

На правах рукописи

Паршина Ольга Геннадьевна

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В
МОРФИЧЕСКИХ СЛОВАХ И РАСКРАСКАХ
БЕСКОНЕЧНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ
ГРАФОВ**

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН).

Научные руководители:

Сергей Владимирович Августинович, кандидат физико-математических наук, и **Лука Замбони**, PhD, профессор.

Официальные оппоненты:

Шур Арсений Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», профессор кафедры алгебры и фундаментальной информатики.

Шалагинов Леонид Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Челябинский государственный университет», доцент кафедры компьютерной безопасности и прикладной алгебры.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича Российской академии наук.

Защита состоится 29 мая 2019 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, <http://math.nsc.ru>.

Автореферат разослан 28 марта 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.015.01, д.ф.-м.н.

Ю. В. Шамардин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Результаты, описанные в диссертации, находятся на стыке алгебраической комбинаторики, теории графов, комбинаторики слов и символической динамики. Работа была проведена по двум направлениям, в рамках одного из которых рассматриваются задачи комбинаторики слов, а именно, изучаются локальные арифметические свойства бесконечных апериодических слов; в рамках другого направления исследуются совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов ограниченной степени.

В данном тексте мы используем следующие обозначения: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ и $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Рассмотрим бесконечную циклическую группу $(\mathbb{Z}, +)$. Фактически диссертация посвящена изучению отображений из бесконечной циклической группы в какое-либо конечное множество. В некоторых случаях мы называем это множество алфавитом и изучаем арифметические свойства соответствующих бесконечных слов. В других случаях наше множество состоит из цветов, а объектом исследования становятся совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов. Здесь на передний план выходят их периодические свойства. Нами сделана попытка подойти к данным понятиям с единых позиций, но, очевидно, что основная работа ещё впереди.

Так, в рамках работы над совершенными раскрасками, исследуются графы Кэли группы $(\mathbb{Z}, +)$ с множеством порождающих $\{d_1, -d_1, d_2, -d_2, \dots, d_n, -d_n\}$ для заданного набора попарно различных $\{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$ натуральных чисел. Любая совершенная раскраска такого графа в конечное число цветов является периодической. Основной задачей в этой области является перечисление совершенных раскрасок данных графов в t цветов.

В комбинаторике слов рассматриваются арифметические подструктуры в бесконечных (вправо) словах над алфавитом мощности t . Под арифметической подструктурой мы понимаем последовательность символов заданного слова $x = x_0x_1x_2 \dots$ с индексами, образующими арифметическую прогрессию $\{i + kd\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $i, d \in \mathbb{N}$. Задачи, поставленные в этой области, вдохновлены теоремой Ван дер Вардена о монохромных арифметических прогрессиях в множестве натуральных чисел.

Теорема (Ван дер Варден) *Пусть множество натуральных чисел раскрашено в конечное число цветов. Тогда найдётся арифметическая прогрессия сколь угодно большой конечной длины, члены которой окрашены в один цвет.*

Помимо арифметических подпоследовательностей в бесконечных словах нас интересует распределение их периодических подслов особого вида, а именно тех, которые являются полными первыми возвратами к некоторому

под слову. Фактически, взяв некоторую последовательность x подряд идущих символов в заданном бесконечном слове x , мы ищем её следующее вхождение в x , и определяем *полный первый возврат* как слово, имеющее только два вхождения x : как префикс и как суффикс. Мы задаёмся вопросом о том, сколько факторов заданной длины n в слове x являются полными первыми возвратами.

Актуальность исследований в каждом из описанных направлений опишем по отдельности. *Комбинаторика слов* берёт свое начало в 1900-х годах с работ Норвежского математика А. Туэ. Он заинтересовался вопросом, существует ли бесконечное слово над конечным алфавитом, в котором не встречается два одинаковых последовательно идущих блоков символов, и дал на него положительный ответ в виде бесконечного слова над алфавитом из трёх символов. Нетрудно убедиться, что в случае бинарного алфавита бесконечной последовательности с таким свойством не существует. Туэ построил бесконечное слово над бинарным алфавитом, не содержащее трёх одинаковых последовательно идущих блоков¹. Данное слово $x = x_0x_1x_2 \dots$ задается следующим образом: для каждого неотрицательного целого n символ x_n является суммой по модулю два цифр в двоичном представлении n .

Несколько годами позже М. Морс и Г. Хедлунд, вдохновлённые изучением классических динамических систем, дали начало новой области математики, сейчас известной как символическая динамика. Любопытно, что определяющие в данной области статьи Морса и Хедлунда продемонстрировали прочную связь с более ранней работой Туэ. Эта связь в большей степени продиктована использованием бесконечных слов для описания бесконечных геодезических кривых на поверхности отрицательной кривизны. Так, бесконечное слово x , определённое выше и введённое Туэ для изучения комбинаторных свойств слов, было вновь открыто М. Морсом² в связи с дифференциальной геометрией. Сейчас x известно как *слово Туэ-Морса* и, несмотря на простоту задания, оно обладает множеством интересных свойств и находит применение в теории чисел, комбинаторике и дифференциальной геометрии.

Приведём основные определения. *Алфавитом* будем называть непустое конечное множество элементов (символов или букв) и обозначать символом \mathbb{A} . Пусть n — натуральное число. Конечную последовательность $u = u_0u_1u_2 \dots u_{n-1}$ символов алфавита \mathbb{A} назовём *словом*. *Длину* конечного слова u , то есть количество символов в нём, обозначим через $|u|$. *Бесконечным словом* над алфавитом \mathbb{A} называется бесконечная вправо последовательность

¹ Thue A. Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen // Skr. Vid.-Kristiana I. Mat. Naturv. Klasse. 1912. T. 1. C. 1–67.

² Morse M. Recurrent Geodesics on a Surface of Negative Curvature // Transactions of the American Mathematical Society. 1921. Vol. 22, no. 1. Pp. 84–100.

$x = x_0x_1x_2\cdots$ символов алфавита \mathbb{A} . *Конкатенацией* конечного слова u и слова v (конечного или бесконечного) называется слово $uv = x = x_0x_1x_2\cdots$ такое, что $x_i = u_i$ для $0 \leq i < |u|$ и $x_i = v_{i-|u|}$ для $i \geq |u|$. Через ε обозначим *пустое слово*, являющееся единственным словом длины 0 и определённое следующим равенством: $u\varepsilon = \varepsilon u = u$ для любого слова u . Множество всех конечных слов над алфавитом \mathbb{A} обозначается через \mathbb{A}^* . Слово v называется *подсловом* или *фактором* слова u , если существуют слова x и y такие, что $u = xvy$. Если при этом $x = \varepsilon$ ($y = \varepsilon$), то v называется *префиксом* (*суффиксом*) слова u .

Конечное слово u называется *периодическим*, если существует такое положительное число t , что $u_i = u_{i+t}$ для любого $i = 0, 1, 2, \dots, |u| - t - 1$. Число t называется *периодом* слова u . Слово u является *степенью* некоторого слова v , если для некоторого натурального n его можно представить в виде конкатенации n копий слова v . В таком случае слово u можно записать как $u = v^n$, и оно периодично с периодом $|v|$. Отметим, что период $|v|$ не обязательно является минимальным. В случае, если слово u бесконечно и представимо в виде $u = vvv\cdots$ для некоторого конечного слова v , его можно записать как $u = v^\omega$. Такое слово u называется *периодическим*. Слово u является *со временем периодическим*, если его можно представить в виде $u = xv^\omega$ для конечных слов x и v , в противном случае u — *апериодическое*.

Арифметической подпоследовательностью (арифметическим фактором или подсловом) длины k с начальным индексом c и разностью d в бесконечном слове $u = u_0u_1u_2\cdots$ называется последовательность $u_cu_{c+d}u_{c+2d}\cdots u_{c+(k-1)d}$. В случае, когда все символы в этом слове одинаковы, будем говорить, что она *однородная*. Мы также будем называть однородные подпоследовательности арифметическими *прогрессиями*.

Исследование арифметических свойств бесконечных слов над конечным алфавитом восходит к классическим работам Б. Л. Ван дер Вардена³ и Э. Семереди⁴ о монохромных арифметических прогрессиях в множестве натуральных чисел. В частности, в этих работах утверждается, что ограничить константой длину однородной арифметической подпоследовательности в произвольном бесконечном слове над конечным алфавитом невозможно. Эффективной верхней оценки на величину отрезка бесконечного слова над алфавитом фиксированной мощности, содержащего арифметическую прогрессию заданной длины (число Ван дер Вардена), не получено; задача улучшения существующих оценок интересует ученых из различных областей математики.

³ Van der Waerden B. L. Beweis einer Baudetschen Vermutung // Nieuw Arch. Wisk. 1927. Т. 15. С. 212—216.

⁴ Szemerédi E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression // Acta Arith. 1975. Vol. 27. Pp. 199–245. Collection of articles in memory of Ju. V. Linnik.

Интересен также вопрос, какими свойствами должно обладать бесконечное слово, чтобы содержать бесконечную арифметическую прогрессию. Задача классификации таких слов носит не только теоретический характер, но и имеет приложения в моделировании динамических систем, затрагивает символическую динамику, эргодическую теорию и теорию автоматных последовательностей. Помимо однородных случаев нас интересует структура арифметических факторов в выделенных классах слов в целом.

Одной из важнейших характеристик слова является его комбинаторная сложность. Функция $p_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется *комбинаторной сложностью* бесконечного слова x , если для каждого $n \in \mathbb{N}$ величина $p_x(n)$ равна количеству различных подслов длины n в x . Данная функция была впервые представлена в работе Хедлунда и Морса 1938 года⁵. Эта функция является важным показателем «случайности» слова. Так, периодические слова имеют ограниченную комбинаторную сложность, в то время как слова, являющиеся q -значными ($q \in \mathbb{N}$) разложениями нормальных чисел имеют максимально возможную комбинаторную сложность. Теорема Морса и Хедлунда утверждает, что каждое апериодическое слово содержит не менее $n + 1$ различных подслов каждой длины n . Апериодические слова, имеющие минимальную комбинаторную сложность, называются словами Штурма.

С момента введения комбинаторной сложности, был определён ряд других сложностных мер, оказавшихся полезными в изучении бесконечных слов и их комбинаторных свойств. Это множество включает абелеву сложность⁶, палиндромную сложность⁷, циклическую сложность⁸, групповую сложность⁹, максимальную шаблонную сложность¹⁰ и другие. В рамках работы над данной диссертацией введены новые сложностные функции слова, а именно, закрытая и открытая сложности (глава 2).

Результаты первой главы тесно связаны с арифметической сложностью, введённой в 2000 году С. В. Августиновичем, Д. Г. Фон-дер-Флаассом

⁵Morse M., Hedlund G. Symbolic dynamics // Amer. J. Math. 1938. Vol. 60. Pp. 815–866.

⁶Palindrome complexity / J.-P. Allouche [et al.] // Theoret. Comput. Sci. 2003. Vol. 292. Pp. 9–31. Selected papers in honor of Jean Berstel; Cyclic complexity of words / J. Cassaigne [et al.] // J. Combin. Theory Ser. A. 2017. Vol. 145. Pp. 36–56; Charlier E., Puzynina S., Zamboni L. Q. On a group theoretic generalization of the Morse-Hedlund theorem // Proceedings of the AMS. Vol. 145. 2017. Pp. 3381–3394; Coven E. M., Hedlund G. A. Sequences with minimal block growth // Math. Systems Theory. 1973. Vol. 7. Pp. 138–153; Peltomäki J. Introducing privileged words: privileged complexity of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. 2013. Vol. 500. Pp. 57–67; Richomme G., Saari K., Zamboni L. Q. Abelian complexity of minimal subshifts // J. Lond. Math. Soc. 2011. Vol. 83, no. 2. Pp. 79–95.

⁷Palindrome complexity / J.-P. Allouche [et al.] // Theoret. Comput. Sci. 2003. Vol. 292. Pp. 9–31. Selected papers in honor of Jean Berstel.

⁸Cyclic complexity of words / J. Cassaigne [et al.] // J. Combin. Theory Ser. A. 2017. Vol. 145. Pp. 36–56.

⁹Charlier E., Puzynina S., Zamboni L. Q. On a group theoretic generalization of the Morse-Hedlund theorem // Proceedings of the AMS. Vol. 145. 2017. Pp. 3381–3394.

¹⁰Kamae T., Zamboni L. Q. Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2002. Vol. 22. Pp. 1191–1199.

и А. Э. Фрид¹¹. Функция арифметической сложности для каждого фиксированного n определяет количество различных арифметических подслов длины n в данном слове. Отметим, что множество арифметических подслов заданного слова с разностью 1 есть не что иное, как множество его факторов, из чего следует, что функция арифметической сложности не может расти медленней, чем функция комбинаторной сложности. Но помимо этого очевидного наблюдения, других связей между скоростями роста этих функций нет. К примеру, существуют бесконечные слова с линейной комбинаторной сложностью, но чья арифметическая сложность может расти как линейно, так и экспоненциально¹². Слова, арифметическая сложность которых максимальна, называются арифметически универсальными. Хорошо известным примером такого слова является последовательность Туэ-Морса, определённая выше. Исследованию арифметических свойств слова Туэ-Морса и его обобщения для алфавита простой мощности посвящена глава 1. Получена точная верхняя оценка на длины арифметических прогрессий в данном слове.

Помимо арифметических прогрессий и их распределения в бесконечных словах, нас интересуют периодические арифметические подпоследовательности с периодом большим, чем единица. В случае бинарного алфавита такие под слова имеют вид $(01)^\mathbb{N}$. Существует гипотеза, что слова с периодом два имеют наибольшую минимальную разность вхождения в слово Туэ-Морса как арифметические под слова.

Для того, чтобы проверить данную гипотезу, было решено ввести понятие арифметического индекса. Пусть дано натуральное число q и бесконечное слово x над алфавитом $\mathbb{A}_q = \{0, 1, 2, \dots, q - 1\}$. Для каждого конечного слова u из множества арифметических подпоследовательностей x мы стремимся определить наименьшее число d такое, что u является арифметическим под словом x с разностью d . *Арифметическим индексом* слова u в x назовём длину q -ичного представления разности d . В главе 1 получены верхняя и нижняя оценки на функцию арифметического индекса для обобщённого слова Туэ-Морса над алфавитом простой мощности.

В главе 2 введены и изучены две новых сложностных функции, основанные на определениях открытых и закрытых слов. Слово $u \in \mathbb{A}^+$ называется *закрытым*, если является буквой алфавита \mathbb{A} , пустым словом или полным первым возвратом к некоторому своему собственному под слову $v \in \mathbb{A}^+$. Иными словами, u — закрытое слово, если оно имеет в точности два вхождения v , одно в качестве префикса и второе в качестве суффикса. В данном случае v

¹¹ Avgustinovich S. V., Fon-der-Flaass D. G., Frid A. E. Arithmetical complexity of infinite words // Words, Languages and Combinatorics III. Singapore : World Scientific, 2003. Pp. 51–62.

¹² Avgustinovich S. V., Fon-der-Flaass D. G., Frid A. E. Arithmetical complexity of infinite words // Words, Languages and Combinatorics III. Singapore : World Scientific, 2003. Pp. 51–62.

называется рамкой слова u . Если u не является закрытым, будем называть его *открытым*. Таким образом, слово $u \in \mathbb{A}^+ \setminus \mathbb{A}$ закрыто тогда и только тогда, когда оно имеет рамку, и если его максимальная по длине рамка входит в u только как префикс и как суффикс. Максимальная по длине рамка закрытого слова называется *фронтиром*. Например, слово *aabaabaa* закрыто с фронтиром *aaba*. Слово *ab* не имеет рамки, а значит, открыто; слово *abaabbababbaaba* открыто, так как его максимальная по длине рамка *aba* имеет три вхождения в u . Открытые и закрытые слова были впервые представлены в работе 2013 года¹³, хотя понятие закрытого слова было известно из статьи А. Карпи и А. де Лука¹⁴. Обзор результатов по теме открытых и закрытых слов можно найти в статье Г. Фичи¹⁵.

Пусть дано бесконечное слово $x \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$, рассмотрим функции $f_x^c, f_x^o : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, подсчитывающие (соответственно) количество закрытых и открытых подслов длины $n \in \mathbb{N}$ в x . В главе 2 мы исследуем поведение функции f_x^c , где x — слово Арну-Рози. Слова Арну-Рози были впервые представлены в 1991 году для алфавита из трёх символов¹⁶. Эти слова являются естественным обобщением слов Штурма для алфавита, состоящего из более двух символов. Если $x \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ — слово Арну-Рози, то его комбинаторная сложность равна $p_x(n) = (|\mathbb{A}| - 1)n + 1$ для каждого натурального n . Более того, каждый фактор u слова x имеет в точности $|\mathbb{A}|$ различных первых возвратов в x .

В главе 2 получена точная формула для функции, подсчитывающей количество закрытых факторов заданной длины в словах Арну-Рози. В связи с равенством $f_x^c(n) + f_x^o(n) = p_x(n)$, эта формула позволяет вычислить количество закрытых факторов заданной длины в данных словах.

Помимо бесконечных слов, в диссертации исследуются циркулянтные графы и их совершенные раскраски. Раскраской вершина графа $G = (V, E)$ в k цветов называется отображение $\phi : V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$. Раскраску вершин графа называют совершенной, если все его одинаково окрашенные вершины имеют одинаковый цветовой состав окружения.

Пусть дан набор натуральных чисел $I = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$, упорядоченных по возрастанию. *Бесконечным циркулянтным графом* с набором дистанций I назовём граф $Ci_{\infty}(I)$, множество вершин которого совпадает с мно-

¹³Bucci M., De Luca A., Fici G. Enumeration and Structure of Trapezoidal Words // Theoret. Comput. Sci. 2013. Vol. 468. Pp. 12–22.

¹⁴Carpi A., De Luca A. Periodic-like words, periodicity and boxes // Acta. Inform. 2001. Vol. 37. Pp. 597–618.

¹⁵Fici G. Open and closed words // Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS. 2017. Vol. 123. Pp. 138–147.

¹⁶Arnoux P., Rauzy G. Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$ // Bull. Soc. Math. France. 1991. Т. 119, № 2. С. 199–215.

жеством целых чисел, а рёбрами соединены те вершины $i, j \in \mathbb{Z}$, для которых выполнено $|i - j| \in I$.

Любой бесконечный циркулянт с вершинами, раскрашенными цветами из конечного множества цветов \mathbb{A} можно рассматривать как слово над алфавитом \mathbb{A} . Набор параметров совершенной раскраски накладывает определённые условия на множество соответствующих ему раскрасок. А именно, он определяет множество конфигураций, неизбежно встречающихся в раскрасках, соответствующих данным параметрам. В терминах комбинаторики слов задачи перечисления совершенных раскрасок бесконечных циркулянтных графов можно сформулировать, используя понятие частичного слова. Частичное слово — это обычное слово, в котором часть букв по каким-то причинам отсутствует. Для обозначения отсутствующих символов добавим к алфавиту \mathbb{A} символ \diamond . Частичное слово длины n — это отображение из множества $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ на расширенный алфавит $\mathbb{A} \cup \{\diamond\}$. Изучение комбинаторных свойств частичных слов в явном виде началось в 1999 году¹⁷; с тех пор получено множество результатов, посвященных обобщению уже известных свойств слов.

В данных терминах задача описания совершенных раскрасок может быть сформулирована следующим образом: Дано множество частичных слов S над алфавитом $\mathbb{A} \cup \{\diamond\}$. Перечислить все бесконечные слова, содержащие в своём языке под слова из S .

В главе 3 рассматриваются совершенные раскраски бесконечных циркулянтов с множествами дистанций $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ и $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$ для натурального n . Получено полное описание совершенных раскрасок таких графов в 2 цвета. Также сформулированы гипотезы о характеризации совершенных раскрасок таких графов в произвольное число цветов. В соавторстве с М. А. Лисицыной¹⁸ получен результат, подтверждающий гипотезу о совершенных раскрасках бесконечного циркулянтного графа с набором дистанций $\{1, 2\}$. Для $n > 2$ задача еще не решена.

Граф бесконечной n -мерной прямоугольной решётки допускает естественный гомоморфизм на любой циркулянтный граф с n дистанциями¹⁹. Поэтому разнообразие параметров совершенных раскрасок (как и самих раскрасок) в решётке гораздо богаче, чем в циркулянтных графах.

¹⁷ Berstel J., Boasson L. Partial words and a theorem of Fine and Wilf // Theor. Comp. Sci. 1999. Vol. 218. Pp. 135–141.

¹⁸ Лисицына М. А., Паршина О. Г. Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2017. Т. 24, № 3. С. 5–19.

¹⁹ Axenovich M. A. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. Vol. 268, no. 1–3. Pp. 31–48.

Совершенные раскраски бесконечной квадратной решётки изучались ранее. Допустимые матрицы третьего порядка графа $G(\mathbb{Z}^2)$ были перечислены С. А. Пузыниной²⁰. Совершенные раскраски $G(\mathbb{Z}^2)$ вплоть до 9 цветов описаны Д. С. Кротовым²¹. Совершенная раскраска называется дистанционно регулярной, если её матрица параметров приводима к трёхдиагональному виду. Это означает, что цвета в раскраске можно упорядочить так, что каждый из них кроме себя будет видеть лишь два соседних цвета, при этом каждый из крайних цветов образует полностью регулярный код. Параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решётки перечислены С. В. Августиновичем, А. Ю. Васильевой и И. В. Сергеевой²². Изучались совершенные раскраски треугольной и гексагональной бесконечных решёток. С. А. Пузынина доказала периодизуемость совершенных раскрасок таких решёток²³. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной треугольной решётки были перечислены А. Ю. Васильевой²⁴, гексагональной — С. В. Августиновичем, Д. С. Кротовым и А. Ю. Васильевой²⁵.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, $M = (m_{ij})$ — квадратная матрица порядка n , $r \geq 1$. Раскраска графа G называется совершенной радиуса r с матрицей параметров M , если m_{ij} — это количество вершин цвета j на расстоянии не более r от вершины цвета i . М. Аксенович²⁶ перечислила все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиусов 1 в 2 цвета для графа бесконечной прямоугольной решётки $G(\mathbb{Z}^2)$ и нашла некоторые необходимые условия для допустимости матрицы параметров в случае $r \geq 2$. Параметры и свойства совершенных раскрасок $G(\mathbb{Z}^2)$ в своей кандидатской диссертации изучала С. А. Пузынина²⁷. В своих работах она показала, что все совершенные раскраски радиуса $r > 1$ бесконечной прямоугольной решётки являются периодическими, а также доказала их периодизуемость в случае $r = 1$.

²⁰Пузынина С. А. Совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решетки : дис. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.09. Новосибирск, 2008. 79 с.

²¹Krotov D. S. Perfect colorings of Z^2 : Nine colors. 2009. E-print 0901.0004 arXiv.org, Available at <http://arxiv.org/abs/0901.0004>.

²²Августинович С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решётки // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2011. Т. 18, № 3. С. 3–10.

²³Puzynina S. A. On periodicity of perfect colorings of the infinite hexagonal and triangular grids // Sib Math. J. 2011. Vol. 52, no. 1. Pp. 91–104.

²⁴Vasil'eva A. Y. Distance regular colorings of the infinite triangular grid // Collection of Abstracts of the International Conference “Mal’tsev Meeting”. 2014. P. 98.

²⁵Avgustinovich S. V., Krotov D. S., Vasileva A. Y. Completely regular codes in the infinite hexagonal grid // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2016. Vol. 13. Pp. 987–1016.

²⁶Axenovich M. A. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. Vol. 268, no. 1–3. Pp. 31–48.

²⁷Пузынина С. А. Совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решётки : дис. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.09. Новосибирск, 2008. 79 с.

Ряд результатов для совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов получен Д. Б. Хорошиловой²⁸. Перечислим некоторые результаты, посвящённые совершенным раскраскам графов, схожим по строению с циркулянтными и с графиками бесконечных решёток.

Изучением совершенных 2-раскрасок n -мерного булева куба занимался Д. Г. Фон-Дер-Флаасс. Он получил первые необходимые условия на параметры возможных совершенных 2-раскрасок этого графа и построил рекурсивную конструкцию, дающую бесконечную серию таких раскрасок²⁹. Позднее им была получена граница корреляционной иммунности³⁰, позволяющая получить необходимое условие существования совершенных раскрасок гиперкуба. Впоследствии Фон-Дер-Флаасс изучал раскраски, достигающие этой границы в 12-мерном кубе³¹. Ещё одна конструкция, позволяющая построить множество различных совершенных 2-раскрасок по матрицам параметров, была предложена в совместной работе Д. Г. Фон-Дер-Флаасса и К. В. Воробьёва³². Заметим, что на сегодняшний день полного описания всех матриц совершенных раскрасок гиперкуба не получено даже для случая двух цветов.

Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов с не более чем 18 вершинами охарактеризованы С. В. Августиновичем и М. А. Лисицыной. Они рассмотрели бесконечные семейства графов призмы, лестницы Мёбиуса, скрещенной призмы, хордальных циклов, обобщённых графов Петерсена, усечённых графов³³. Те же авторы описали все совершенные раскраски в любое конечное число цветов графа бесконечной призмы, являющимся прямым произведением бесконечной цепи на ребро³⁴.

Результаты, полученные в главе 3, посвящены совершенным раскраскам в два цвета. В рамках этого случая представляется возможным разработать инструменты для изучения совершенных раскрасок в большее число цветов, не перегружая исследования перебором большого числа параметров.

²⁸Хорошилова Д. Б. О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 80–92; Хорошилова Д. Б. О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 6. С. 82–89.

²⁹Фон-Дер-Флаасс Д. Г. Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 923–930.

³⁰Fon-Der-Flaass D. G. A bound on correlation immunity // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2007. Vol. 4. Pp. 133–135.

³¹Фон-Дер-Флаасс Д. Г. Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 292–295.

³²Воробьёв К. В., Фон-Дер-Флаасс Д. Г. О совершенных 2-раскрасках гиперкуба // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 65–75.

³³Августинович С. В., Лисицына М. А. Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 2. С. 3–17. (Перевод: Avgustinovich S. V., Lisitsyna M. A. Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — V.5, № 4. — Pp. 519–528.)

³⁴Лисицына М. А., Августинович С. Совершенные раскраски призмы // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1116–1128.

В главе 4 рассматривается проблема минимального носителя в координатно транзитивных линейных пространствах. Мы ограничиваемся наиболее простым случаем, когда транзитивность задана циклической группой. Исследования показали, что данная проблема связана с существованием тайлингов в циклической группе.

Хорошо известно³⁵, что проблема определения размера минимального носителя ненулевых векторов произвольного линейного пространства (над $GF(2)$, над \mathbb{Z} или над \mathbb{R} в равной степени) является NP -трудной. В некотором смысле эта задача эквивалентна определению кодового расстояния линейного кода, заданного своей порождающей матрицей. Кроме прочего, является естественным желание задать базис линейного пространства максимально компактным образом. Во многих значимых случаях упомянутое пространство априорно имеет богатую группу автоморфизмов. Скажем, собственные пространства транзитивных графов именно таковы. Таким образом задача поиска векторов с минимально возможным носителем в транзитивных линейных пространствах представляется актуальной. Забегая вперёд скажем, что сложностной статус этой проблемы нам неизвестен, хотя и кажется, что она может иметь отношение к проблеме изоморфизма графов Кэли.

Целью данной работы является изучение периодических структур в бесконечной аддитивной группе.

Задачи:

- Получить оценки на длины периодических арифметических подпоследовательностей в морфических словах;
- Исследовать распределение закрытых и открытых слов в словах Арну-Рози;
- Перечислить совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов.

Научная новизна и значимость. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы при дальнейшем исследовании совершенных раскрасок и в комбинаторике слов.

Методы исследования. В работе используются методы классической комбинаторики, комбинаторики слов, линейной алгебры.

³⁵ Vardy A. Algorithmic Complexity in Coding Theory and the Minimum Distance Problem // Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. El Paso, Texas, USA : ACM, 1997. Pp. 92–109. (STOC '97); Berlekamp E. R., McEliece R. J., Van Tilborg H. C. A. On the inherent intractability of certain coding problems // IEEE Trans. Inform. Theory. 1978. No. 24. Pp. 384–386.

Основные результаты диссертации:

1. Получена точная верхняя оценка длины однородных арифметических подпоследовательностей в обобщённом слове Туэ-Морса над алфавитом простой мощности.
2. Получены верхняя и нижняя оценки на величину арифметического индекса в обобщённом слове Туэ-Морса над алфавитом простой мощности.
3. Получена точная формула для функции закрытой (и как следствие, открытой) сложности в словах Арну-Рози.
4. Приведено полное описание совершенных раскрасок в два цвета бесконечных циркулянтных графов с набором дистанций $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$.
5. Выведен критерий минимальности носителя векторов для координатно транзитивных пространств, порождённых вектором веса два, и получена достижимая нижняя оценка на отношение размера носителя вектора к размерности линейного пространства.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 8 — в тезисах докладов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: Международной конференции «Mons Theoretical Computer Science Days» (Таланс, Франция, 2018), международной конференции и летней школе «G2R2 — Graphs and Groups, Representations and Relations» (2018, г. Новосибирск, Россия), международном семинаре «Workshop on Words and Complexity» (2018, г. Вийёрбан, Франция), международной конференции «WORDS» (2017, г. Монреаль, Канада, 2015, г. Киль, Германия), международной школе и конференции «CANT — Combinatorics, Automata and Number Theory» (2016, г. Марсель, Франция), международной школе и конференции для молодых учёных «Современные проблемы математики и её приложений» (2016, г. Екатеринбург, Россия), международной конференции и летней школе «G2A2 — Group and Graphs, Algorithms and Automata» (2015, г. Екатеринбург, Россия), международной конференции-семинаре «Workshop on Automatic Sequences» (2015, г. Льеж, Бельгия), Мальцевских чтениях (2012, г. Новосибирск, Россия), семинаре «Квазигруппы и смежные вопросы» (2018, 2017, г. Новосибирск, Россия), семинаре «Теория кодирования» (2018, 2015, 2013, г. Новосибирск, Россия), семинаре «Combinatorics and Number theory» (2017, г. Вийёрбан, Франция).

Личный вклад соискателя. Работа [3] написана в соавторстве с С. В. Августиновичем, которому принадлежит постановка задачи. Соискате-

лю принадлежат доказательства основных результатов. Работа над [12] произведена в соавторстве с М. А. Лисицыной. Вклад соискателя в получение результатов является определяющим. Работа [13] написана в неразделимом соавторстве с Л. Замбони.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 68 страниц с 9 рисунками и 4 таблицами. Список литературы включает в себя 67 наименований, в том числе 13 работ автора по теме диссертации.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель работы.

Первая глава посвящена исследованию арифметических подпоследовательностей в обобщённом слове Туэ-Морса $x_{(q)}$ над алфавитом \mathbb{A}_q простой мощности. Рассматриваются значения функции $\max_{d < q^n} L_{x_{(q)}}(d)$, которая заданному натуральному n сопоставляет максимальную длину арифметической прогрессии, полученной с разностью d из отрезка $[1, q^n]$.

Теорема 1. *Пусть q — простое число, и $x_{(q)}$ — обобщённое слово Туэ-Морса над алфавитом \mathbb{A}_q . Для любого натурального числа $n \geq 1$ имеет место следующая формула:*

$$\max_{d < q^n} L_{x_{(q)}}(d) = \begin{cases} q^n + 2q, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{q}, \\ q^n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Более того, максимум данной функции достигается на разности $d = q^n - 1$ в обоих случаях.

Помимо однородных арифметических подпоследовательностей нас интересует распределение остальных арифметических факторов в бесконечных словах. Пусть x — произвольное бесконечное слово над алфавитом \mathbb{A} . Для каждого натурального числа d определим множество $A_x(d) = \{x_c x_{c+d} x_{c+2d} \cdots x_{c+(k-1)d} \mid c, k \in \mathbb{N}\}$, содержащее все арифметические подпоследовательности слова x с разностью d .

Арифметическое замыкание слова x — это множество $A_x = \bigcup_{d=1}^{\infty} A_x(d)$, состоящее из его арифметических факторов. Через $a_x(n) = |A_x \cap \mathbb{A}^n|$ обозначим функцию *арифметической сложности* слова x . Для данных бесконеч-

ногого слова x и конечного слова $u \in A_x$ нас интересует наименьшее положительное число d такое, что u принадлежит $A_x(d)$. Обозначим длину q -ичной записи d через $i_x(u)$ и назовём это число *арифметическим индексом* u в x . Для каждого натурального n рассмотрим функцию $I_x(n) = \max_{u \in A_x \cap \mathbb{A}^n} i_x(u)$.

В данной главе получены верхняя и нижняя оценки на величину арифметического индекса $I_{x(q)}(m)$, $m \in \mathbb{N}$ в слове $x_{(q)}$:

$$\lceil C(m - \log_q(m)) \rceil < I_{x(q)}(m) \leq (2\lceil \log_q(m) \rceil + q)(q - 1)m,$$

где C — положительная константа.

Результаты главы 1 опубликованы в [2; 4; 9; 10].

Во второй главе рассматриваются две новые сложностные функции для слов, основанные на понятиях закрытых и открытых слов. Исследуется функция $f_x^c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, которая каждому натуральному n сопоставляет количество закрытых подслов длины n в слове w . Получена точная формула для f_x^c в случае, когда w — слово Арну-Рози. Как следствие, доказывается, что $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_x^c(n) = +\infty$.

Теорема 2. Пусть $x \in \mathbb{A}_q^{\mathbb{N}}$ — слово Арну-Рози. Для каждого $k \in \omega$ и $a \in \mathbb{A}_q$ определим интервал $I_{k,a} = [b_k - 2p_k + p_a^{(k)} + 2, b_k + p_a^{(k)}]$, где $p_k = \min_{b \in \mathbb{A}_q} \{p_b^{(k)}\}$.

Пусть

$$F(a,n) = \sum_{\substack{k \in \omega \\ n \in I_{k,a}}} (d(n, I_{k,a}) + 1),$$

где для $n \in I_{k,a}$ число $d(n, I_{k,a})$ обозначает минимальное расстояние между n и концами интервала $I_{k,a}$. Тогда множество закрытых подслов x длины n выражается следующим выражением: $f_x^c(n) = \sum_{a \in \mathbb{A}} F(a,n)$.

Результаты главы 2 опубликованы в [5; 13].

Третья глава посвящена совершенным 2-раскраскам бесконечных циркулянтных графов $Ci_{\infty}(1,2,3, \dots, n)$ и $Ci_{\infty}(1,3,5, \dots, 2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Перечислены все совершенные раскраски в два цвета данных графов, сформулированы гипотезы, обобщающие полученные результаты для произвольного числа цветов.

Теорема 3. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим граф $Ci_{\infty}(I_{cn})$, где $I_{cn} = \{1,2,3, \dots, n\}$. Множество его совершенных 2-раскрасок состоит из раскрасок, порождённых совершенными 2-раскрасками бесконечной цепи и графов $Ci_t(I_{cn})$ для $t = 2n, 2n + 1, 2n + 2$.

Теорема 4. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим граф $Ci_\infty(I_{on})$, $I_{on} = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$. Множество его совершенных 2-раскрасок состоит из раскрасок, порождённых совершенными 2-раскрасками бесконечной цепи и графов $Ci_t(I_{on})$ для $t = 4n-2, 4n, 4n+2$.

Результаты главы 3 опубликованы в [1; 6; 7; 8; 11; 12].

В **четвёртой главе** обсуждается проблема минимальности носителя некоторых транзитивных линейных пространств. Вопрос о минимальном носителе однопорождённых координатно транзитивных пространств разрешён для пространств, порождённых вектором веса два. В случае порождающего вектора веса три приводятся гипотезы, подтверждающиеся компьютерными экспериментами. Получена достижимая нижняя оценка на размер носителя по отношению к размерности линейного пространства. Рассмотрим транзитивную группу подстановок G , регулярно действующую на множестве $M = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Для произвольного вектора v из E^n определим линейное замыкание $L_G(v)$ как линейную оболочку вектора v и всех его образов (эти образы мы будем называть сдвигами вектора v) под действием элементов группы G . Обозначим через $P_G(v)$ минимальный вес векторов из $L_G(v)$.

Теорема 5. Пусть G — циклическая группа порядка $n = 2^k \cdot q$, где q нечётно. Рассмотрим однородный вектор v веса 2 такой, что $v_0 = v_a = 1$. Тогда

$$P_G(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2^k | a, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 6. Пусть n кратно трём. Однородный вектор веса три имеет полный ранг над группой Z_n тогда и только тогда, когда он не является представительным.

Предложение 1. Пусть L — произвольное координатно транзитивное линейное подпространство размерности k в E^n . Тогда минимальный размер $P(L)$ нетривиального носителя векторов из L удовлетворяет неравенству:

$$P(L) \geq \frac{n}{k}. \quad (1)$$

Заметим, при таком подходе равенство в 1 достигается лишь тогда, если носители всех выбранных векторов не пересекаются между собой. Это в свою очередь возможно, если L порождено вектором, носитель которого соответствует некоторому однородному орбитному вектору.

Результаты главы 4 опубликованы в [3].

В заключении приведены основные результаты работы.

Благодарности. Автор выражает благодарность своим научным руководителям Сергею Владимировичу Августиновичу и Луке Замбони за неоценимую помощь во время работы над диссертацией, интересные постановки задач, плодотворное сотрудничество, интересные обсуждения и полученные знания. Автор благодарит М. А. Лисицыну за совместно проведённую работу. Автор признателен всем сотрудникам лаборатории алгебраической комбинаторики Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, а также членам исследовательской группы комбинаторики и теории чисел и аспирантам Института им. К. Жордана за всестороннюю помощь и творческую атмосферу. Также автор благодарит свою семью и друзей за их поддержку во время обучения в аспирантуре.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК

- [1] *Паршина О. Г.* Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискретн. анализ и исслед. операций. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 76–83. — (Перевод: Parshina O. G. Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances // J. Appl. Industr. Math. — 2014. — V. 8, № 3. — Pp. 357–361.)
- [2] *Parshina O. G.* On arithmetic progressions in the generalized Thue-Morse word // In: Manea F., Nowotka D. (eds) Combinatorics on Words. WORDS 2015. Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9304. — Pp. 191–196. — DOI: 10.1007/978-3-319-23660-5_16.
- [3] *Августинович, С. В., Паршина, О. Г.* Оценки размера носителя векторов в координатно-транзитивных линейных пространствах // Сиб. электрон. матем. изв. — 2015. — Т. 12. — С. 960–966. — DOI: 10.17377/semi.2015.12.082.
- [4] *Parshina O. G.* On arithmetic index in the generalized Thue-Morse word // In: Brlek S., Dolce F., Reutenauer C., Vandomme É. (eds) Combinatorics on Words. WORDS 2017. Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — Vol. 10432. — Pp. 121–131. — DOI: 10.1007/978-3-319-66396-8_12.
- [5] *Parshina O., Zamboni L. Q.* Open and closed factors in Arnoux-Rauzy words // Advances in Applied Mathematics. — 2019. — Vol. 107. — Pp. 22–31. — DOI: 10.1016/j.aam.2019.02.007.

Тезисы и материалы конференций

- [6] *Паршина, О.Г.* О совершенных 2-раскрасках некоторых циркулянтов // Материалы 50-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 13—19 апреля 2012). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. — С. 142.
- [7] *Паршина, О.Г.* Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтов графов со сплошным набором дистанций // Международная конференция МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ (12—16 ноября 2012) Тезисы докладов. — 2012. — С. 73.
- [8] *Паршина, О.Г.* Совершенные раскраски сплошных циркулянтов графов // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 12—18 апреля 2013). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2013. — С. 226.
- [9] *Паршина, О.Г.* О длинах арифметических прогрессий в слове Туэ-Морса // Материалы 52-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 11—18 апреля 2014). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. — С. 218.
- [10] *Паршина, О.Г.* Однородные арифметические прогрессии в слове Туэ-Морса // Материалы 53-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 11—17 апреля 2015). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2015. — С. 124.
- [11] *Parshina, O. G.* Perfect k -colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School «Groups and Graphs, Algorithms and Automata» (Ekaterinburg, Russia, August 09–15, 2015). — 2015. — P. 80.
- [12] *Parshina, O. G., Lisitsyna, M. A.* Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School «Groups and Graphs, Representations and relations» (Novosibirsk, Russia, August 06–19, 2018). — 2018. — P. 74.
- [13] *Parshina, O. G., Zamboni, L. Q.* Open and closed factors in Arnoux-Rauzy words // Abstracts of the conference «Mons Theoretical Computer Science Days» (Talence, France, September 10–14, 2018). — 2018. — Pp. 17–20.