

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

**Бердник Янина Александровна**

**Полуаналитические методы в задаче обтекания тонких и телесных  
профилей потоком вязкой несжимаемой жидкости**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет»

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Сумбатян Межлум Альбертович**

**Официальные оппоненты:** **Сухинов Александр Иванович,**  
член-корреспондент РАН, доктор  
физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Математика  
и Информатика», ФГБОУ ВО «Донской  
государственный технический университет»

**Камалутдинов Айрат Марсович,**  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО  
«Казанский национальный исследовательский  
технический университет им. А. Н. Туполева-  
КАИ»

Защита состоится «23» июня 2022 года в 17:30 на заседании диссертационного совета ЮФУ01.05 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю. А. Жданова Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21 Ж и на сайте по ссылке: <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1298951/>

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Учёный секретарь  
диссертационного совета  
ЮФУ01.05, д.ф.-м.н.



Говорухин Василий Николаевич

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Технологический прогресс в конце XX века показал реальность конструирования микролетательных аппаратов, работающих в режиме малых и средних чисел Рейнольдса, до значений порядка 20000. Этим объясняется возрастающий интерес с обнаружением новых эффектов в аэродинамике именно в этом диапазоне чисел Рейнольдса.

Задачи обтекания тонких и телесных профилей потоками вязкой жидкости составляют основу современной аэродинамики летательных аппаратов. Данная проблема в случае идеальной (невязкой) жидкости во многих случаях может быть исследована аналитическими методами. В случае потока вязкой жидкости в настоящее время к данной задаче, как правило, применяются прямые численные методы, которые обладают известными ограничениями по сравнению с аналитическими методами. В связи с этим представляется актуальным разработка полуаналитических методов к рассматриваемому классу задач, т.к. такой подход позволит производить эффективное исследование качественных свойств обтекания.

Основные результаты, входящие в диссертационную работу, получены в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ № 9.5794.2017/БЧ.

### **Объект и предмет исследования.**

Объектами исследования являются бесконечно тонкая плоская пластинка и симметричный телесный аэродинамический профиль. Предметом выступает исследование обтекания бесконечно тонкой плоской пластинки и симметричного телесного аэродинамического профиля однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости и определение гидродинамических величин потока.

**Цели и задачи диссертации.** Целью данной работы является разработка нового полуаналитического итерационного метода для эффективного аэродинамического расчёта тонких и телесных симметричных профилей в однородном потоке вязкой жидкости. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Разработать эффективный итерационный метод, который позволяет уточнять результаты с реализацией каждой итерации и который лежит в основе полуаналитического метода.
2. Реализовать первую итерацию для задачи об обтекании тонкой пластинки однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Вывести для первой итерации граничное интегральное уравнение (ГИУ) на пластинке относительно функции вязкого трения.
3. Написать программу, позволяющую определять силу трения, действующую на тонкую пластинку, распределение силы трения вдоль пластинки и распределение продольной компоненты скорости потока на основе исходных данных о параметрах пластинки и гидродинамических величинах потока вязкой жидкости.
4. Вывести граничные интегральные уравнения для второй и последующих итераций и реализовать для них новый численный алгоритм с целью определения уточнённых значений силы трения и компонент вектора скорости потока.

5. Вывести граничное интегральное уравнение относительно силы трения на граничном контуре профиля в задаче обтекания телесного профиля однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости. На основе используемого итерационного метода и значений, полученных в процессе решения задачи об обтекании пластинки, реализовать численный алгоритм и определить коэффициенты сопротивления для симметричных профилей НАСА.

**Методология и методы исследования.** В работе использованы различные методы численного и аналитического исследования задач механики жидкости. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами используется интегральное преобразование Фурье, а для решения полученного впоследствии граничного интегрального уравнения применяются последовательно метод коллокации и метод Гаусса для решения системы линейных алгебраических уравнений. Для решения неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами используется комбинация асимптотического анализа членов этого уравнения и метода пристрелки. Исследованы свойства ядра граничного интегрального уравнения, полученного в задаче обтекания тонкой пластинки. Используются результаты теории ветвящихся аналитических функций для приведения интегралов в выражениях ядра граничного интегрального уравнения и функций скоростей к такой форме, где они берутся в явном виде через функции Макдональда. Решение задачи об обтекании тонкой пластинки также построено с помощью метода конечных объёмов в среде ANSYS с целью анализа достоверности полученных результатов. Для численной реализации задач предложенным итерационным методом разработана программа на ЭВМ на алгоритмическом языке Фортран.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Методы и теории, используемые сторонними исследователями для решения задач об обтекании тонкой пластинки и симметричного телесного профиля потоком вязкой несжимаемой жидкости.
2. Представление итерационного метода последовательных приближений. Реализация первой итерации и представление граничного интегрального уравнения. Результаты первой итерации.
3. Представление второй и последующих итераций, их аналитическая и численная реализации. Сравнение итоговых результатов со значениями, полученными с помощью метода конечных объёмов в среде ANSYS CFX, а также результатами других исследователей.
4. Метод интегрального уравнения в обтекании тонкого телесного профиля однородным потоком вязкой жидкости. Сравнение полученных результатов с известными результатами, полученными другими методами.

#### **Научная новизна работы заключается в следующем:**

1. Реализован оригинальный итерационный метод для задач обтекания тонкой пластинки и телесного симметричного профиля однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости.
2. Выполнена разработка программы, позволяющей получать данные о силе трения, действующей на тонкую пластинку, скоростных характеристиках потока и коэффициенте сопротивления крыловых профилей.

3. Предложена оригинальная теория расчёта характеристик потока, пластинки и телесного профиля для любых чисел Рейнольдса.

4. Впервые аналитически получено граничное интегральное уравнение (ГИУ), позволяющее рассчитывать коэффициент сопротивления симметричных телесных аэродинамических профилей.

**Теоретическая и практическая значимость.** Предоставленные в диссертационной работе результаты имеют как теоретический, так и практический характер. Разработка полуаналитических методов в задачах обтекания профилей вязкими потоками жидкости и газа позволяет существенно сократить время вычислений на компьютере, что помогает проводить качественный анализ основных аэродинамических параметров задачи в реальном масштабе времени. Выведенные в процессе исследования дифференциальные уравнения и ГИУ, итерационный метод последовательных приближений и реализованная на алгоритмическом языке Фортран программа могут быть использованы при определении гидродинамических характеристик пластинки и симметричных телесных профилей. Также полученное для телесного профиля ГИУ может являться основой для дальнейшего исследования обтекания несимметричных крыловых профилей.

**Достоверность** представленных результатов достигается использованием строгого математического аппарата, основанного на точных уравнениях гидродинамики, а также сравнением с результатами численных расчётов, реализованных в среде ANSYS методом конечных объёмов. Были проведены масштабные численные эксперименты, как для верификации полученных результатов, так и для оценки эффективности разработанного программного обеспечения. Кроме того, результаты, полученные предложенным итерационным методом, имеют хорошее совпадение с результатами других исследователей.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты данной работы были представлены на следующих конференциях и научных семинарах:

1. международная школа-конференция молодых учёных, посвящённая 70-летию основания Национальной Академии Наук Армении, «Механика 2013». (Цахкадзор, Армения, 2013);

2. 17-ая Международная молодежная научно-практическая конференция. (Новочеркасск, Россия, 2018);

3. международная конференция «READ & EWADE 2018». (Брно, Чехия, 2018);

4. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. (Уфа, Россия, 2019);

5. научный семинар кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет. (Ростов-на-Дону, Россия, 2019).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации подтверждены свидетельством государственной регистрации программы для ЭВМ [5], а также изложены в 1 электронном и 6 печатных изданиях [1-8], из которых 3 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ [1,2,4], 2 в журналах, входящих в международные наукометрические базы Scopus и Web of Science [1,3] и 3 работы в сборниках трудов и материалах конференций [6,7,8]. 4 работы опубликованы в журналах, рекомендованных Советом [1,2,3,4].

## Содержание работы

**Во введении** формулируется актуальность темы данной работы, определяются задачи и цели исследования, описываются основные результаты и предоставляется информация об их изложении в различных источниках, а также кратко излагается содержание диссертации.

**В первой главе** в разделе **1.1** представлен обзор развития теории пограничного слоя и её реализация в задаче обтекания тонкой пластинки и некоторых других задач.

В 1904 г. Л. Прандтль ввёл понятие пограничного слоя в статье под названием «О движении жидкости при очень малом трении». Л. Прандтль исходил из чёткого осознания того, что наиболее важным вопросом, касающимся течения жидкости малой вязкости, является поведение жидкости у твердой граничной стенки. Также он исходил из того, что течение жидкости является почти невозмущённым вдали от стенки и возмущённым в относительной близости от стенки. Таким образом, изменение скорости от величины, соответствующей почти равномерному движению, до нулевой скорости, требуемой по условию отсутствия скольжения у стенки, происходит в тонком слое, примыкающем к стенке. Чем меньше вязкость, тем тоньше переходный слой. Но резко возрастающая скорость, несмотря на небольшую вязкость, производит заметные эффекты, сравнимые по величине с теми, которые обусловлены силой инерции, если толщина переходного слоя пропорциональна квадратному корню из кинематической вязкости. Концепция Прандтля, таким образом, и заключается в разграничении потока вдоль гладкого тела на две области: область пограничного слоя, для которой уравнения Навье-Стокса упрощаются и приводятся к уравнениям пограничного слоя и область вне этого слоя, где течение жидкости подчиняется главным образом теории Эйлера потенциального течения жидкости.

В то время как Л. Прандтль не представил детального описания данного подхода на конкретных задачах, его студент Р. Блазиус достаточно подробно описал новую теорию, используя её для решения задачи о пограничном слое вдоль плоской пластины<sup>1</sup>. Это сразу же наглядно продемонстрировало огромные возможности концепции Л. Прандтля. Решение впоследствии было также протестировано при различных конфигурациях потока как в военно-морской технике, так и в аэродинамике, при этом было отмечено хорошее сходжение результатов при больших числах Рейнольдса.

В 1925 г. И. Бюргерс привёл также экспериментальные наблюдения распределения скорости в пограничном слое в задаче обтекания плоской пластины, выявляя одновременное присутствие ламинарной и турбулентной областей. У. Толмину в 1929 г. после ряда неудачных попыток впервые удалось теоретически вычислить критическое число Рейнольдса для плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении. Однако, экспериментально это число было подтверждено лишь через десять лет.

Параграф **1.2** посвящён выводу уравнений Прандтля и формулы Блазиуса для силы трения.

В параграфе **1.3** дан обзор применяющихся асимптотических методов и метода разделения потока для исследования задач об обтекании пластинки. Теория пограничного слоя Л. Прандтля даёт первое приближение к решению уравнений Навье-Стокса вблизи твердой стенки в случае малой вязкости или больших чисел Рейнольдса. При изменении типа аппроксимации можно ожидать закономерно возникающие трудности для других чисел Рейнольдса и немалой вязкости. Сам Л. Прандтль в 1935 г. предложил возможность

---

<sup>1</sup> Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М: Наука, 1974. – 713 с.

улучшения решения для задачи об обтекании плоской пластины путём введения поправок на толщину вытеснения.

В 1920-х годах для задачи об обтекании тонкой пластинки было получено решение Харрисона-Файлона<sup>2</sup> методом асимптотических разложений для предельно малых чисел Рейнольдса. В 1950-х годах П. Лагерстрём проводил систематические исследования вместе с его коллегами для установления приближения Прандтля в качестве основы асимптотики решения уравнений Навье-Стокса, что привело к тому, что сейчас известно как метод согласования асимптотических разложений. Данный метод предназначен для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Его основная идея заключается в построении двух асимптотических разложений, внешнего и внутреннего. Одни и те же уравнения Навье-Стокса по-разному упрощаются вдали от границы и около неё. Внешнее и внутреннее решения затем сращиваются на границе пограничного слоя.

Однако вязкое решение не является единственным для заданных граничных условий, и вообще трудно выбрать соответствующее решение, являющееся решением уравнений Навье-Стокса. Для обтекания некоторого полубесконечного или хорошо обтекаемого тела можно считать, что разделения не существует и принять вращательное движение как соответствующее невязкое решение. Для потока вдоль плохо обтекаемого тела с отрывом значение вязкого решения неизвестно. Первым приближением является при этом классическая задача обтекания тела без учета взаимодействия. Второе приближение учитывает вытесняющее воздействие и все вторичные эффекты в пограничном слое. При этом внешний предел внутреннего разложения равен внутреннему пределу внешнего разложения. В качестве типичного примера можно привести решение второго приближения по формуле Ван Дайка для обтекания параболического цилиндра. Было обнаружено, что напряжение сдвига в пристеночной зоне уменьшается вблизи критической точки из-за влияния смещения и кривизны. Расчёты также были проведены в приближениях более высокого порядка для обтекания полубесконечной плоской пластины. Вопреки ожиданиям Л. Прандтля в 1935 г., влияние смещения второго порядка исчезает и остаются неопределенные константы, зависящие от течения вблизи передней кромки, где аппроксимация пограничного слоя не удаётся. Для конечной плоской пластины У. Н. Куо в 1953 г. получил ненулевую поправку на смещение второго порядка. Впоследствии, однако, была обнаружена несколько более важная поправка К. Стюартсоном в 1969 г. и А. Месситером в 1970 г., полученная из трёхповерхностной структуры потока у задней кромки пластины.

Параграф 1.4 посвящен использованию численных методов. Численные эксперименты позволяют определить гидродинамические величины с точностью, ограниченной только мощностью используемых вычислительной программы или пакета. В наше время существуют три основных популярных подхода к решению задач гидродинамики – метод конечных разностей, метод конечных объемов, а также метод конечных элементов. На каждом шаге обычно решается система нелинейных алгебраических уравнений, что требует существенных временных затрат. Кроме того, расчетная скорость сильно чувствительна к значениям входных параметров.

Численные методы используются при решении задачи об обтекании тонкой пластины потоком вязкой жидкости с 1930-х гг. В 1938 г. Л. Ховарт впервые использовал численный

---

<sup>2</sup> Lamb H. Hydrodynamics. – Cambridge University Press, 1932. – 362 pp.

метод Рунге-Кутты, провёл расчёты «вручную» и сравнил своё решение с решением Блазиуса, решая уравнения пограничного слоя для задач об обтекании тел различной формы, в частности, и для задачи об обтекании тонкой пластинки. К. Стюартсон (1969), А. Месситер (1970) и А. Вельдман (1976) используют трёхслойную модель и численные методы для решения задачи вблизи задней кромки. Вблизи передней кромки поток исследовали А. И. Ван де Ворен и Э. Дийкстра (1970) и А. Есигава (1970). Их результаты, основанные на использовании полных уравнений Навье-Стокса, показывают увеличение поверхностного трения в сравнении с результатами Р. Блазиуса.

В данный момент для решения задач активно используются пакеты конечно-элементного анализа. Современные компьютерные программы обеспечивают простые решения для многих систем уравнений механики жидкости, даже для изменяющихся граничных условий.

Несмотря на то, что поиск решения задачи об обтекании пластины ведётся с начала двадцатого века она еще не была полностью решена для всех чисел Рейнольдса. Необходимо отметить, что при немалой популярности данной задачи для неё не существует современных аналитических исследований в рамках уравнений Навье-Стокса. Также она имеет практическое применение в конструкции крылового профиля летательных средств. По этим причинам исследование данной задачи продолжается с использованием вычислительных методов для решения уравнения Навье-Стокса (X. F. Feng, Z. F. Tian, S. Q. Dai, 2006; L. Quartapelle, 2012), уравнения Блазиуса (A. Wazwaz, 2007; E. H. Bani-Hani, M. Assad, 2018) или уравнений пограничного слоя Прандтля (R. A. Makanga, 2017; H. Nguyen, 2016). В настоящее время решение Блазиуса рассматривается как классическое решение задачи в случае больших чисел Рейнольдса.

В параграфе 1.5 приведен обзор исследований, посвященных обтеканию аэродинамических профилей при больших и малых числах Рейнольдса.

Долгое время история авиастроения развивалась в направлении больших летательных аппаратов и больших чисел Рейнольдса, исследователями практически полностью игнорировался полёт при малых числах Рейнольдса  $Re < 20000$ . Впервые экспериментальные образцы микролетательных аппаратов и эксперименты с ними появились в конце 1960-х гг.

В последнее время проявляется значительный интерес к аэродинамике крыловых профилей при малых и очень малых числах Рейнольдса. Этот интерес обусловлен различными приложениями начиная от ветряных мельниц до специальных коммерческих самолетов и беспилотных летательных аппаратов, конструирование которых стало возможным благодаря недавним достижениям в области микроэлектромеханических систем. Очень маленькие самолеты, так называемые микро-воздушные транспортные средства (МАН), могут функционировать в различных пространствах и температурных условиях, включая туннели, пустыня и джунгли.

Режим полёта микро летательных средств, таких как микровертолёт или микросамолёт, связан с необходимостью решения большого количества проблем, связанных с моделированием и последующим конструированием. Вследствие этого на данный момент представлено относительно небольшое количество работ для крыловых профилей, рассматриваемых для течений при  $Re < 10\,000$ .

Успешные технические разработки для МАН были представлены различными авторами, такими как Д. Грасмайер и М. Киннон в 2001 г., С. Моррис и М. Холден в 2000 г., а также обзорные статьи были представлены W. Shyu в 2008 и 2013 гг. и другими. Для малогабаритных МАН, массой от 10 до 20 граммов при полете на очень низких скоростях

числа Рейнольдса не превышают значения 1000. Несколько авторов, обнаружили, что многие программы аэродинамических расчётов, разработанные для нормального диапазона значений чисел Рейнольдса не очень хорошо справляются с расчётами течений при очень малых числах Рейнольдса. Р. Kunz и L. Kroo<sup>3</sup> использовали в своих работах вычислительный анализ потоков для малых чисел Рейнольдса в виде программы расчёта течения INS2D, полученной в Исследовательском центре Эймса (НАСА) на основе схемы с разностями против потока, разработанной С. Роджерсом и Д. Кваком в 1990 г.

**Во второй главе** приводится реализация первой итерации метода последовательных приближений в задаче обтекания тонкой пластинки однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости (Рис.1), которая является базовой и важнейшей для реализации последующих итераций и для решения задачи об обтекании симметричных телесных профилей.

Следует отметить, что рассматриваемая задача является сильно нелинейной, поэтому трудно рассчитывать на построение каких-то аналитических решений, кроме прямых численных подходов. В данной работе преследуется цель построения подходящего полуаналитического метода, основанного на понятных эвристических идеях. Именно, в качестве нулевого шага итераций всегда принимается решение в набегающем однородном потоке. При малых числах Рейнольдса (сильная вязкость) показывается, что уже первый итерационный шаг приводит к известному асимптотическому решению сильной вязкости, т.к. в этой области возмущения, вносимые в поток пластинкой, реально малы. Для больших чисел Рейнольдса (малая вязкость) данная эвристическая гипотеза правомерна вне пограничного слоя, сосредоточенного в малой окрестности пластинки, а вблизи пластинки существенно нарушается. Именно с этой целью строится итерационный процесс, который позволяет скорректировать внесенную на первом шаге погрешность, если число Рейнольдса велико. Как правило, решение стабильно выходит на корректное не более, чем за 10 итерационных шагов.

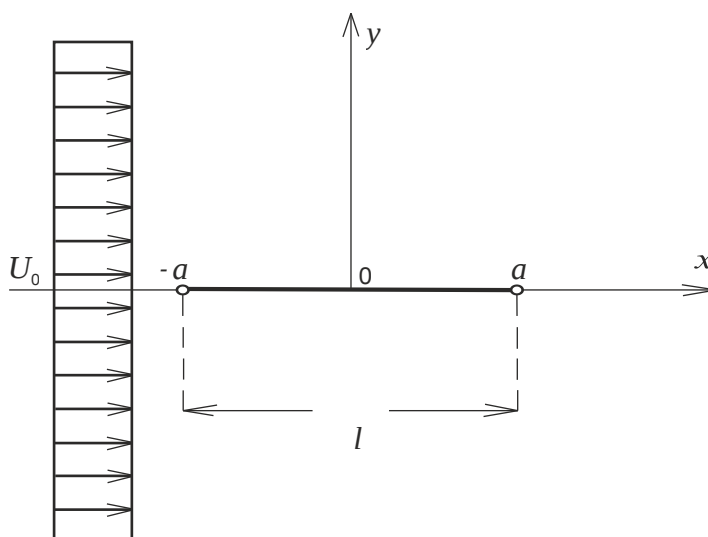


Рис. 1 – Обтекание бесконечно тонкой плоской пластинки набегающим потоком вязкой жидкости.

<sup>3</sup> Kunz P., Kroo L. Analysis and design of airfoils for use at ultra-low Reynolds numbers // Proceedings of the AIAA Fixed, Flapping and Rotating Wing Aerodynamics at Very Low Reynolds Numbers Conference. – 2000. – Vol. 195. – Pp. 35–60.

В параграфе 2.1 ставится двумерная задача об обтекании бесконечно тонкой плоской пластинки длины  $l = 2a$  безграничным однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1). Скорость набегающего на пластину потока  $U_0$  постоянна, и её значение известно. В ходе решения задачи приоритетной искомой величиной является полная сила трения, действующая на пластинку, — как наиболее интересная в физическом смысле величина, подробно изученная в литературе. Она используется для нахождения безразмерного параметра  $S_1$  на первой итерации для сравнения с безразмерным параметром Блазиуса  $S_{Blaz}$  при больших и средних значениях чисел Рейнольдса и параметром Харрисона-Файлона  $S_H$  при малых значениях чисел Рейнольдса, а также распределение продольной и поперечной компонент скорости потока.

Обтекание пластинки исследуется в декартовой системе координат  $Oxy$ . (рис. 1). Пластина на оси  $Ox$  занимает интервал  $(-a, a)$ , где  $l = 2a$ . В процессе решения задачи рассматривается только верхняя полуплоскость вследствие симметрии течения, которое полагается стационарным и описывается уравнением Навье-Стокса и уравнением неразрывности:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \Delta v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \nu \Delta v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\rho$  — плотность жидкости,  $v_x$  и  $v_y$  — соответственно продольная и поперечная компоненты вектора скорости,  $p$  — гидродинамическое давление.

Граничные условия задачи представлены в следующем виде:

1) условия прилипания жидкости на поверхности пластинки:

$$v_x = v_y = 0 \text{ при } y = 0, |x| \leq a; \quad (2)$$

2) условия симметрии и отсутствия трения вне пластинки:

$$v_y = 0, \partial v_x / \partial y \text{ при } y = 0, |x| > a; \quad (3)$$

3) условия на бесконечности:

$$\text{при } y \rightarrow +\infty, x \in (-\infty, +\infty): \quad v_y \rightarrow 0, v_x \rightarrow U_0. \quad (4)$$

Вид компонент вектора скорости представлен в виде суммы скорости основного потока и скорости возмущений, малых на его фоне, т.е.:

$$\begin{cases} v_x(x, y) = U(x, y) + v'_x(x, y) \\ v_y(x, y) = V(x, y) + v'_y(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

где  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$  — соответственно продольная и поперечная компоненты скорости набегающего потока. Количество штрихов над функцией здесь и в дальнейшем соответствует номеру итерации. Таким образом, на каждом шаге искомыми являются неизвестные функции малых возмущений на фоне известных функций основного потока.

На первом итерационном шаге рассматриваются возмущения скоростей относительно постоянной скорости набегающего на пластину потока  $U_0$ :

$$\begin{cases} v_x(x, y) = U_0 + v'_x(x, y) \\ v_y(x, y) = v'_y(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

Функция тока  $\psi = \psi(x, y)$  вводится следующими соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

и представляется на первой итерации аналогично представлению компонент скоростей на первой итерации (6):

$$\psi(x, y) = \Psi(x, y) + \psi'(x, y), \quad (8)$$

где  $\Psi(x, y)$  – функция тока, соответствующая однородному равномерному основному потоку,  $\psi'(x, y)$  – функция тока, соответствующая малым возмущениям на фоне основного потока.

При этом функции скоростей основного потока  $U(x, y), V(x, y)$  выражаются через функцию тока основного потока следующим образом:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (9)$$

Основное линеаризованное дифференциальное уравнение, вид которого одинаков для всех итераций, представлено следующим образом:

$$-U \Delta V + U \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \Delta V \frac{\partial \psi'}{\partial y} + V \Delta U + V \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y} - \Delta U \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \nu \Delta^2 \Psi - \nu \Delta^2 \psi' = 0 \quad (10)$$

В параграфе 2.2 после применения преобразования Фурье к уравнению (10), элементарных математических преобразований, использования исходных граничных условий и применения к получившемуся уравнению обратного преобразования Фурье выводится граничное интегральное уравнение (ГИУ) для первой итерации:

$$\frac{\nu}{2\pi i a \mu U_0} \int_{-a}^a \tau'(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\beta| - q(\beta)}{\beta} \cdot e^{i\beta(\xi-x)/a} d\beta = U_0, \quad |x| \leq a \quad (11)$$

где  $\tau' = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}$  – функция вязкого трения на пластинке,  $\mu$  – коэффициент динамической

вязкости,  $\beta = a\alpha$ ;  $q(\beta) = \sqrt{\beta^2 - i\beta Re / 2}$ ,  $\alpha = \beta / a$  – параметр преобразования Фурье,

$Re = \frac{2aU_0}{\nu}$  – число Рейнольдса, рассчитанное по длине пластинки.

Полная сила трения на пластине на одной стороне пластинки, полученная с помощью итерационного метода, вычисляется следующим образом:

$$W = \int_{-a}^a \tau(x) dx \quad (12)$$

«В ходе анализа свойств ядра ГИУ (11) были выявлены следующие его свойства:

1) ядро не является ни чётным, ни нечётным, то есть решение интегрального уравнения (11) не обладает никаким видом симметрии;

2) ядро имеет стандартную логарифмическую особенность при  $x \rightarrow \xi$ . Таким образом, решение на концах пластинки имеет корневую особенность: при приближении к краям пластинки касательные напряжения неограниченно возрастают...» [1]

Рис. 2 демонстрирует справедливость перечисленных выше свойств.

В параграфе 2.3 приводятся представления компонент скоростей в виде (13), (14) и ядра ГИУ (11) в виде (15) через функции Макдональда с помощью использования некоторых результатов теории ветвящихся аналитических функций:

$$\begin{aligned} v'_x(y) = \frac{1}{2\pi\rho U_0} \int_{-a}^a \tau(\xi) \left( be^{-\frac{b(\xi-x)}{2}} \left( \frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}} K_1\left(\frac{b}{2}\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - K_0\left(\frac{b}{2}\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}\right) \right) - \frac{2(\xi-x)}{(\xi-x)^2+y^2} \right) d\xi \end{aligned} \quad (13)$$

$$v'_y(y) = \frac{1}{2\pi\rho U_0} \int_{-a}^a \tau(\xi) \cdot \left( \frac{2y}{(\xi-x)^2+y^2} - \frac{e^{-\frac{b(\xi-x)}{2}} by}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}} K_1\left(\frac{b}{2}\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}\right) \right) d\xi \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi\rho U_0} \int_{-a}^a \tau(\xi) \left( be^{-\frac{b(\xi-x)}{2}} \left( \text{sign}(\xi-x) K_1\left(\frac{b}{2}|\xi-x|\right) - K_0\left(\frac{b}{2}|\xi-x|\right) \right) - \frac{2}{\xi-x} \right) d\xi = -U_0 \quad (15)$$

В 2.4 представлены численные методы, используемые для решения ГИУ (11) – метод коллокации и метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений. Также представлен второй способ, заключающийся в сведении бесконечных интегралов к полу бесконечным в ГИУ (11), а также их последующем расчёте численным методом Симпсона. Два разных метода, сводящиеся к решению СЛАУ, соответственно в форме (15.1) и (15.2), используются для контроля точности. Результаты по этим двум методам совпадают в три значащих цифры.

$$\sum_{j=1}^N \tau_j \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left( be^{-\frac{b(\xi-x)}{2}} \left( \text{sign}(\xi-x) K_1\left(\frac{b}{2}|\xi-x|\right) - K_0\left(\frac{b}{2}|\xi-x|\right) \right) - \frac{2}{\xi-x} \right) d\xi = -2U_0^2\pi\rho \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \tau'_j \int_0^{+\infty} \left( \sin\left(\frac{\beta}{a}(x_j-x_k)\right) \left( 1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\frac{a^2b^2}{\beta^2}}}}{2} + \sqrt{\frac{1+\frac{a^2b^2}{\beta^2}-1}}{2} \cos\left(\frac{\beta}{a}(x_j-x_k)\right) \right) \frac{\sin\left(\frac{\beta h}{2a}\right)}{\beta} d\beta = \right. \\ \left. = \frac{U_0^2\pi\mu}{2\nu}; j, k = 1, \dots, N \right. \end{aligned} \quad (15.2)$$

где  $x_j = -a + (j-0.5) \cdot h$ ;  $x_k = -a + (k-0.5) \cdot h$ ;  $j, k = 1, \dots, N$ ;  $N$  – количество отрезков, на которые разбивается отрезок  $[-a, a]$ ;  $h = \frac{2a}{N}$  – длина каждого отрезка.

На первой итерации гипотеза о малости возмущений на фоне основного потока не является справедливой вблизи пластины. Но поскольку на первом шаге полученное решение совпадает с решением Харрисона-Файлона для очень малых чисел Рейнольдса с погрешностью менее 1 % (Табл. 1), и картина распределения касательных напряжений (рис. 2) соответствует физическому смыслу задачи, то предложенный подход к решению данной задачи является корректным. Однако вследствие того, что построенное выше решение не

предоставляет хорошей точности для средних и больших чисел Рейнольдса при сравнении с безразмерным коэффициентом Блазиуса, необходимо реализовать построение последующих приближений.

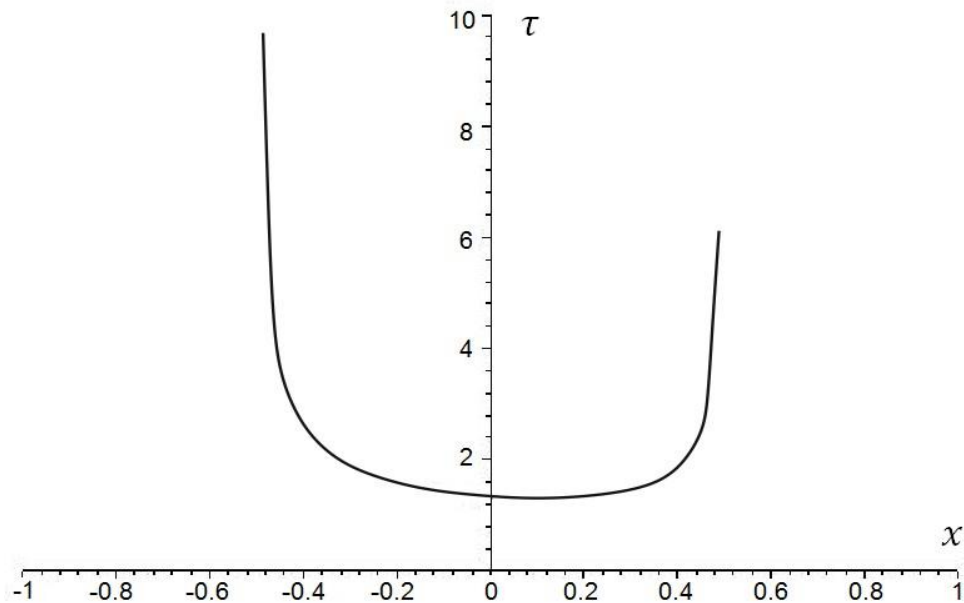


Рис. 2 – Зависимость силы трения от  $x$  для  $Re=1$ .

В третьей главе описывается реализация второй и последующих итераций метода последовательных приближений в задаче об обтекании тонкой пластинки.

На второй итерации искомые функции малых возмущений (обозначенные двумя штрихами) рассматриваются на фоне функций, найденных на первом шаге:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = U_0 + u'_x(x, y) + u''_x(x, y) = U(x, y) + u''_x(x, y) \\ v_y(x, y) = v'_y(x, y) + v''_y(x, y) = V(x, y) + v''_y(x, y) \end{cases} \quad (16)$$

При этом на второй итерации функции  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ , как видно выше в соотношениях (16), получены из первой итерации и имеют вид:  $U(x, y) = U_0 + u'_x(x, y)$ ,  $V(x, y) = v'_y(x, y)$ .

В 3.1, по аналогии с первым шагом итерации, на второй итерации выписываем линеаризованное уравнение в частных производных относительно возмущённой функции тока  $\psi''(x, y)$ , используя уравнение (10). Очевидно, (10) – уравнение в частных производных с переменными коэффициентами по  $x$  и по  $y$ , где  $U$ ,  $V$ ,  $\Psi'$  – известные из предыдущих итераций функции двух декартовых координат. Неизвестной функцией является  $\psi''(x, y)$ . Ясно, что никакого аналитического решения здесь построить невозможно. Таким образом, линеаризация при строгом подходе ничего не дает; с таким же успехом прямым численным методом можно было бы решать исходную нелинейную задачу. Целью работы является найти подходящий полуаналитический подход, который приводит к физически корректным результатам. Исходной эвристической посылкой является то, что в силу наличия погранслоя, изменение физических характеристик поперек потока (по  $y$ ) происходит намного быстрее, чем вдоль потока (по  $x$ ).

Предполагая функции  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  медленно изменяющимися по переменной  $x$ , далее «замораживаем» эти функции в полученном уравнении в частных производных, применяем к нему преобразование Фурье по переменной  $x$ . В результате получаем некоторое

неоднородное линейное ОДУ четвертого порядка по координате  $y$  с переменными коэффициентами, которое в полном виде всё ещё слишком громоздко для возможности применения каких-либо элегантных аналитических методов. Такой подход был реализован в [4] как один из возможных. Он подразумевает, что для каждого значения параметра Фурье  $\beta$  необходимо решить численным методом пристрелки уравнение по переменной  $y$ , и к построенной таким образом функции  $\tilde{\psi}''(\beta, y)$  далее применить численно обратное преобразование Фурье по переменной  $\beta$  для каждого значения координаты  $y$ . Оказывается, что на этом пути получить численно устойчивое решение возможно лишь при малых значениях числа Рейнольдса, что не представляет большого смысла из-за наличия явного решения для малых  $Re$ .

В связи с этим к уравнению (10) применяется альтернативный подход. Он основан на известном очевидном факте, что медленное изменение функций вдоль исходной переменной  $x$  соответствует малым значениям параметра  $\beta$  в образах Фурье. Таким образом, в сочетании с принципом замораживания коэффициентов в уравнении (10), при применении преобразования Фурье вдоль переменной  $x$  в каждом операторе, входящем в уравнение (10), сохраняются лишь наименьшие степени параметра Фурье  $\beta$ . При этом члены с последующими степенями данного малого параметра отбрасываются, по сравнению с нулевой или первой его степенью соответственно. В простейшем виде данный подход был использован первоначально в [3], где построено фактически лишь «вырожденное» решение, соответствующее значению  $\beta = 0$ . Следует отметить, что такое вырожденное решение дает минимальную погрешность при вычислении интегральной характеристики в виде полной силы трения на пластинке, т.к.  $W = \int_{-a}^a \tau(x, 0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x, 0) e^{i\beta x/a} dx \Big|_{\beta=0}$ .

Поставив целью построение более точного решения, чем вырожденного, применяем описанный выше подход с сохранением главных членов по  $\beta$  в каждом операторе в частных производных при применении преобразования Фурье к (10). В итоге приходим к следующему ОДУ по переменной  $y$ :

$$\begin{aligned} -\nu \tilde{\psi}^{(IV)} + V(y) \tilde{\psi}^{(III)} - \frac{i\beta}{a} U(y) \tilde{\psi}^{(II)} - U^{(II)}(y) \left( -\frac{i\beta}{a} \right) \tilde{\psi}'' - V^{(II)}(y) \tilde{\psi}^{(I)} = \\ = U(y) \tilde{V}^{(II)}(\beta, y) - V(y) \tilde{U}^{(II)}(\beta, y) + \nu \tilde{U}^{(III)}(\beta, y), \end{aligned} \quad (17)$$

с граничными условиями:

$$\tilde{\psi}''(y) \Big|_{y=0} = 0; \quad (18)$$

$$\frac{d\tilde{\psi}''(y)}{dy} \Big|_{y=0} = 0; \quad (19)$$

$$\tilde{\psi}''(y) \Big|_{y \rightarrow +\infty} \rightarrow 0; \quad (20)$$

$$\frac{d\tilde{\psi}''(y)}{dy} \Big|_{y \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad (21)$$

После того, как система (17) – (21) решена, вязкое трение на пластинке находится по формуле:

$$\frac{\tau''(x)}{\mu} \Big|_{y=0} = \frac{d^2 \psi''(y)}{dy^2} \Big|_{y=0}, \quad (22)$$

в уравнении (17) тильда обозначает преобразование Фурье,  $\tau''(x)$  – возмущенная функция вязкого трения на фоне функции  $\tau'(x)$ , построенной в первом приближении. Таким образом, на второй итерации справедливо выражение:  $\tau(x) = \tau'(x) + \tau''(x)$ :

Уравнение (17) решается при  $\nu \rightarrow 0$  асимптотически. Сначала используется гипотеза, применяемая во всех известных подходах, начиная с классической теории пограничного слоя Прандтля, что поперечной скоростью можно пренебречь на фоне основной продольной скорости:  $V \sim V^{(II)} = 0$ . Это зануляет нечётные производные  $\tilde{\psi}^{(I)}$  и  $\tilde{\psi}^{(III)}$ , что переводит уравнение (17) в класс, допускающий прямое применение асимптотического метода ВКБ:

$$\tilde{\psi}^{(IV)} + \frac{i\beta U(y)}{a\nu} \tilde{\psi}^{(II)} - \frac{i\beta U^{(II)}(y)}{a\nu} \tilde{\psi}'' = F(\beta, y), \quad (23)$$

где  $F(\beta, y)$  – правая часть уравнения (17), делённая на  $-\nu$ .

Далее, для более простого тестирования используемого асимптотического подхода, делается еще одно упрощение - коэффициент при  $\tilde{\psi}^{(II)}$  полагается малым. Это эвристическое допущение основано на том, что на пластинке, т.е. при предельно малых  $y$ ,  $U(0)=0$ , а последнее слагаемое в уравнении (23) содержит множитель  $U^{(II)}$ , значения которого при малых  $y$  очень велико, так как асимптотически при  $\nu \rightarrow 0$  оно стремится к бесконечности. Тогда уравнение (23) принимает упрощённый вид:

$$\tilde{\psi}^{(IV)} - \frac{i\beta U^{(II)}(y)}{a\nu} \tilde{\psi}'' = F(\beta, y) \quad (24)$$

В этом виде (24) уравнение попадает в класс уравнений<sup>4</sup>, при этом необходимо положить  $n = 4$ ,  $q = \frac{i\beta U^{(II)}}{a}$ ,  $\lambda = \frac{1}{\nu^{1/4}} \rightarrow \infty$ . Тогда общее решение уравнения (24) в рамках метода ВКБ представляется следующим образом:

$$\tilde{\psi}'' = \tilde{\psi}_c''(y) + \frac{A_1}{\left(-\frac{i\beta U^{(II)}(y)}{a}\right)^{3/8}} e^{-\frac{1}{\nu^{1/4}} \int_0^y \sqrt{\frac{-i\beta U^{(II)}(y)}{a}} dy} + \frac{A_3}{\left(\frac{i\beta U^{(II)}(y)}{a}\right)^{3/8}} e^{-\frac{1}{\nu^{1/4}} \int_0^y \sqrt{\frac{i\beta U^{(II)}(y)}{a}} dy} \quad (25)$$

где  $A_1, A_3$  – неизвестные постоянные. При этом  $\tilde{\psi}_c''$  – частное решение неоднородного уравнения (24).

Предполагается, что  $U^{(II)}(y) \neq 0$ . При этом всегда  $\operatorname{Re} \sqrt[4]{-\frac{i\beta U^{(II)}(y)}{a}} > 0$ ,  $\operatorname{Re} \sqrt[4]{\frac{i\beta U^{(II)}(y)}{a}} > 0$ , поэтому члены с  $A_1$  и  $A_3$  затухают при  $y \rightarrow +\infty$ .

Коэффициенты  $A_1$  и  $A_3$  определяются из условий (18) и (22).

В конечном счёте всё сводится к нахождению частного решения дифференциального уравнения четвёртого порядка (23), которое решается в приближении слабо изменяющихся

<sup>4</sup> Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1983. – 352 с.

функций по переменной  $X$ . В данном случае в параграфе 3.2 это происходит с использованием метода пристрелки на основе метода Рунге-Кутты четвёртого порядка.

Последующие итерации основаны на последовательном решении одного и того же уравнения (17). При этом на каждом  $i$ -м шаге  $U_{i+1} = U_i + \psi_i^{(l)}$ . При нахождении частного решения неоднородного уравнения  $\psi_q$  функции  $V_i$  принимаются совпадающими со значениями на первой итерации. При построении явных асимптотических представлений для общего решения однородного уравнения (23) функции  $V_i$ , как и на втором шаге итераций, на всех последующих шагах полагаются равными нулю.

Следует отметить, что построение решения на следующих итерациях происходит по той же схеме, что и при построении 2-й итерации. При этом коэффициенты, входящие в уравнение (17) на текущей итерации, напрямую находятся в процессе решения этого уравнения методом Рунге-Кутты на предыдущей итерации, поскольку все они являются производными некоторых степеней от основной неизвестной функции.

Параграф 3.3 посвящён сравнительному анализу значений, полученных методом последовательных приближений, результатов других исследователей и значений, полученных с помощью метода конечных объёмов в среде ANSYS CFX.

Для сравнения полученных в данном исследовании на различных итерациях значений силы трения для  $Re \geq 1$  используется безразмерный параметр:

$$S_i = 0,664 W_i / W_{Blaz}, \quad i = 1 \dots N_{it} \quad (26)$$

где  $S_i$  и  $W_i$  – безразмерный параметр и сила трения на одной стороне пластинки соответственно, полученные с помощью представленного полуаналитического метода на  $i$ -й итерации,  $W_{Blaz}$  – сила трения на одной стороне пластинки, полученная Р. Блазиусом в аналитическом виде,  $N_{it}$  – количество итераций.

На каждом шаге параметры  $S_i$  сравниваются с безразмерными параметрами  $S_{ANS}$ ,  $S_H$ ,  $S_{Blaz}$ , полученными соответственно на основе расчётов ANSYS CFX, асимптотического решения Харрисона-Файлона предельно малых  $Re$ :

$$W_H = \frac{2\pi \mu U_0}{1 - \gamma - \ln(U_0 a / 8\nu)}, \quad \gamma = 0,577216, \quad (27)$$

и решения Р. Блазиуса для средних и больших  $Re$ :

$$W_{Blaz} = 0,664 \rho U_0^2 \sqrt{\frac{2av}{U_0}}, \quad (28)$$

Заметим также, что нам удалось вывести формулу Харрисона-Файлона для предельно малых значений  $Re$  путем асимптотического анализа интегрального уравнения первой итерации.

С учётом вышесказанного, при любых произвольных значениях параметров  $\alpha, \rho, \nu, U_0$  безразмерные коэффициенты трения  $S_i$  должны быть равны постоянному значению  $S_{Blaz} = 0,664$  для  $Re \geq 1$ . Параметры  $S_{ANS}$ ,  $S_H$  также определяются по формуле (26), где вместо  $W_i$  подставляются  $W_H$  и  $W_{ANS}$  соответственно.

Таблицы 1, 2 и 3 представляют расчёты, полученные от первой до десятой итерации, для очень малых, малых, средних и больших чисел Рейнольдса. Таблицы 1 и 2 заканчиваются на 4-й и 5-й итерациях соответственно, это означает, что все дальнейшие

итерации совпадают между собой. В свою очередь то, что таблица 3 заканчивается на 10-й итерации, означает, что результаты 9-й и 10-й итераций совпадают. Решение в рамках предложенного итерационного процесса сравнивается как с двумя предельными асимптотическими случаями, так и с прямым численным расчетом методом конечных объемов в среде ANSYS CFX. В расчётах в ANSYS CFX использовалась структурированная сетка с гексаэдрическими элементами. За длину пластинки брали величину в 1 м. Размеры расчетной области составляли 6 м в продольном направлении и 2.5 м в поперечном при толщине в 1 элемент, что является стандартным способом моделирования плоских задач. Следует отметить, что в силу симметрии расчет выполнялся только для половины области. Было взято примерно 1 млн. элементов в сетке. Характерный размер элементов вдали от пластины составляет 0.01 м, вблизи от пластины – 0.0001 м. Результаты, представленные ниже, описаны также в [1].

| Re              | 0,0001 | 0,001 | 0,01  | 0,1   | 1     |
|-----------------|--------|-------|-------|-------|-------|
| Харрисон-Файлон | 50,65  | 19,67 | 8,055 | 3,614 | 1,966 |
| 1-я итерация    | 50,63  | 19,66 | 8,051 | 3,610 | 1,932 |
| 2-я итерация    | 50,72  | 19,69 | 8,064 | 3,616 | 1,964 |
| 3-я итерация    | 50,71  | 19,69 | 8,063 | 3,615 | 1,963 |
| 4-я итерация    | 50,71  | 19,69 | 8,063 | 3,615 | 1,963 |

Таблица 1 – Зависимость параметров  $S_i$ , рассчитанных различными методами, от очень малых чисел Рейнольдса.

| Re           | 1     | 3     | 5     | 10    | 20    | 50    | 70    | 100   | 150   |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Блазиус      | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 |
| ANSYS        | 2,341 | 1,614 | 1,424 | 1,248 | 1,104 | 1,001 | 0,956 | 0,917 | 0,877 |
| 1-я итерация | 1,932 | 1,582 | 1,476 | 1,371 | 1,298 | 1,234 | 1,217 | 1,202 | 1,188 |
| 2-я итерация | 1,964 | 1,618 | 1,512 | 1,401 | 1,296 | 1,156 | 1,108 | 1,061 | 1,015 |
| 3-я итерация | 1,963 | 1,617 | 1,512 | 1,400 | 1,296 | 1,156 | 1,104 | 1,049 | 0,990 |
| 4-я итерация | 1,963 | 1,617 | 1,512 | 1,400 | 1,296 | 1,156 | 1,104 | 1,048 | 0,987 |
| 5-я итерация | 1,963 | 1,617 | 1,512 | 1,400 | 1,296 | 1,156 | 1,104 | 1,048 | 0,986 |

Таблица 2 – Зависимость параметров  $S_i$ , рассчитанных различными методами, от малых и средних чисел Рейнольдса.

| Re      | 200   | 300   | 400   | 500   | 1000  | 1500  | 2000  | 5000  | 10000 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Блазиус | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 | 0,664 |

|               |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ANSYS         | 0,856 | 0,832 | 0,817 | 0,806 | 0,768 | 0,752 | 0,742 | 0,717 | 0,702 |
| 1-я итерация  | 1,180 | 1,170 | 1,164 | 1,160 | 1,151 | 1,147 | 1,144 | 1,138 | 1,135 |
| 2-я итерация  | 0,987 | 0,954 | 0,934 | 0,922 | 0,894 | 0,885 | 0,879 | 0,865 | 0,857 |
| 3-я итерация  | 0,951 | 0,903 | 0,875 | 0,856 | 0,818 | 0,806 | 0,797 | 0,776 | 0,765 |
| 4-я итерация  | 0,945 | 0,891 | 0,858 | 0,835 | 0,791 | 0,778 | 0,766 | 0,742 | 0,728 |
| ...           | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   |
| 10-я итерация | 0,943 | 0,886 | 0,851 | 0,825 | 0,775 | 0,761 | 0,747 | 0,719 | 0,704 |

Таблица 3 – Зависимость параметров  $S_i$ , рассчитанных различными методами, от средних и больших чисел Рейнольдса.

На рис. 3 отображён график продольных скоростей, построенный для трех средних значений числа Рейнольдса (100, 200 и 500) с помощью пакета ANSYS CFX, а также предложенным полуаналитическим методом.

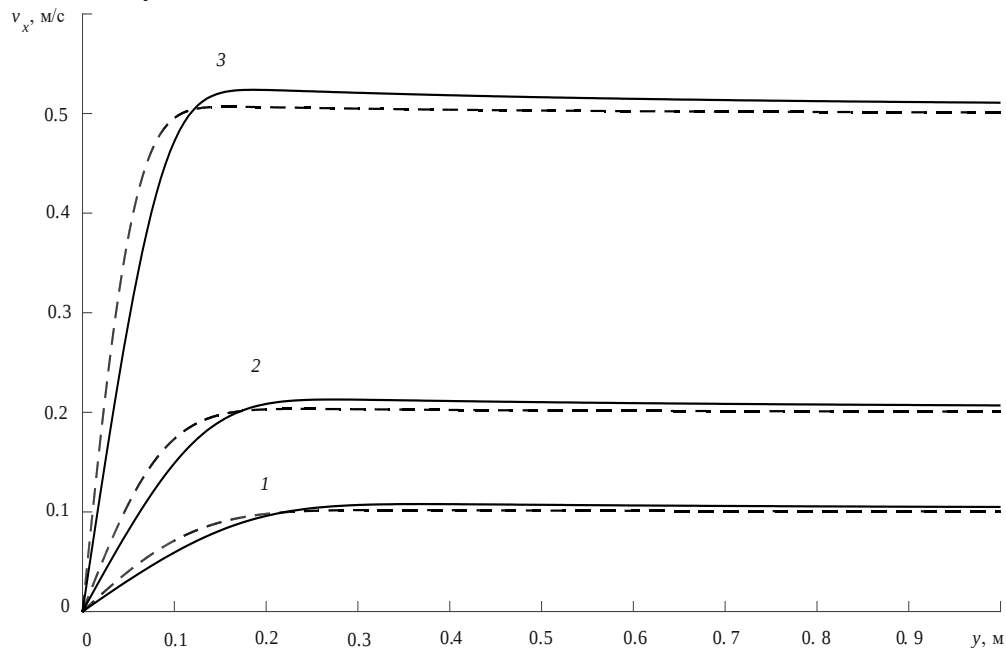


Рис. 3 – Распределение продольной скорости  $U_x$  в зависимости от координаты  $y$  при  $l = 2a = 1$  м,  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.001$  м<sup>2</sup>/с при различных значениях  $U_0$  (м/с). Пунктирные линии соответствуют предложенному методу, сплошные линии соответствуют расчёту в среде ANSYS CFX: линии 1 –  $U_0 = 0.1$  м/с ( $Re = 100$ ), линии 2 –  $U_0 = 0.2$  м/с ( $Re = 200$ ), линии 3 –  $U_0 = 0.5$  м/с ( $Re = 500$ ).

В четвертой главе выводится ГИУ в задаче об обтекании симметричного крылового профиля и используется итерационный метод последовательных приближений, реализованный ранее для тонкой пластинки.

В параграфе 4.1 формулируются основные гипотезы и представляются основные физические соотношения.

В данной задаче исследуется обтекание симметричного телесного аэродинамического профиля безграничным однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости (рис. 4). Длина хорды профиля –  $l = 2a$ ,  $f(x)$  – функция, описывающая контур профиля,  $U_0$  – постоянная скорость набегающего потока. Задача исследуется в двумерном приближении. Искомой величиной является коэффициент сопротивления  $C_d$ . Движение жидкости описывается также уравнением Навье-Стокса и уравнением неразрывности (1), как и в задаче для тонкой пластинки.

Граничные условия прилипания на поверхности профиля имеют следующий вид:

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} = 0 \quad (29)$$

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad (30)$$

где  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  и  $\bar{\mathbf{n}}$  – соответственно единичный вектор касательной и единичный вектор нормали к граничной кривой профиля  $y = f(x)$ .

Векторы касательной и нормали к поверхности крыла  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  и  $\bar{\mathbf{n}}$ , а также вектор скорости потока  $\bar{\mathbf{v}}$  имеют вид:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \right\}, \quad (31)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \left\{ -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \right\}, \quad (32)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \left\{ U_0 + \frac{\partial \psi'}{\partial y}, -\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right\} \quad (33)$$

Штрих над функцией  $f(x)$  здесь означает производную. Штрихи над остальными функциями здесь и впредь означают первую итерацию. Предполагаем, что телесный профиль очень тонкий, следовательно, величина  $f'(x)$  мала.

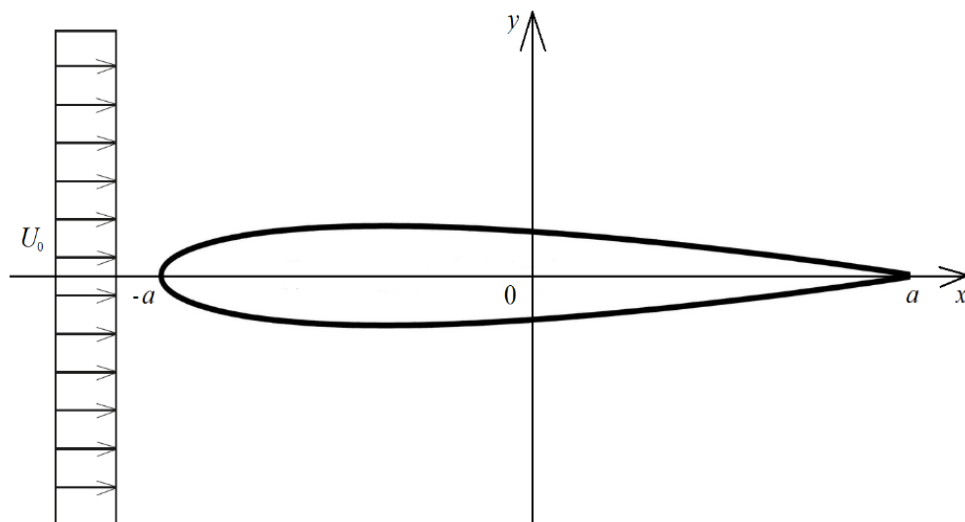


Рис. 4 – Обтекание симметричного телесного аэродинамического профиля набегающим потоком вязкой жидкости.

В данной задаче в параграфе 4.2 для вывода ГИУ используется такой же итерационный подход, как и для предыдущей задачи, следовательно, выражения (5)-(9) также верны. Таким образом, с учётом этого придём к линейному уравнению в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$U_0 \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \nu \Delta^2 \psi' = 0 \quad (34)$$

Считая профиль очень тонким, в линейном приближении рассматриваем это уравнение в верхней полуплоскости, т.е. при  $y \geq 0$ . Тогда, применяя преобразование Фурье по переменной  $x$ , получаем дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого, ограниченное при  $y \rightarrow +\infty$ , имеет следующий вид:

$$\tilde{\psi}'(\beta, y) = C_1 e^{-|\beta|y/a} + C_2 e^{-q(\beta)y/a} \quad (35)$$

где  $\beta = a\alpha$  – параметр преобразования Фурье.

Далее, в линейном приближении сносим граничное условие (30) на ось  $x$  т.е. берем его при  $y = 0$ . Очевидно, при этом условие (30) принимает вид:

$$\left( U_0 + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) f'(x) + \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (36)$$

Следует отметить, что в области профиля, где  $f(x) \equiv 0$ , производная возмущённой функции тока по переменной  $y$  равна нулю:  $\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$ . Следовательно, на контуре профиля функция тока принимает постоянное значение.

Таким образом, условие (36) выполняется не только в области профиля, но и вне его на оси  $x$  при  $y=0$ , если считать, что в этой области  $f \equiv 0$ . В самом деле, последнее слагаемое в (36) соответствует вертикальной компоненте вектора скорости, которая вне профиля, в силу симметрии, равна нулю.

Тогда, используя принцип замораживания функции  $f(x)$ , после применения преобразования Фурье к соотношению (36), с учётом решения (35), получаем:

$$-\frac{i\beta}{a}(C_1 + C_2) + f'(x) \left( -\frac{|\beta|}{a} C_1 - \frac{q(\beta)}{a} C_2 \right) = -U_0 \tilde{f}'(\beta) \quad (37)$$

Введём в рассмотрение вектор напряжений Коши  $p_i^n = p_{ij} n_j$ . Так как  $\bar{\tau} \cdot \bar{n} = 0$ , то получаем выражение для  $p_\tau$ :

$$p_\tau = \mu \left( 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \tau_1 n_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} \tau_2 n_2 \right) + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) (n_2^2 - n_1^2) \right) \quad (38)$$

Отбрасывая функцию  $f'^2$  в силу малости, получаем из выражения (38) уравнение с учётом (31)-(33) и применяем к нему преобразование Фурье с использованием принципа замораживания для величины  $f'(x)$ . Тогда, используя выражение (35) и уравнение (37), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{4i\beta}{a} \left( \frac{i\beta}{a} (C_1 + C_2) - U_0 \tilde{f}'(\beta) \right) + \\ & + \left( 2 \left( \frac{\beta}{a} \right)^2 C_1 + \left( 2 \left( \frac{\beta}{a} \right)^2 - \frac{i\beta U_0}{a\nu} \right) C_2 \right) = \frac{\tilde{T}'}{\mu} \end{aligned} \quad (39)$$

где  $T' = p'_\tau$  – касательная сила трения на поверхности профиля.

Запишем соотношения (37), (39) в виде СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} -2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 C_1 - \left(2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + \frac{iU_0\beta}{av}\right) C_2 = \frac{\tilde{T}'}{\mu} + \frac{4i\beta U_0}{a} \tilde{f}'(\beta) \\ \left(-\frac{i\beta}{a} - \frac{|\beta|}{a} f'(x)\right) C_1 + \left(-\frac{i\beta}{a} - \frac{q(\beta)}{a} f'(x)\right) C_2 = -U_0 \tilde{f}'(\beta) \end{cases} \quad (40)$$

СЛАУ (40) решается методом Крамера. Главный определитель системы представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta &= -2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \left(-i\frac{\beta}{a} - \frac{q(\beta)}{a} f'\right) - \left(i\frac{\beta}{a} + f' \frac{|\beta|}{a}\right) \left(2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + \frac{iU_0\beta}{va}\right) = \\ &= 2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 f' \frac{q(\beta)}{a} - 2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 f' \frac{|\beta|}{a} + \frac{U_0\beta^2}{va^2} - if' \frac{U_0\beta}{va^2} |\beta| \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что при взятии преобразования Фурье по переменной  $x$ , т.е. вдоль потока, применение принципа замораживания означает, что мы физически ищем решение, которое в окрестности каждой граничной точки профиля изменяется вдоль  $x$  очень медленно. Легко показать, что это эквивалентно тому, что в образах Фурье мы работаем при малых  $\beta$ . Тогда выражение для главного определителя (41) СЛАУ (40) может быть упрощено, если в нём отбросить все малые более высокого порядка малости по сравнению с  $\beta^2$ . В приближении «вырожденного решения», таким образом, имеем:

$$\Delta \approx \frac{U_0}{v} \left( \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 - \frac{i\beta|\beta|}{a^2} f' \right) \quad (42)$$

По такому принципу рассматриваются и остальные определители.

С учётом выражений (31) и (33) из граничного условия прилипания по касательной компоненте скорости в виде соотношения (29) имеем:

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} = 0 \quad \sim \quad \left( U_0 + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) - f' \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (43)$$

После применения обратного преобразования Фурье к выражению (35) и подстановки полученного представления для функции тока в (43) имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{f'(x)}{2\pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (C_1(\beta) + C_2(\beta)) e^{-i\beta x/a} i\beta d\beta - \\ &- \frac{1}{2\pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (|\beta| C_1(\beta) + q(\beta) C_2(\beta)) e^{-i\beta x/a} d\beta = -U_0, |x| \leq a \end{aligned} \quad (44)$$

Затем, отбрасывая малые величины в уравнении (44) и проводя элементарные преобразования, приходим к следующему его виду после обращения для  $\tilde{T}'$ :

$$\begin{aligned} &- \frac{v}{2\pi a U_0} \int_{-a}^a \frac{\tau'(\xi)}{\mu} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{aU_0}{iv\beta}}}{i \operatorname{sign}(\beta) + f'(x)} e^{i\beta(\xi-x)/a} d\beta = \\ &= -U_0 + \frac{U_0}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi \end{aligned} \quad (45)$$

При этом, с учётом того, что два интеграла в (45) берутся в явном виде, приходим к следующему СЛАУ для телесного профиля:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\nu}{\pi\mu U_0} \sum_{j=1}^N \tau_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{aU_0}{iv\beta}}}{i \operatorname{sign}(\beta) + f'(x_n)} \frac{\sin\left(\frac{h\beta}{2a}\right)}{\beta} e^{i\beta(x_j - x_n)/a} d\beta = \\
 & = -U_0 + \frac{U_0}{\pi} \left( \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) - f'(x_n)}{\xi - x_n} d\xi + f'(x_n) \ln \frac{a - x_n}{a + x_n} \right); j, n = 1, \dots, N
 \end{aligned} \quad (46)$$

Необходимо отметить, что при  $f(x) \equiv 0$ , уравнение (45) вырождается в интегральное уравнение обтекания тонкой пластинки вязким потоком несжимаемой жидкости [2], как и должно быть с физической точки зрения. Данное уравнение решается численно методами коллокации и методом Гаусса – для нахождения первого приближения к решению для телесного симметричного профиля. Полученное первое приближение подставляется в виде «входного» для итерационного процесса, использованного ранее для тонкой пластинки, таким образом, толщинная функция профиля учитывается в явном виде на первом шаге итерации, а последующие итерации работают в том же алгоритме, что и для тонкой пластинки.

В 4.3 реализуются последующие итерации, приводятся результаты полученных расчётов, которые сравниваются с результатами другого исследования. Полученный метод тестируется на профилях серии NACA00t, граничный контур которых симметричен и описывается уравнением:

$$y = f(x) = \pm 5t(0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4), \quad (47)$$

где  $0 < x < 1$  - горизонтальная координата,  $t$  - максимальная толщина профиля, совпадает с номером из двух последних цифр номера NACA, делённым на 100.

Сравнение с работой Кунца<sup>5</sup>, который сравнивал полученные данные с экспериментальными и опирался также на работу<sup>6</sup>, проводится по коэффициенту лобового сопротивления  $C_d$ :

$$\begin{aligned}
 C_d &= \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 l}, & F_d &= 2W, \\
 W &= \frac{S \cdot W_{Blaz}}{0.664} = S U_0^{3/2} \sqrt{lv}, & F_d &= 2S U_0^{3/2} \sqrt{lv}
 \end{aligned}$$

В итоге для коэффициента лобового сопротивления получаем:

$$C_d = \frac{4S}{\rho} \sqrt{\frac{\nu}{2aU_0}}, \quad (48)$$

<sup>5</sup> Kunz P.J. Aerodynamics and design for ultra-low Reynolds number flight: A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy. Stanford, USA. 2003. – 180 pp.

<sup>6</sup> Azuma A., Okamoto M., Yasuda K. Aerodynamics characteristics of wings at low Reynolds number. Fixed and flapping wing aerodynamics for micro air vehicle applications // Proceedings of Progress in Aeronautics and Astronautics, AIAA. – 2001. – Vol. 195, ch. 17.

| Профиль NASA        | $C_d$ (Кунц) | $C_d$  |
|---------------------|--------------|--------|
| NACA0000(пластинка) | 0.0656       | 0.0667 |
| NACA0002            | 0.0682       | 0.0690 |
| NACA0004            | 0.0708       | 0.0709 |
| NACA0006            | 0.0734       | 0.0727 |
| NACA0008            | 0.0760       | 0.0755 |

Таблица 4 – Сравнение полученных результатов с результатами Kunz<sup>5</sup> для  $Re=2000$ .

Таким образом, максимальное отклонение результатов, представленных в таблице 4, приблизительно составляет 1%. Графическое сравнение представлено на рис. 5.

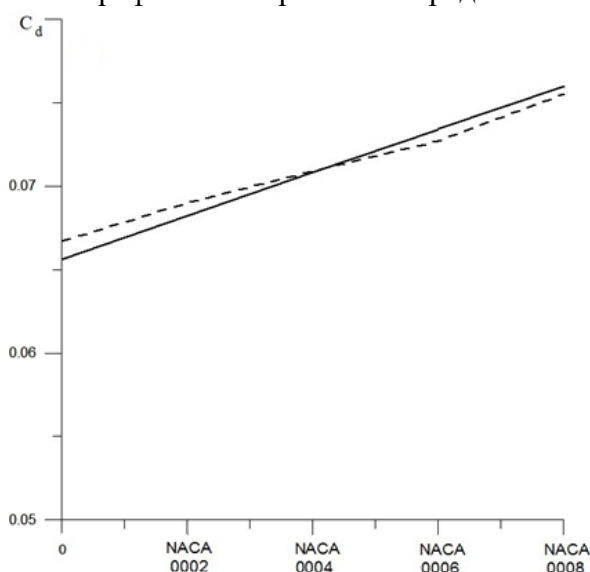


Рис. 5 – Изменение параметра сопротивления в зависимости от номера профиля NASA для  $Re=2000$ . Сплошная линия соответствует расчётам Kunz, пунктирная линия – предложенному методу.

В **заключении** приведены основные результаты диссертационного исследования, которые заключены в следующем:

1. Разработан и реализован полуаналитический метод, основанный на итерационном процессе последовательных приближений, который состоит в том, что возмущения на каждом последующем шаге предполагаются малыми по сравнению с предыдущими приближениями и по этим возмущениям производится линеаризация. В качестве начального приближения берётся невозмущённый набегающий поток. На первом шаге решается интегральное уравнение относительно функции вязкого трения на поверхности, на остальных шагах – дифференциальные уравнения относительно функции тока.
2. Выведено ГИУ на поверхности пластинки относительно функции вязкого трения.
3. Параметры скоростей на первой итерации и их производных, входящих в уравнение второй итерации, представлены через квадратуры, выраженные в аналитическом виде с помощью функций Макдональда (функций Бесселя второго рода), что позволяет значительно сократить время расчёта по сравнению с расчётами в среде ANSYS CFX.

4. Выявлены важные свойства ядра интегрального уравнения первой итерации. Первое заключается в том, что ядро не является ни чётным, ни нечётным, следовательно, решение не обладает никаким видом симметрии. Из второго – стандартной логарифмической особенности ядра – следует то, что решение на концах пластинки имеет корневую особенность: на краях пластинки касательные напряжения неограниченно возрастают.

5. На второй итерации аналитически доказано важнейшее представление, заключающееся в том, что сила трения определяется второй производной функции тока – частного решения, – методом пристрелки при нулевых начальных значениях функции и её первой производной.

6. Проведены расчёты методом конечных объёмов в среде ANSYS CFX для получения силы трения, действующей на пластину, безразмерного коэффициента силы трения и определения распределения продольной скорости вдоль пластинки и сравнения их с соответствующими гидродинамическими характеристиками, полученными реализацией итерационного метода.

7. Приведены численные методы решения выведенного на первой итерации ГИУ и полученных на второй и последующих итерациях неоднородных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с неоднородными коэффициентами.

В результате численных расчётов полученные итерационным методом решения для очень малых чисел Рейнольдса ( $Re \leq 1$ ) в задаче об обтекании пластинки сравниваются с решением Харрисона-Файлона, а решения для малых ( $1 \leq Re \leq 100$ ), средних ( $100 < Re < 1000$ ) и больших чисел Рейнольдса ( $Re > 1000$ ) сравниваются с решением Блазиуса и расчётами в среде ANSYS CFX. Используемый метод представляет достаточно высокую точность в отношении очень малых и больших значений  $Re$ . В области малых и средних значений числа Рейнольдса не выполняется ни один из эвристических аргументов, справедливых для предельно малых и предельно больших чисел Рейнольдса, однако итерационный процесс работает и в этом случае. Неудивительно, что именно для средних значений  $Re$  построенное решение имеет наибольшую погрешность (до 15% в сравнении с прямым численным решением на основе ANSYS CFX). Однако, для  $Re \geq 400$  относительная погрешность не превышает 4%, а при  $Re \geq 1000$  погрешность составляет менее 1%.

8. Представлено ГИУ для задачи ламинарного обтекания тонкого симметричного телесного профиля. В данной задаче также реализован итерационный метод, при этом первая итерация базируется на решении полученного ГИУ, а последующие итерации берутся из задачи об обтекании пластинки. Численный расчёт коэффициента сопротивления сравнивается с аналогичной величиной, полученной Р. J. Kunz. Метод тестируется на профилях NASA 0002, 0004, 0006 и 0008 и максимальное отклонение от данных Kunz и экспериментальных данных для  $Re = 2000$  составляет не более 1%.

## **Публикации автора по теме диссертации**

1. Сумбатьян, М. А. Итерационный метод для уравнений Навье-Стокса в задаче обтекания тонкой пластинки потоком вязкой несжимаемой жидкости / М. А. Сумбатьян, Я. А. Бердник, А. А. Бондарчук // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 66. – С. 132-142. – DOI 10.17223/19988621/66/11

2. Бердник, Я. А. Обтекание телесного аэродинамического профиля потоком вязкой жидкости / Я. А. Бердник, М. А. Сумбатьян // Известия высших учебных заведений.

Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2019. – № 4(204). – С. 12-18. – DOI 10.23683/0321-3005-2019-4-12-18

3. Berdник, Y. The approximation method in the problem on a flow of viscous fluid around a thin plate / Y. Berdник, A. Beskopylny // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. – 2019. – Vol. 91. – No 6. – P. 807-813. – DOI 10.1108/AEAT-07-2018-0196

4. Бердник, Я. А. Итерационный метод для стационарных уравнений Навье-Стокса в задаче обтекания тонкой пластинки / Я. А. Бердник // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2014. – № 1(179). – С. 30-34.

5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016663050. Российская Федерация. Программа для ЭВМ расчета силы вязкого трения при продольном обтекании тонкой пластины : № 2016619640: заявл. 13.09.2016 : опубл. 20.12.2016 / Я. А. Бердник, М. А. Сумбатьян ; правообладатель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет».

6. Бердник, Я. А. Полуаналитический метод последовательных приближений для уравнений Навье-Стокса в задаче обтекания тонкой пластины потоком вязкой жидкости / Я. А. Бердник // Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике : материалы 17-ой Международной молодежной научно-практической конференции, Новочеркасск, 6-7 сентября 2018 г. – Новочеркасск : Лик, 2018. – С. 65–71.

7. Бердник, Я. А. Полуаналитический метод для уравнений Навье-Стокса в задаче обтекания плоской пластинки однородным потоком вязкой жидкости / Я. А. Бердник // Механика 2013 : труды международной школы-конференции молодых ученых, посвященной 70-летию Национальной Академии Наук Армении, 1-4 октября 2013, Цахкадзор, Армения – Ереван, 2013. – С. 109–113.

8. Бердник, Я. А. Полуаналитический метод в обтекании тонкой пластинки потоком вязкой жидкости / Я. А. Бердник, М. А. Сумбатьян // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019 г. : сборник трудов : в 4 т. Т. 2 : Механика жидкости и газа – Уфа : БашГУ, 2019. – С. 74–76.