат. наук, 1974, Т. 29, е 4, С. 103–131.

10. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.

11. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983, С. 30–81.

12. Соколов А.А, Лоскутов Ю.М, Тернов И.М. Квантовая механика. М.: Просвещение, 1965,С. 101–110.

13. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976, С. 124–173.

14. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984, С. 291–299.

15. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

16. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.

17. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

18. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского Университета, 2011.

19. Eckhaus W. Asymptotic analysis of singular perturbations. North-Holland. Amsterdam. 1979.

20. O'Malley R.E.Jr. Singular perturbation methods for ordinary differential equations // Appl. Math. Ski. N.Y.: Springer-Verlag. 1991. V. 89.

21. Habets P. Singular perturbations of nonlinear boundary value problems // Lecture Notes. Catholic Univ. of Louvain. 1974.

22. Hoppensteadt F. Asymptotic stability in singular perturbation problems // J. Different. Equat. 1974. V. 15. P. 510–521.

23. Lagerstrom P.A., Casten G.G. Basic concepts underlying singular perturbation techniques // SIAM Rev. 1972. V. 14. P. 63–120.

24. Wasow W.R. Asimptotic expansions for ordinary differential equations. N.Y. Wiley Nescience. 1965.

25. Chang K.W., Howes F.A. Nonlinear singular perturbation phenomena. Theory and Applications. N.Y.: Springer-Verlag. 1984.

26. Levinson N. A boundary value problems for a singularly perturbed differential equations. J. Math. Anal. and Appl. 1963. V. 6. N 3. P. 473–482.

27. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Kalachev L.V. The boundary function method for singular perturbation problems. SIAM studies in applied mathematics. V.14. 1995.

28. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями. //Дифференц. уравнения. 1995, Т. 31, N 7, с. 1132–1149.

29. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения уравнения $\mu^2\Delta u - k^2(x,y)u = f(x,y)$ в прямоугольной области // Дифференц. ур-ния, 1973, Т. 9, N 9, с. 1654-1660.

30. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными // Дифференц. ур-ния, 1979, Т. 15, N 10, с. 1848-1862.

31. Денисов И.В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ, 2008, Т. 48, N 1, с. 62-79.

Публикации автора по теме диссертации

32. Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного корня вырожденного уравнения. // Дифференц. ур-ния, 2013, Т. 49, N 10, с. 1295–1307.

33. Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случаях двукратного и трехкратного корня вырожденного уравнения. // Чебышевский сб., 2015, Т. 16, N 4, с. 41–76.

34. Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае трехкратного корня вырожденного уравнения. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ, 2016, Т. 56, N 4, с. 605–624.

35. Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения с кратными корнями вырожденного уравнения. // Ломоносовские чтения – 2011. Секция Физики. Сборник тезисов докладов. М.: Физический факультет МГУ, 2011, с. 141–142.

36. Бычков А.И. Сингулярно возмущенные параболические задачи с кратными корнями вырожденного уравнения. // Международная конференция. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. Секция "Асимптотические методы". Тезисы докладов. Москва, 2016, с. 203.

Отпечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать17.04.2017 г.
Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 1,0. Тираж 70 экз. Заказ 094.
Издательство ООО "МАКС Пресс"
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8 495 939-3890/93. Тел./Факс 8 495 939-3891.