МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Жуков Владимир Владимирович

Методы синтеза и оценки сложности программ с некоторыми структурными ограничениями

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Ложкин Сергей Андреевич,** доктор физико-математических наук, профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической кибернетики, заведующий кафедрой.
Официальные оппоненты:	**Аблаев Фарид Мансурович,** доктор физико-математических наук, профессор, Казанский Федеральный университет, кафедра теоретической кибернетики, заведующий кафедрой.
	Сергеев Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук, ФГУП «Научно-исследовательский институт “Квант”», начальник лаборатории.
	Чашкин Александр Викторович, доктор физико-математических наук, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, профессор.

Защита состоится 22 июня 2022 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.05.01 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Россия, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, аудитория 1408.
E-mail: vasenin@msu.ru.

С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме защиты можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/455545011/

Автореферат разослан 20 мая 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.05.01 при МГУ,
кандидат физ.-мат. наук Кривчиков М. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задача синтеза является одной из основных задач математической кибернетики. Она возникла на основе ряда задач, связанных с логическим описанием и проектированием различных типов переключательных схем, и обрела строгую математическую постановку в работе К. Шеннона[1]. В общем виде задача синтеза состоит в поиске оптимальных или близких к ним по сложности получаемых схем методов построения дискретных управляющих систем для произвольной булевой функции или системы таких функций. Для оценки оптимальности метода синтеза вводится функция Шеннона, которая для заданного значения n равна сложности самой сложной функции, зависящей от n переменных. При этом сложностью функции называют наименьшую сложность управляющей системы (схемы), реализующей данную функцию, а под сложностью схемы чаще всего понимают количество элементов в ней или их суммарный вес. Точно таким же образом рассматривают методы синтеза, направленные на оптимизацию схем по задержке или другим функционалам сложности.

О. Б. Лупановым[2] был предложен асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов (СФЭ) в полных конечных базисах. С его помощью была получена асимптотически точная верхняя оценка функции Шеннона для сложности реализации булевых функций в классе СФЭ в произвольном полном конечном базисе $Б$, равная $\rho_Б \cdot 2^n/n$, где $\rho_Б$ — константа, называемая приведенным весом базиса $Б$. В стандартном базисе, состоящем из элементов конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, эта оценка равна $2^n/n$.

В работах С. А. Ложкина[3] предложены методы синтеза, с помощью которых удалось установить так называемые асимптотические оценки высокой степени точности (АОВСТ), а также близкие к ним оценки функции Шеннона для различных классов схем. Асимптотические оценки высокой степени точности определяют поведение функции Шеннона с точностью до второго члена ее асимптотического разложения. Например, для сложности СФЭ в стандартном базисе С. А. Ложкиным была

[1] *Шеннон, К.* Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон // М.: ИЛ, 1963.

[2] *Лупанов, О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем / Лупанов О. Б. // М.: Изд-во МГУ, 1984.

[3] *Ложкин, С. А.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.09 / С. А. Ложкин // М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1997; *Ложкин, С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов / С. А. Ложкин // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука; Физматлит, 1996. С. 189–214.

получена следующая оценка (все логарифмы в данной работе берутся по основанию 2):

$$L(n) = \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\log n \pm O(\log\log n)}{n}\right).$$

Впоследствии асимптотическое поведение функций Шеннона на уровне АОВСТ было установлено для многих классов схем с различными ограничениями В. А. Коноводовым[4], С. А. Ложкиным[5], А. Е. Шигановым[6], М. С. Шуплецовым[7] и др.

В ряде работ рассматриваются обобщения классов СФЭ, которые исследуются с точки зрения сложности реализации в них булевых функций. Например, в работе Н. П. Редькина[8] описан асимптотически наилучший метод синтеза схем из блоков, т. е. многовыходных функциональных элементов. В работах С. А. Ложкина рассмотрены схемы из т. н. функционально-проводящих элементов и др.

Большое число работ посвящено решению задачи синтеза схем или формул в т. н. «вырожденных» базисах, элементы которых могут иметь нулевые веса, или «бесконечных» базисах, элементы которых имеют ограниченный вес и сколь угодно большое число существенных входов. Так, в работах Э. И. Нечипорука[9] исследуется поведение функции Шеннона для сложности СФЭ в целом ряде вырожденных базисов.

В работе В. Данчика[10] рассматриваются схемы из функциональных элементов в бесконечных базисах, содержащих многовходовые элементы

---

[4] *Коноводов, В. А.* Методы синтеза и оценки сложности схем с некоторыми структурными ограничениями : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / В. А. Коноводов // М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2015.

[5] *Ложкин, С. А.* О синтезе и сложности формул с ограниченной глубиной альтернирования / С. А. Ложкин, В. А. Коноводов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2012. № 2. С. 28–36.

[6] *Shiganov, A. E.* High Accuracy Asymptotic Bounds on the BDD Size and Weight of the Hardest Functions / S. A. Lozhkin, A. E. Shiganov // Fundamenta Informaticae. 2010. Vol. 104, no. 3. P. 239–253.

[7] *Шуплецов, М. С.* Оценки высокой степени точности для сложности предикатных схем в некоторых базисах / М. С. Шуплецов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2009. Т. 151, кн. 2. С. 173–184.

[8] *Редькин, Н. П.* О реализации булевых функций схемами из блоков / Н. П. Редькин, А. В. Марковский // Проблемы кибернетики. Вып. 28. М.: Наука, 1974. С. 81–100.

[9] *Нечипорук, Э. И.* О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами / Э. И. Нечипорук // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматлит, 1962. С. 123–160; *Нечипорук, Э. И.* О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах / Э. И. Нечипорук // Проблемы киберенетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 111–160.

[10] *Dančík, V.* Complexity of Boolean functions with unbounded fan-in gates / V. Dančík // Inform. Proc. Letters. 1996. Vol. 57. P. 31–34.

конъюнкции и дизъюнкции, для которых функция Шеннона имеет порядок роста $2^{n/2}$. Данные классы схем имеют некоторое сходство с рекурсивными схемами глубины 2, которые определены далее. В работе О. М. Касим-Заде[11] была получена универсальная верхняя оценка $O(2^{n/2})$ функции Шеннона для сложности схем над произвольным бесконечным полным базисом. В работах Э. И. Нечипорука[12], О. Б. Лупанова[13] была установлена асимптотика функции Шеннона $2 \cdot \sqrt{2^n/n}$ для сложности реализации функций алгебры логики схемами над базисом из всех пороговых функций. В работе И. С. Сергеева[14] было продолжено исследование СФЭ в бесконечных базисах, состоящих из многовходовых элементов конъюнкции и дизъюнкции, и в ряде случаев была установлена асимптотика соответствующих функций Шеннона. Например, для схем глубины 3 она оказалась равной $2 \cdot 2^{n/2}$, а для схем без ограничений на глубину и нулевыми весами элементов отрицания — $\sqrt{2} \cdot 2^{n/2}$. В работе С. Н. Селезневой[15] рассматривались схемы в бесконечном базисе из многовходовых элементов конъюнкции и суммы по модулю 2, для которых порядок роста функции Шеннона также равен $2^{n/2}$.

В работах А. А. Никитина[16] рассматривались классы автоматных схем и формул с различными ограничениями на объем используемой памяти и были установлены асимптотические равенства для функций Шеннона, имеющие порядок роста $2^n/n$ и $2^n/\log(n + R(n))$, где $R(n)$ — некоторая величина, зависящая от n и характеризующая максимальное число элементов единичной задержки в автоматной схеме.

---

[11] *Касим-Заде, О. М.* Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе / О. М. Касим-Заде // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 4. С. 59–61.

[12] *Нечипорук, Э. И.* О синтезе схем из пороговых элементов / Э. И. Нечипорук // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М: Наука, 1964. С. 49–62.

[13] *Лупанов, О. Б.* О синтезе схем из пороговых элементов / О. Б. Лупанов // Проблемы кибернетики. Вып. 26. М: Наука, 1973. С. 109–140.

[14] *Сергеев, И. С.* О сложности схем и формул ограниченной глубины над базисом из многовходовых элементов / И. С. Сергеев // Дискретная математика. 2018. Том 30. № 2. С. 120–137.

[15] *Selezneva, S. N.* On the multiplicative complexity of Boolean functions / S. N. Selezneva // Fundamenta Informaticae. 2016. Vol. 145. P. 399–404.

[16] *Никитин, А. А.* О сложности реализации функций алгебры логики в некоторых классах автоматных схем / А. А. Никитин // Дискретные модели в теории управляющих систем / Труды III Международной конференции. М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 79–81; *Никитин, А. А.* О сложности реализации функций алгебры логики в некоторых классах автоматных схем / А. А. Никитин // Проблемы теоретической кибернетики / Тезисы докладов XII Международной конференции. Часть II. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. С. 171; *Никитин, А. А.* О сложности реализации функций алгебры логики в некоторых классах автоматных схем / А. А. Никитин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1999. № 3. С. 41–49.

В работе Ч. Я. Ли[17] была впервые рассмотрена модель двоичных решающих диаграмм (BDD), которая нашла широкое применение в качестве эффективной структуры данных для работы с булевыми функциями. В указанной работе была установлена нижняя и верхняя оценка функции Шеннона порядка $2^{n-1}/n$ и $2^{n+2}/n$ соответственно. Асимптотика $2^n/n$ указанной функции Шеннона была найдена позднее в работе В. А. Кузьмина[18].

В работах В. А. Кузьмина и О. М. Касим-Заде[19] были исследованы вопросы сложности реализации функций алгебры логики (ФАЛ) и функций k-значной логики ($k \geqslant 2$) соответственно в некоторых классах схем программного типа или, иначе, программ. В них рассматривались программы, состоящие из заключительных команд или команд останова, команд условного (по значению переменной) перехода, а также вычислительных команд, которые в работах В. А. Кузьмина реализуют произвольную ФАЛ от 2 переменных, а в работах О. М. Касим-Заде — произвольную функцию k-значной логики из заданного базиса. При этом значения переменных, являющихся аргументами команд последних двух типов, берутся из указанных в них ячеек памяти, а значение, вычисленное командой последнего типа, записывается в несколько указанных в ней ячеек памяти, число которых (кратность выхода команды) в работах В. А. Кузьмина равно 1, а в работах О. М. Касим-Заде определяется базисным типом данной вычислительной команды.

Под сложностью программы в работах В. А. Кузьмина и О. М. Касим-Заде понималось число и сумма весов ее команд соответственно. При этом сложность функции определялась как минимальная сложность реализующих ее программ, а значение $\mathcal{L}(n)$ соответствующей функции Шеннона — как максимальная из сложностей функций от n переменных.

На структуру программы в работах В. А. Кузьмина было наложено дополнительное ограничение, связанное с тем, что все ее вычислительные команды должны были записывать свои результаты в различные ячейки памяти. При этих ограничениях в работах В. А. Кузьмина была установлена асимптотика вида $2^n/n$ для значения функции Шеннона, характеризующего сложность реализации ФАЛ от n переменных, $n =$

---

[17] *Lee, C. Y.* Representation of switching circuits by binary-decision programs / C. Y. Lee // Bell. Sys. Tech. J. 1959. Vol. 38. P. 985–999.

[18] *Кузьмин, В. А.* Оценка сложности реализаций функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ / В. А. Кузьмин // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Сборник трудов Института математики СО АН СССР. Вып. 29. Новосибирск, 1976. С. 11–39.

[19] *Касим-Заде, О. М.* О сложности реализации функций в одном классе алгоритмов / О. М. Касим-Заде // Материалы IX межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 1999. С. 25–30.

$1, 2, \ldots$. Асимптотика данного вида имела место как для программ, состоящих только из вычислительных или только из переадресующих команд, так и для программ более общего вида с указанным ограничением.

Данное ограничение было снято в работе О. М. Касим-Заде, где была получена асимптотика вида $C \cdot k^n/n$ с некоторой константой C, зависящей от базиса, для значения функции Шеннона, связанного с реализацией функций k-значной логики от n переменных, $n = 1, 2, \ldots$. При этом оказалось, что $C = 1/3$ в случае $k = 2$ и базиса, состоящего из всех ФАЛ от 2 переменных.

В работах С. В. Грибка[20] в том случае, когда $k = 2$, а кратность выхода вычислительных команд равна 1, модель программ О. М. Касим-Заде была существенно расширена включением в нее команд вызова подпрограмм. В этих работах была рассмотрена модель программ, реализующих булевы функции, которые состоят из одной или нескольких подпрограмм, содержащих вычислительные команды над произвольным базисом, «стандартные» переадресующие команды, а также команды вызова процедур (подпрограмм). Было показано, что многие классы дискретных управляющих систем, такие, как схемы из функциональных элементов, двоичные решающие диаграммы и др. являются частными случаями программ при некоторых структурных и параметрических ограничениях.

В работах С. В. Грибка был подробно рассмотрен случай, когда вес команды вызова подпрограмм линейно зависел от числа аргументов вызываемой процедуры, и было показано, что в этом случае введение команд вызова подпрограмм не влияет на порядок роста функции Шеннона. При этом были получены асимптотически точные верхние и нижние оценки функций Шеннона для сложности реализации булевых функций в различных классах программ, связанных с возможностью или невозможностью использования команд тех или иных типов. В некоторых случаях для указанных функций Шеннона удалось получить асимптотические оценки высокой степени точности.

В работах С. В. Грибка рассматривался класс рекурсивных схем из функциональных элементов (РСФЭ) в стандартном базисе. Под РСФЭ понимались схемы, состоящие из некоторой последовательности СФЭ, в каждой из которых наряду с функциональными элементами (ФЭ) исходного базиса в качестве «макроэлементов» с единичным весом могут

[20] *Грибок, С. В.* Об одной модели рекурсивных схем из функциональных элементов / С. В. Грибок // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2002. № 4. С. 31–36; *Грибок, С. В.* О реализации функций алгебры логики в некоторых классах программ : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / С. В. Грибок // М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2003.

использоваться предыдущие схемы последовательности. Данный класс схем эквивалентен модели программ, состоящих из вычислительных команд и команд вызова подпрограмм, допускающих нерекурсивный вызов процедур. В определенном смысле эта модель близка к модели СФЭ в бесконечных базисах.

В работах С. В. Грибка рассматривался случай, когда длина последовательности СФЭ (глубина вложенности вызовов подпрограмм) не была ограничена, и было установлено, что асимптотика функции Шеннона имеет линейный порядок роста и равна $3n / \log 3$ как в классе РСФЭ общего вида, в которых «макроэлементы» могут иметь произвольное количество выходов, так и в классе так называемых скалярных РСФЭ, где каждая СФЭ из определяющих их последовательностей имеет ровно один выход.

Следует отметить, что в работах С. В. Грибка возможность нерекурсивного вызова одних подпрограмм из других была рассмотрена только на примере РСФЭ без ограничения на глубину вложенности вызовов процедур. При этом не было исследовано влияние глубины рекурсии (вложенности вызовов) на сложность получаемых реализаций как в классе РСФЭ, так и в модели программ общего вида.

Таким образом, в работах С. В. Грибка, О. М. Касим-Заде, В. А. Кузьмина была рассмотрена модель рекурсивных СФЭ, а также достаточно общая модель программ, вычисляющих булевы функции, в рамках которых было исследовано асимптотическое поведение функций Шеннона для сложности их реализации. Вместе с тем, в этих моделях отсутствует возможность рекурсивного вызова процедур, т. е. выполнение подпрограммами самих себя непосредственно или через другие подпрограммы.

Указанная возможность является, пожалуй, последней существенной особенностью программного способа реализации функций, влияние параметров которой и, в частности, ее глубины на сложность рассматриваемой реализации, не было исследовано. Первой работой, посвященной данному направлению стала работа С. В. Блинова[21], где рассматривался класс скалярных РСФЭ в стандартном базисе с глубиной рекурсии 2. В ней были получены верхние и нижние оценки соответствующей функции Шеннона для сложности реализации булевых функций, имеющие порядок роста $\sqrt{2^n/n}$.

В настоящей работе вводятся и исследуются модели рефлексивно-рекурсивных схем из функциональных элементов (РРСФЭ) и программ, в

[21] *Блинов, С. В.* О синтезе рекурсивных схем из функциональных элементов с ограниченной глубиной рекурсии / С. В. Блинов, С. А. Ложкин // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 98–99.

которых такие вызовы допустимы. Исследуется влияние глубины рекурсии на сложность реализации функций алгебры логики. Кроме того, в качестве еще одного обобщения модели программ, рассматриваются программы с произвольным базисом переадресующих команд, для которых адрес перехода зависит от результатов вычисления некоторой функции из заданного базиса. Для рассматриваемых моделей предложены методы синтеза схем и программ, реализующие произвольные булевы функции, а также методы получения нижних оценок функции Шеннона для сложности реализации булевых функций, с помощью которых при определенных ограничениях было установлено асимптотическое поведение соответствующих функций Шеннона.

Рассматриваемая в диссертации модель программ имеет сходство с некоторыми абстрактными вычислительными устройствами, например, с RAM-машинами, описанными в работе А. В. Ахо[22], которые имеют память, состоящую из последовательности регистров, и выполняют программы, состоящие из последовательности команд, выбираемых из списка, который зависит от решаемой задачи. Существуют также работы (например, работа В. А. Кузьмина[23]), в которых изучалась реализация булевых функций автоматами и машинами Тьюринга. С другой стороны, согласно теореме Сэвиджа[24], при помощи СФЭ в полном базисе можно промоделировать машину Тьюринга M, время работы которой ограничено некоторой функцией $T_M(n)$ от длины входа n, так, что при этом сложность моделирующей СФЭ не превосходит $O(T_M^2(n))$.

С учетом представленных выше соображений, можно утверждать, что задача, рассматриваемая в диссертации, и предлагаемые подходы к ее решению являются новыми, имеют большое значение для развития теории синтеза дискретных управляющих систем, а также могут найти определенное практическое применение (см. раздел теоретическая и практическая значимость).

Объектом исследования диссертационной работы являются модели рекурсивных схем, рефлексивно-рекурсивных схем и программ.

Предметом исследования являются вопросы синтеза и сложности реализации функций алгебры логики в данных моделях, связанные, в первую очередь, с поведением соответствующих функций Шеннона.

Цели диссертационной работы заключаются в следующем.

---

[22] *Aho, A. V.* The Design and Analysis of Computer Algorithms / A. V. Aho, J. E Hopcroft., J. D. Ullman // Addison-Wesley, Reading, MA. 1974.

[23] *Кузьмин, В. А.* Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга / В. А. Кузьмин // Проблемы кибернетики. Вып. 13. М: Наука, 1965. С. 75–96.

[24] *Savage, J. E.* Computational work and time on finite machines / J. E. Savage // J. Ass. Comp. Mach. 1972. Vol. 19. P. 660-674.

1. Введение и исследование модели рефлексивно-рекурсивных схем из функциональных элементов (РРСФЭ) и программ, вычисляющих булевы функции, в которых допустим рекурсивный вызов процедур.
2. Разработка методов синтеза и получение оценок сложности реализации булевых функций и систем таких функций в моделях рекурсивных СФЭ (РСФЭ), РРСФЭ и программ при различных ограничениях на их рекурсивную глубину.

Для достижения поставленных целей в работе решаются следующие **задачи**.

1. Разработка формальной математической модели РРСФЭ и программ над произвольными базисами из вычислительных и переадресующих команд, допускающей рекурсивных вызов процедур.
2. Разработка методов получения верхних оценок числа схем, учитывающих специфику модели, и установление с их помощью нижних оценок сложности реализации «типичных» и самых «сложных» булевых функций в классах РСФЭ, РРСФЭ и программ, имеющих ограниченную рекурсивную глубину.
3. Разработка методов синтеза и получение с их помощью верхних оценок сложности реализации булевых функций в классах рекурсивных схем, рефлексивно-рекурсивных схем и программ, имеющих ограниченную рекурсивную глубину.
4. Установление и исследование асимптотического поведения функций Шеннона для сложности реализации булевых функций в рассматриваемых классах схем и программ в зависимости от глубины рекурсии.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты являются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые введена и исследована модель рефлексивно-рекурсивных схем, реализующих булевы функции, в которой при построении схемы разрешается использовать макроэлементы, соответствующие ей самой, т. е. допустимо «обращение» схемы к самой себе.
2. Впервые введена и исследована модель программ, расширяющая ранее существующие модели программного типа за счет возможности рекурсивного вызова процедур, использования произвольного базиса переадресующих команд, а также некоторых других особенностей.
3. В рамках данных моделей впервые на уровне асимптотически точных верхних и нижних оценок исследовано влияние глубины рекурсии на сложность реализации «типичных» и самых «сложных» функций алгебры логики.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные в диссертации автором методы и полученные в ней результаты могут применяться в дальнейших исследованиях, проводимых в различных областях теории синтеза дискретных управляющих систем.

Несмотря на то, что модели рекурсивных схем и программ не имеют воплощений в виде физических устройств, они могут быть использованы в качестве компактных описаний аппаратуры и, в частности, СБИС.

Доказанные в диссертации утверждения могут включаться в спецкурсы, читаемые студентам и аспирантам математических специальностей.

Методы исследования. В диссертации применяются различные методы дискретной математики и математической кибернетики, включающие в себя аппарат алгебры логики, теории графов, комбинаторики. Используются классические методы и приемы теории синтеза дискретных управляющих систем, такие как мощностные методы получения нижних оценок, методы построения дешифраторов и мультиплексоров, методы разложения реализуемых функций на основе универсальных множеств и др. Кроме того, в диссертационной работе были разработаны новые методы синтеза и получения оценок функций Шеннона: метод раскрытия рекурсии для установления нижних оценок функций Шеннона, метод синтеза однотипных множеств схем и программ, используемый при получении их верхних оценок и др.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся обоснование актуальности решаемой задачи, методология, принятая для исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, а также следующие положения, которые подтверждаются результатами исследований, представленными в диссертации:

1) нахождение асимптотически точных нижних оценок функций Шеннона для сложности реализации булевых функций в классах рекурсивных схем, рефлексивно-рекурсивных схем и программ с ограниченной глубиной рекурсии;
2) нахождение асимптотически точных верхних оценок функций Шеннона для сложности реализации булевых функций в классах рекурсивных схем, рефлексивно-рекурсивных схем и программ с ограниченной глубиной рекурсии.

Достоверность полученных результатов базируется на применении методов дискретной математики и математической кибернетики и обеспечивается строгим обоснованием корректности их использования при получении результатов диссертации.

Работы других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях, а также научных семинарах:

1) XVIII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 19–23 июня 2017 г.);
2) X Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г.);
3) научная конференция «Тихоновские чтения 2019» (Москва, 28 октября – 1 ноября 2019 г.);
4) XIX Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (дистанционно, 28 сентября – 1 октября 2021 г.);
5) научный семинар «Математические вопросы кибернетики», проводимый кафедрой математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики совместно с кафедрами математической теории интеллектуальных систем и дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова;
6) научно-исследовательский семинар «Синтез управляющих систем» кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова;
7) научный семинар кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова.

Личный вклад. Автор изучил и проанализировал большой объем литературы в области теории синтеза управляющих систем, сформулировал и доказал представленные в диссертационной работе утверждения, направленные на решение поставленных задач. Все результаты получены автором самостоятельно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, одного приложения и списка литературы, включающего в себя 39 наименований. Общий объем работы составляет 97 страниц.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 8 работ. Результаты, выносимые на защиту, изложены в 5 статьях, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, которые рекомендованы для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика» и входят в базы цитирования Scopus, Web of Science, RSCI.

Краткое содержание работы. Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы, представлен обзор литературы по теме исследования, указаны цели и задачи работы, научная новизна диссертации, теоретическая и практическая значимость работы, методы диссертационного исследования, основные результаты и структура работы. Также представлены степень достоверности, апробация результатов работы и публикации по теме диссертации.

В **главе 1** даются основные определения, описываются модели рекурсивных, рефлексивно-рекурсивных схем и программ, реализующих булевы функции и допускающих рекурсивный вызов процедур. Приводится критерий полноты программ в паре произвольных базисов вычислительных и переадресующих команд, доказывается утверждение о моделировании рефлексивно-рекурсивных схем из функциональных элементов программами. Формулируются основные результаты диссертации.

В параграфе 1.1 определяется понятие рекурсивных схем из функциональных элементов (РСФЭ), вводится понятие рефлексивно-рекурсивных схем из функциональных элементов (РРСФЭ).

Под РСФЭ Σ глубины r в произвольном конечном полном базисе $Б$ понимается последовательность $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ схем из функциональных элементов (СФЭ), таких что Σ_1 является СФЭ в базисе $\widetilde{Б}_1 = Б$, а каждая схема $\Sigma_i, i = 2, 3, \ldots, r$, — это СФЭ в расширенном базисе $\widetilde{Б}_i = Б \cup \{\xi_{i-1}\}$, где ξ_{i-1} — многовыходной функциональный элемент, имеющий вес ν_{i-1}, $\nu_{i-1} > 0$, и реализующий ту же самую систему функций, которую реализует схема Σ_{i-1} последовательности $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$. Полученная РСФЭ Σ функционирует так же, как функционирует последняя схема Σ_r заданной последовательности СФЭ.

РРСФЭ Σ глубины r в базисе $Б$ называется последовательность $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$ схем из функциональных элементов произвольной длины l, где каждая схема $\Sigma_i, i = 1, 2, \ldots, l$, является СФЭ в базисе $Б \cup \{\xi_1, \ldots, \xi_l\}$, а $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, l$, — это многовыходной функциональный элемент, имеющий вес ν, $\nu > 0$, и столько же входов и выходов, что и схема Σ_i последовательности $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$.

Если каждая схема последовательности, определяющей РСФЭ или РРСФЭ, имеет ровно один выход, такие схемы называются скалярными.

Сложность РСФЭ или РРСФЭ Σ определяется как сумма сложностей СФЭ соответствующей ей последовательности. Естественным образом определяются для данных классов схем функции Шеннона как максимальные сложности функций, зависящих от n переменных, и обозначаются $\mathcal{L}_Б^{PC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{CPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{PPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{CPPC(r)}(n)$ для классов рекурсивных схем, скалярных рекурсивных схем, рефлексивно-рекурсивных схем и скалярных рефлексивно-рекурсивных схем соответственно.

В параграфе 1.2 вводится понятие программ, реализующих булевы функции.

Программой Σ в паре базисов $\breve{Б}$, $\widehat{Б}$ вычислительных и переадресующих команд называется набор подпрограмм $\{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s\}$, для каждой из которых задан набор из $in(i)$, $i = \overline{1, s}$, входных аргументов, $out(i)$, $i = \overline{1, s}$, выходных аргументов, упорядоченный набор команд $\Gamma_i = \{\Gamma_{i,1}, \ldots, \Gamma_{i,c_i}\}$, а также область памяти, состоящая из M_i, $M_i \geqslant in(i) + out(i)$, ячеек, используемых данной подпрограммой.

Команды подпрограмм, входящие в наборы Γ_i, $i = \overline{1, s}$, могут быть трех типов:

1) вычислительные команды $\{\breve{\varphi}_j; m_1, \ldots, m_{\breve{k}_j}; m'_1, \ldots, m'_{\breve{l}_j}\}$ описываются символом булевой функции $\breve{\varphi}_j(x_1, \ldots, x_{\breve{k}_j})$ из заданного базиса $\breve{Б}$, номерами входных ячеек памяти $m_1, \ldots, m_{\breve{k}_j}$ и номерами выходных ячеек памяти $m'_1, \ldots, m'_{\breve{l}_j}$;
2) переадресующие команды $\{\widehat{\varphi}_j; m_1, \ldots, m_{\widehat{k}_j}; c_{false}, c_{true}\}$ описываются символом булевой функции $\widehat{\varphi}_j(x_1, \ldots, x_{\breve{k}_j})$ из базиса $\widehat{Б}$, номерами ячеек памяти $m_1, \ldots, m_{\widehat{k}_j}$ и номерами команд текущей подпрограммы c_{false} и c_{true}, на которые выполняется условный переход;
3) команды вызова подпрограмм $\{p; m_1, \ldots, m_{in(p)}; m'_1, \ldots, m'_{out(p)}\}$ описываются номером вызываемой подпрограммы p, номерами ячеек памяти текущей подпрограммы $m_1, \ldots, m_{in(p)}$, значения которых будут использованы как входные аргументы вызываемой подпрограммы, а также номерами ячеек памяти текущей подпрограммы $m'_1, \ldots, m'_{out(p)}$, куда будут записаны результаты выполнения подпрограммы Σ_p.

Выполнение программы Σ начинается с последней подпрограммы Σ_s с некоторыми заданными значениями входных аргументов $x_1, \ldots x_n$. Программа Σ вычисляет булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2(n)$, если вычисление Σ для всех 2^n наборов входных аргументов $x_1, \ldots, x_n$ завершается и результатом является значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Сложностью $\mathcal{L}(\Sigma)$ программы Σ называется сумма весов всех команд ее подпрограмм, а функцией Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n)$ для сложности реализации булевых функций в классе программ — максимальная сложность функции, зависящей от n переменных.

В работе, как правило, рассматриваются программы с глубиной рекурсии, ограниченной некоторым натуральным числом r.

В параграфе 1.3 доказывается критерий полноты программ, а также утверждение о моделирование РРСФЭ программами, реализующими булевы функции.

Лемма 1. *Для полноты класса программ $\mathcal{U}^{\Pi(r)}_{\breve{Б}, \widehat{Б}, \nu}$ в паре базисов $\breve{Б}$, $\widehat{Б}$, с параметром ν и ограниченной глубиной рекурсии r необходимо и* *достаточно, чтобы было выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:*

1. *Базис* $\breve{Б}$ *является функционально полным.*
2. *В базисе* $\widehat{Б}$ *существует функция, существенно зависящая хотя бы от одной переменной, базис* $\breve{Б}$ *полностью не содержится в классе* T_0 *и содержит функцию, отличную от константы* 1.

Лемма 2. *Пусть* $\Sigma \in \mathcal{U}_Б^{PPC(r)}$ *— РРСФЭ в базисе Б, определенная последовательностью СФЭ* $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$, *с весом элементов* ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, *равным* ν, *глубины* r *и сложности* $\mathcal{L}$. *Тогда существует эквивалентная ей программа* $\Sigma' \in \mathcal{U}^{\Pi(r)}$ *в базисе вычислительных команд* $\breve{Б} = Б$ *и весом команд вызова подпрограмм* ν, *которая также имеет сложность* $\mathcal{L}$.

В **главе 2** рассматриваются модели рекурсивных и рефлексивно-рекурсивных схем из функциональных элементов. Представлены методы получения нижних оценок функции Шеннона для сложности реализации булевых функций в данных классах схем. Приводятся реализации и верхние оценки сложности схем для некоторых, в том числе встречающихся в приложениях, функций и систем функций, таких как мультиплексор и дешифратор, описываются методы синтеза рекурсивных схем для произвольных булевых функций.

В параграфе 2.1 описывается получение нижних оценок функции Шеннона для классов РСФЭ и РРСФЭ мощностным методом. Для этого сначала оценивается сверху число попарно неэквивалентных рекурсивных схем заданной сложности, а затем применяется стандартное мощностное преобразование. Результатом параграфа является следующая лемма.

Лемма 3. *При* $r \geqslant 2$ *для функций Шеннона* $\mathcal{L}_Б^{PC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{CPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{PPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{CPPC(r)}(n)$ *верны следующие неравенства:*

$$\mathcal{L}_Б^{PC(r)}(n) \geqslant r\sqrt[r]{\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{r-1}\rho_Б \frac{2^n}{n}}\left(1 + \frac{\frac{1}{r}\log n - O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_Б^{CPC(r)}(n) \geqslant r\sqrt[r]{r\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{r-1}\rho_Б \frac{2^n}{n}}\left(1 + \frac{\frac{1}{r}\log n - O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_Б^{PPC(r)}(n) \geqslant r\sqrt[r]{(r-1)^{1-r}\nu^{r-1}\rho_Б \frac{2^n}{n}}\left(1 + \frac{\frac{1}{r}\log n - O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_Б^{CPPC(r)}(n) \geqslant r\sqrt[r]{r(r-1)^{1-r}\nu^{r-1}\rho_Б \frac{2^n}{n}}\left(1 + \frac{\frac{1}{r}\log n - O(1)}{n}\right).$$

В процессе получения нижних оценок используется прием раскрытия рекурсии, позволяющий свести данную задачу к аналогичной задаче для класса СФЭ и использовать уже известные результаты для этого класса. Кроме того, исходя из результатов для сложности реализации в классе СФЭ конъюнктивного и дизъюнктивного дешифратора порядка n, а также мультиплексора порядка n, установлено, что сложность реализации данных функций и систем функций в классах РСФЭ и РРСФЭ глубины r равна $\Omega(2^{n/r})$.

В параграфе 2.2 описывается построение РСФЭ и РРСФЭ, реализующих некоторые специальные функции и системы функций.

Показывается, что сложность РСФЭ глубины r, реализующей множество или цепочку из не менее k однородных одновыходных схем Σ_ψ сложности $\mathcal{L}_\psi$, не превышает величины

$$r\sqrt[r]{\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{r-1}\mathcal{L}_\psi k} + \mathcal{L}_\psi + O(1).$$

Аналогичная верхняя оценка сложности для класса РРСФЭ равна

$$r\sqrt[r]{(r-1)^{1-r}\nu^{r-1}\mathcal{L}_\psi k} + \mathcal{L}_\psi + O(1).$$

Доказываются следующие утверждения о верхних оценках сложности реализации дешифратора и мультиплексора порядка n.

Лемма 5. *Сложность реализации конъюнктивного дешифратора* $\overrightarrow{Q}_n$ *порядка* n *в классе* $\mathcal{U}_Б^{PC(r)}$ *не превышает* $O(2^{n/r})$.

Лемма 6. *Сложность реализации мультиплексорной ФАЛ* μ_n, *зависящей от* n *адресных и* 2^n *информационных переменных, в классе* $\mathcal{U}_Б^{PC(r)}$ *не превышает* $O(2^{n/r})$.

Лемма 7. *Сложность реализации мультиплексорной ФАЛ* μ_n, *зависящей от* n *адресных и* 2^n *информационных переменных, в классе* $\mathcal{U}_Б^{CPC(r)}$ *не превышает* $O(2^{n/r})$.

Учитывая вложенность классов РСФЭ в классы РРСФЭ при $\nu_1 = \ldots = \nu_r = \nu$, а также принимая во внимание нижние оценки сложности реализации дешифратора и мультиплексора порядка n, получаем следующую лемму.

Лемма 8. *Сложность дешифратора и мультиплексора порядка* n *в классах рекурсивных и рефлексивно-рекурсивных схем* $\mathcal{U}_Б^{PC(r)}$, $\mathcal{U}_Б^{CPC(r)}$, $\mathcal{U}_Б^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_Б^{CPPC(r)}$ *равна* $\Theta\left(2^{n/r}\right)$.

Далее приводится описание построения в классах скалярных РСФЭ и РРСФЭ множества из не менее k однородных схем Σ_ψ сложности $\mathcal{L}_\psi$ одновременно с мультиплексором с достаточным числом адресных и информационных переменных для «выбора» одной из k схем Σ_ψ. Сложность полученной реализации в классе скалярных РСФЭ оценивается сверху числом

$$r\sqrt[r]{\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{r-1}\mathcal{L}_\psi k}\left(1+O\left(\frac{1}{\mathcal{L}_\psi}\right)\right),$$

а в классе скалярных РРСФЭ — числом

$$r\sqrt[r]{(r-1)^{1-r}\nu^{r-1}\mathcal{L}_\psi k}\left(1+O\left(\frac{1}{\mathcal{L}_\psi}\right)\right).$$

Пусть $\psi(y_1,\ldots,y_p)$ — ФАЛ, существенно зависящая от всех своих переменных. Множество ФАЛ $G\subseteq P_2(m)$ является ψ-универсальным множеством порядка m, если для любой функции $g\in P_2(m)$ существуют функции $g_1,\ldots,g_p\in G$ такие, что $g=\psi(g_1,\ldots,g_p)$.

Для ψ-универсального множества доказывается следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть $s_1,\ldots,s_p$ — положительные четные числа, такие что $s_1+\ldots+s_p\geqslant 2^m$. Тогда существует ψ-УМ G порядка m, такое что:*

1. $|G|\leqslant 2^{s_1}+\ldots+2^{s_p}$.
2. *Сложность реализации системы функций из G в классах $\mathcal{U}_Б^{PC(r)}$ и $\mathcal{U}_Б^{PPC(r)}$ не превосходит*

$$O(\sqrt[r]{|G|}+p\cdot 2^{\frac{s/2+m}{r}}),\ \text{где } s=\max\{s_1,\ldots,s_p\}.$$

В параграфе 2.3 приводится асимптотически наилучший метод синтеза рекурсивных и рефлексивно-рекурсивных схем из рассматриваемых классов, получена следующая лемма.

Лемма 10. *При $r\geqslant 2$ для функций Шеннона $\mathcal{L}_Б^{PC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{CPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{PPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{CPPC(r)}(n)$ верны следующие неравенства:*

$$\mathcal{L}_Б^{PC(r)}(n)\leqslant r\sqrt[r]{\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{r-1}\rho_Б\frac{2^n}{n}}\left(1+\frac{\frac{3}{r}\log n+O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_Б^{CPC(r)}(n)\leqslant r\sqrt[r]{r\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{r-1}\rho_Б\frac{2^n}{n}}\left(1+\frac{\frac{3}{r}\log n+O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(n) \leqslant r\sqrt[r]{(r-1)^{1-r}\nu^{r-1}\rho_{Б}\frac{2^n}{n}}\left(1+\frac{\frac{3}{r}\log n + O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(n) \leqslant r\sqrt[r]{r(r-1)^{1-r}\nu^{r-1}\rho_{Б}\frac{2^n}{n}}\left(1+\frac{\frac{3}{r}\log n + O(1)}{n}\right).$$

Из данной леммы и леммы 3 о нижних оценках функции Шеннона вытекает утверждение теоремы 1.

Теорема 1. *При $r \geqslant 2$ для функций Шеннона $\mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_{Б}^{CPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(n)$ верны следующие асимптотические равенства:*

$$\mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(n) \sim r\sqrt[r]{\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{r-1}\rho_{Б}\frac{2^n}{n}},$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPC(r)}(n) \sim r\sqrt[r]{r\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{r-1}\rho_{Б}\frac{2^n}{n}},$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(n) \sim r\sqrt[r]{(r-1)^{1-r}\nu^{r-1}\rho_{Б}\frac{2^n}{n}},$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(n) \sim r\sqrt[r]{r(r-1)^{1-r}\nu^{r-1}\rho_{Б}\frac{2^n}{n}}.$$

В параграфе 2.4 рассматриваются классы рекурсивных схем с неограниченной глубиной рекурсии. Описывается построение мультиплексора порядка n с константной сложностью, а также обосновывается утверждение теорем 2, 3.

Теорема 2. *При $r(n) = n + 2$ для функций Шеннона $\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r(n))}(n)$ и $\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r(n))}(n)$ верны следующие равенства:*

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r(n))}(n) = O(1),$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r(n))}(n) = O(1).$$

Теорема 3. *При $r(n) = n + 2$ для функции Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(r(n))}(n)$ верно следующее равенство:*

$$\mathcal{L}^{\Pi(r(n))}(n) = O(1).$$

В **главе 3** рассматривается модель программ, вычисляющих булевы функции. В целях нахождения асимптотики функций Шеннона последовательно устанавливаются нижние оценки данных функций для одномодульных и многомодульных программ, а затем соответствующие им верхние оценки.

В параграфе 3.1 описывается получение верхних оценок числа попарно неэквивалентных одномодульных программ заданной сложности. После применения к ним стандартного мощностного преобразования доказывается следующая лемма о нижней асимптотической оценке соответствующей функции Шеннона.

Лемма 11. *Для функции Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(1)}(n)$ верно асимптотическое неравенство*

$$\mathcal{L}^{\Pi(1)}(n) \gtrsim \min(\pi_{\check{Б}}, \pi_{\widehat{Б}}) \frac{2^n}{n}.$$

В параграфе 3.2 устанавливается нижняя асимптотическая оценка функции Шеннона для сложности реализации булевых функций в классе многомодульных программ с глубиной рекурсии, ограниченной числом r, $r \geqslant 2$. Как и в случае рекурсивных схем с глубиной рекурсии r, в процессе доказательства применяется метод раскрытия рекурсии, позволяющий существенно упростить получение верхних оценок числа попарно неэквивалентных программ.

Результатом данного параграфа является доказательство следующего утверждения.

Лемма 12. *Для функции Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n)$ при $r \geqslant 2$ верно асимптотическое неравенство*

$$\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n) \gtrsim r \sqrt[r]{(r-1)^{1-r} \nu^{r-1} \min(\pi_{\check{Б}}, \theta_{\widehat{Б}}) \frac{2^n}{n}}.$$

В параграфе 3.3 приводится асимптотически наилучший метод синтеза программ с ограниченной глубиной рекурсии.

При построении дешифратора и ψ-универсального множества, являющихся частью программы, реализующей произвольную ФАЛ из $P_2(n)$, используется лемма 2 о моделировании рефлексивно-рекурсивных схем программами и соответствующие утверждения о сложности реализации указанных систем функций в классе РРСФЭ.

С помощью описанных методов доказана следующая лемма о верхних оценках функции Шеннона для модели программ.

Лемма 13. *Для функции Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n)$ при $r = 1$ верно асимптотическое неравенство*

$$\mathcal{L}^{\Pi(1)}(n) \lesssim \min(\pi_{\check{Б}}, \pi_{\widehat{Б}}) \frac{2^n}{n},$$

а при $r \geqslant 2$ верно

$$\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n) \lesssim r \sqrt[r]{(r-1)^{1-r} \nu^{r-1} \min(\pi_{\check{Б}}, \theta_{\widehat{Б}}) \frac{2^n}{n}}.$$

Из данной леммы и лемм 11, 12 о нижних оценках функции Шеннона вытекает утверждение теоремы 4.

Теорема 4. *Для функции Шеннона $\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n)$ при $r = 1$ верно асимптотическое равенство*

$$\mathcal{L}^{\Pi(1)}(n) \sim \min(\pi_{\breve{B}}, \pi_{\widehat{B}}) \frac{2^n}{n},$$

а при $r \geqslant 2$ верно

$$\mathcal{L}^{\Pi(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{(r-1)^{1-r} \nu^{r-1} \min(\pi_{\breve{B}}, \theta_{\widehat{B}}) \frac{2^n}{n}}.$$

В **приложении А** приводятся и доказываются вспомогательные утверждения о точках экстремума некоторых функций, используемых при получении верхних оценок числа попарно неэквивалентных рекурсивных схем и программ в главах 2 и 3 соответственно.

Заключение

1. Впервые автором введена модель рефлексивно-рекурсивных схем, реализующих булевы функции, в которой при построении схемы разрешается использовать макроэлементы, соответствующие ей самой, т. е. допустимо «обращение» схемы к самой себе.
2. Впервые автором введена модель программ, расширяющая ранее существующие модели программного типа за счет возможности рекурсивного вызова процедур, использования произвольного базиса переадресующих команд, а также некоторых других особенностей.
3. Разработан новый метод получения нижних оценок сложности реализации булевых функций в классах рекурсивных схем, рефлексивно-рекурсивных схем и программ, основанный на приеме раскрытия рекурсии.
4. Разработаны новые методы синтеза однотипных множеств схем и программ в рассматриваемых моделях, позволяющие модифицировать существующие методы синтеза и установить новые верхние оценки функций Шеннона, а также сложности реализации некоторых булевых функций и систем таких функций, в том числе дешифратора, мультиплексора, универсального множества и др.
5. Для функций Шеннона, связанных с реализацией булевых функций от n переменных в классах рекурсивных схем, рефлексивно-рекурсивных схем и программ с глубиной рекурсии, ограниченной

числом r, установлены новые асимптотически точные оценки функций Шеннона, имеющие порядок роста $\sqrt[r]{2^n/n}$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Ложкину Сергею Андреевичу за постановку задачи и обсуждение результатов. Автор также благодарен всем сотрудникам кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ за оказанную поддержку и внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных издания, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. *Жуков, В. В.* Асимптотически наилучшие методы синтеза булевых рефлексивно-рекурсивных схем / В. В. Жуков // Прикладная математика и информатика. Вып. 63. М.: МАКС Пресс, 2020. С. 63–81.
   Zhukov V. V. Asymptotically best synthesis methods for reflexive-recursive circuits / V. V. Zhukov // Computational Mathematics and Modeling. 2020. Vol. 31, no. 3. P. 369–383. (Scopus CiteScore 2020 year — 0.8).
2. *Жуков, В. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем ограниченной глубины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2017. № 4. С. 29–35. (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2020 г. — 0.182).
   Zhukov V. V. The asymptotically best method for synthesizing limited-depth Boolean recursive schemes / V. V. Zhukov // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2017. Vol. 41, no. 3. P. 134–141. (Scopus CiteScore 2016 year — 0.3).
3. *Жуков, В. В.* Методы синтеза бинарных программ, допускающих рекурсивный вызов процедур / В. В. Жуков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2021. № 3. С. 3–12. (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2020 г. — 0.182).
   Zhukov V. V. Ways of synthesizing binary programs admitting recursive call of procedures / V. V. Zhukov // Moscow University Computational

Mathematics and Cybernetics. 2021. Vol. 45, no. 3. P. 87–95. (Scopus CiteScore 2016 year — 0.3).

4. *Жуков, В. В.* Синтез бинарных программ с преобладанием команд переадресующего типа / В. В. Жуков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2021. Т. 163, кн. 3. С. 276–290. (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2020 г. — 0.195).

5. *Жуков, В. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем / В. В. Жуков, С. А. Ложкин // Дискретная математика. Том 31. № 1. М.: Наука, 2019. С. 99–110. (Двухлетний импакт-фактор РИНЦ 2020 г. — 0.488).
   Zhukov, V. V. Asymptotically best method for synthesis of boolean recursive circuits / V. V. Zhukov, S. A. Lozhkin // Discrete Mathematics and Applications. 2020. Vol. 30, no. 2. P. 137–146. (Ложкину С. А. принадлежит постановка задачи и выработка общего подхода к ее решению. Жуковым В. В. получены основные результаты работы. Scopus CiteScore 2020 year — 0.4, Web of Science JCI 2020 year — 0.2).

В сборниках трудов конференций

1. *Жуков, В. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем ограниченной глубины в произвольном базисе / В. В. Жуков // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVIII Международной конференции (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). М.: МАКС Пресс, 2017. С. 90–92.

2. *Жуков, В. В.* Синтез некоторых типов бинарных программ, допускающих рекурсивный вызов процедур ограниченной глубины / В. В. Жуков // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XIX международной конференции. Казань: Казанский федеральный университет, 2021. С. 53–55.

3. *Жуков, В. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем / В. В. Жуков, С. А. Ложкин // Дискретные модели в теории управляющих систем: X Международная конференция, Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г. : Труды. М.: МАКС Пресс, 2018. 122–125. (Ложкину С. А. принадлежит постановка задачи и выработка общего подхода к ее решению. Жуковым В. В. получены основные результаты работы.)

Жуков Владимир Владимирович

Методы синтеза и оценки сложности программ
с некоторыми структурными ограничениями

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___.______. Заказ № ___________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____________________________________