Университет Лимерика, Ирландия

На правах рукописи

Коптева Наталья Викторовна

Апостериорные и априорные оценки конечноэлементных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений на анизотропных сетках

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Лимерик — 2019

Работа выполнена на кафедре математики и статистики Университета Лимерика, Ирландия.

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор **Андреев Владимир Борисович**,
профессор кафедры вычислительных методов
факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Вабищевич Петр Николаевич**,
заведующий лабораторией Института проблем
безопасного развития атомной энергетики
РАН (г. Москва)

доктор физико-математических наук,
профессор **Корнеев Вадим Глебович**,
профессор кафедры параллельных алгоритмов
Математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного
университета (г. Санкт-Петербург)

доктор физико-математических наук
Шишкин Григорий Иванович,
ведущий научный сотрудник отдела
уравнений математической физики Института
математики и механики им. Н.Н. Красовского
УрО РАН (г. Екатеринбург)

Ведущая организация: ФГБНУ Федеральный исследовательский
центр“Красноярский научный центр СО РАН”
(г. Красноярск)

Защита состоится “.......” октября 2019 года в 11:00 на заседании диссертационного совета Д.002.024.03 при Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская площадь, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и на сайте диссертационного совета `http://keldysh.ru/council/3/`

Автореферат разослан “.......” июля 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
к.ф.-м.н. Корнилина М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Большое число задач физики и техники приводит к так называемым сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям, т. е. уравнениям, содержащим малый параметр в виде множителя при старших производных. Структура решений для достаточно широких классов таких задач изучена с помощью асимптотических методов в работах А.Н. Тихонова, М.И. Вишика, Л.А. Люстерника, А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, А.М. Ильина, Н.Н. Нефедова и других авторов (в этих же публикациях приводится обширная библиография). Хорошо известно, что для их решений характерны пограничные и внутренние слои; последние суть узкие участки области, в которых решение чрезвычайно быстро меняется, а его производные не являются ограниченными равномерно по малому параметру.

Кратко поясним механизм возникновения, например, пограничных слоев. Формально полагая малый параметр, присутствующий в уравнении, $\varepsilon = 0$, получаем так называемое вырожденное уравнение, которое имеет более низкий, по сравнению с исходным сингулярно возмущенным уравнением, порядок. Поэтому для вырожденного уравнения требуется меньшее, чем для исходного уравнения, число граничных/начальных условий. С одной стороны, при $\varepsilon \to 0$ решение исходной задачи, как правило, сходится к решению вырожденной задачи во внутренних точках области. С другой стороны, оно должно также удовлетворять неиспользованным в вырожденной задаче граничным условиям. Последнее приводит к образованию в окрестности точек границы, где заданы эти условия, пограничных слоев. Внутренние же слои (см. Рис. 1) порождаются аналогичным образом, с той лишь разницей, что они описывают переход между двумя частными решениями вырожденной задачи.

Также хорошо известно, что точность классических численных методов, не учитывающих наличие в задаче малого параметра, может весьма существенно зависеть от значения данного параметра, поэтому для достижения хорошей точности приходится использовать сетки с весьма большим числом узлов, тем большим, чем меньшие значения принимает этот параметр (см. Рис. 1). В связи с этим для сингулярно возмущенных задач разрабатываются специальные, так называемые робастные методы, точность которых не зависит от значений малых параметров.

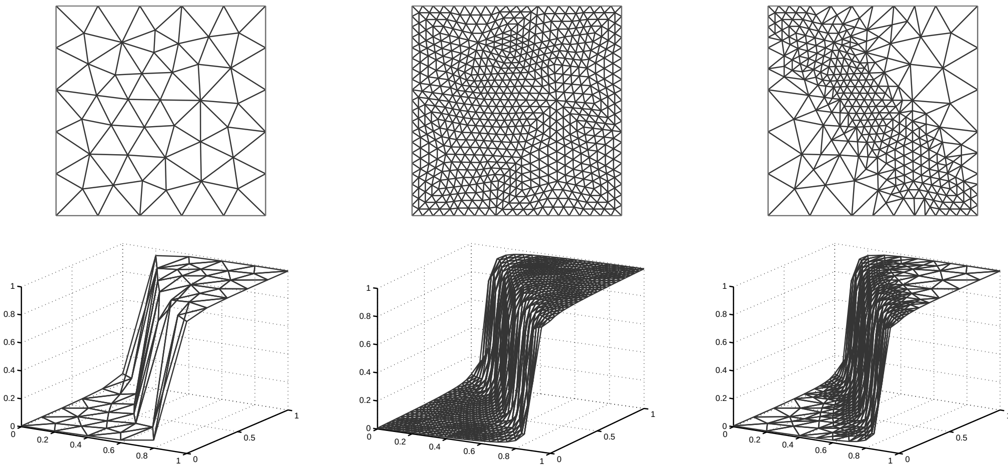

Рис. 1: *Решение с внутренним слоем: низкая точность внутри слоя на стандартной квазиравномерной сетке (слева); высокая точность во всей области на квазиравномерной сетке с весьма большим числом узлов (в центре); локально квазиравномерное сгущение сетки приводит к существенной экономии числа степеней свободы (справа).*

Впервые робастность специальной схемы на равномерной сетке была установлена А.М. Ильиным[1] для одномерного сингулярно возмущенного уравнения типа конвекции-диффузии. Подобные специальные схемы, получившие название методов подгонки, были рассмотрены в ряде работ; см. монографию Е. Дулана, Дж. Миллера, У. Шилдерса, работы Р.Б. Келлога и А. Цзань и цитируемую там литературу. Аналогичный подход в рамках метода конечных элементов основан на использовании в качестве базисных кусочно-экспоненциальных функций; см., например, см., например, работы М. Стайнза и Е. О'Риордана, а также более поздние работы В. Дерфлера. Отметим также работу Г.И. Шишкина[2], в которой было доказано, что не существует схемы типа подгонки для сингулярно возмущенного параболического уравнения, которая бы сходилась равномерно по малому параметру на равномерной сетке.

Принципиально иной подход к построению робастных численных методов для сингулярно возмущенных задач, заключающийся в использова-

[1]Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной// *Матем. заметки.* 1969. Т. 6. С. 237–248.

[2]Шишкин Г.И. Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим пограничным слоем// *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1989. Т. 29. С. 963–977.

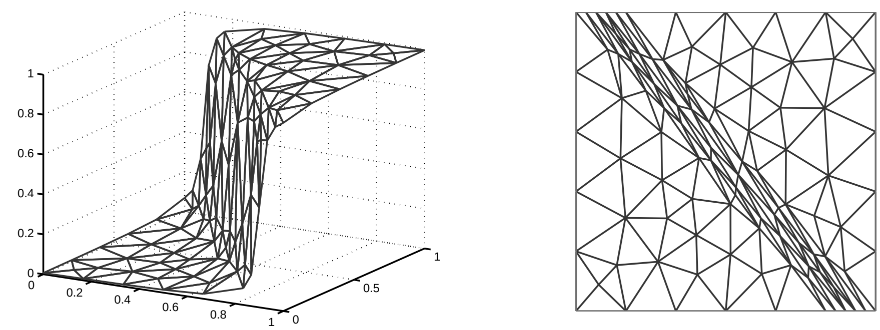

Рис. 2: *Решение с внутренним слоем (слева); сетка, анизотропным образом сгущающаяся в области внутреннего слоя (справа); при этом высокая точность во всей области достигается при числе узлов, независящем от малого параметра.*

нии локально сгущающихся сеток, был впервые теоретически обоснован Н. С. Бахваловым[3]. С точки зрения ошибки интерполяции, достаточно очевидно, что нет необходимости одинаково сгущать сетку во всей области, в то время как ее сгущение лишь в областях пограничных и внутренних слоев приводит к существенной экономии числа узлов сетки (см. Рис. 1, справа). Если же используются так называемые анизотропные сетки, элементы которых могут быть сколь угодно сильно сплющены, то высокая точность интерполяции во всей области может достигаться, даже если число узлов сетки не зависит от малого параметра (см. Рис. 2).

В то же время, хорошая точность интерполяции еще не гарантируют сходимость численных методов на соответсвующих сетках. Построению специальных, сгущающихся в областях пограничных и внутренних слоев, сеток и их теоретическому исследованию для сингулярно возммущенных обыкновенных дифференциальных уравнений посвящена обширная литература; см., например, работы В.Б. Андреева, И.А. Блатова, Р. Вулановича, Е.С. Гартланда, В.Д. Лисейкина и Н.Н. Яненко, а также монографию Т. Линса и цитируемую там литературу.

В контексте же сингулярно возмущенных уравнений в частных производных, построение специальных анизотропных сеток получило дальнейший импульс благодаря работам Г. И. Шишкина[4], предложившего исполь-

[3]Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя// *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1969. Т. 9. N 4. С. 841–859.

[4]Шишкин Г. И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболи-*

зовать специальные кусочно-равномерные сетки. Равномерные по малому параметру оценки ошибки решения на структурированных анизотропных сетках типа Бахвалова и Шишкина были установлены как самими этими авторами, так и в ряде последующих работ; см., например, подробный обзор литературы в монографии Х.-Г. Рооса, М. Стайнза и Л. Тобиски[5].

Таким образом, для ряда структурированных локально анизотропных сетоок было теоретически установлено, что они позволяют получать надежные численные решения при использовании относительно небольших чисел степеней свободы, независящих от значений малых параметров. Отметим также, что построение таких сеток требует предварительного асимтотического анализа исходной задачи. Чтобы этого избежать, аналогичные сетки могут генерироваться с помощью соответствующих адаптивных процедур. (В самом грубом варианте, например, градиенты численного решения могут использоваться при автоматической адаптации сетки.)

Заметим, что при теоретическом обосновании адаптивных алгоритмов генерации сеток, а также при выборе адаптационных критериев, как правило, используются так называемые апостериорные оценки ошибки численного решения. Последние суть теоретические оценки ошибки через само численное решение и локальные характеристики сетки, т. е. через величины, значения которых будут доступны в процессе численного решения задачи. Начало бурному развитию апостериорных оценок было положено новаторскими работами И. Бабушки и В. Рейнболта.

Что касается апостериорных оценок для сингулярно возмущенных задач, то к ним также предъявляется требование робастности, под которой в данном случае понимается то, что зависимость от малого параметра в таких оценках должна быть показана явно, при этом эффективность этих оценок не должна зависеть от малости данного параметра. Впервые робастные апострериорные оценки были получны Р. Ферфюртом[6] для сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии, а в дальнейшем были им обобщены для уравнений конвекции-диффузии. Важно учитывать, что данные апостериорные оценки были получены в предположе-

---

ческих уравнений. Екатеринбург: РАН, УрО, 1992.

[5] Roos, H.-G., Stynes, M., Tobiska, L. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations.* Berlin: Springer, 2008.

[6] Verfürth, R. Robust a posteriori error estimators for a singularly perturbed reaction-diffusion equation// *Numer. Math.* 1998. V. 78. Pp. 479–493.

нии о локальной квазировномерности сетки (см. Рис. 1, справа), а также в энергетических нормах.

С другой стороны, для таких уравнений норма максимума модуля представляется более подходящей, поскольку она является достаточно сильной (в отличие, например, от энергетической нормы) для того, чтобы обнаружить большую ошибку в зонах узких пограничных и внутренних слоев. Поэтому представляет большой интерес получение аналогичных робастных апостериорных оценок на локально квазиравномерных сетках, но в норме максимума модуля, что и сделано в §1 диссертации.

Заметим, что апостериорные оценки получили развитие в рамках метода конечных элементов. При этом, несмотря на наличие большого количества работ по этой тематике, как правило, сетки предполагаются локально квазиравномерными. Это обусловлено тем, что теоретический аппарат метода конечных элементов плохо обобщается на случай неструктурированных анизотропных сеток, и большинство как априорных, так и апостериорных оценок ошибки конечноэлементных решений неприменимы к случаю анизотропных сеткок.

На анизотропных же сетках апостериорные оценки были установлены в работах Г. Кунерта и Р. Ферфюрта[7]. Отметим, что последние оценки были получены, во-первых, в энергетических нормах, а во-вторых, в них присутствуют так называемые функции согласования (matching functions). Последние являются функциями ошибки численного решения и, в общем случае, могут принимать неограниченно большие значения на сильно анизотропных сетках (если только сетка не является правильно ориентированной по отношению к решению). Получение же робастных апостериорных оценок на анизотропных сетках, в которых функции согласования не присутствуют, ранее не рассматривалось. Этому вопросу и посвящены §2 и §3 диссертации, где указанные оценки получены, соотвественно, в норме максимума модуля и в энергетической норме.

Что касается апостериорных оценок для параболических уравнений в норме максимума модуля, то такие оценки были ранее получены главным образом для регулярных линейных задач; в случае же сингулярно возмущенных уравнений известные оценки не являются робастными, поскольку в них присутствуют нежелательные отрицательные степени малого пара-

[7] Kunert, G., Verfürth, R. Edge residuals dominate a posteriori error estimates for linear finite element methods on anisotropic triangular and tetrahedral meshes// *Numer. Math.* 2000. V. 86. Pp. 283–303.

метра. Получению робастных апостериорных оценок в норме максимума модуля для сингулярно возмущенных уравнений посвящены §§4–5 диссертации. При этом, наш подход применим к широкому классу временных дискретизаций, и в некоторых случаях приводит к новым результатам (или упрощает анализ) и для случая классических параболических уравнений.

Вернемся к обсуждению априорных оценок ошибки численных решений для случая анизотропных сеток. Как было отмечено выше, существует обширная литература по данной тематике, однако в большинстве случаев рассматриваются линейные уравнения. В случае же, например, полулинейных сингулярно возмущенных уравнений типа реакции-диффузии, как правило, предполагается их монотонность; см., например, работы И.А. Блатова и И.П. Боглаева. Под немонотонными полулинейными эллиптическими уравнениями будут пониматься уравнения, в которых нелинейность по неизвестной функции не является монотонной, поэтому такие уравнения могут иметь несколько решений. Уравнения данного типа часто возникают при моделировании биологических и химических процессов.

Отметим, что, в случае немонотонных сингулярно возмущенных уравнений стандартный технический аппарат, используемый при получении априорных оценок ошибки как для конечно-разностных, так и для конечноэлементных численных решений, неприменим. Поэтому при исследовании некоторых немонотонных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в работах К.М. Д'Аннунцио, М. Стайнза и Г. Сана был использован принципиально иной подход, основанный на построении дискретных верхних и нижних решений. Для случая же немонотонных уравнений в частных производных в некотором смысле аналогичный подход построения верхних и нижних решений, но при исследовании точности асимптотических разложений, был развит в работах Н.Н. Нефедова[8]. Объединению этих двух подходов с целью получения априорных оценок ошибки численных решений для немонотонных полулинейных эллиптических уравнений реакции-диффузии и посвящены §6 и §7.

При этом §6 посвящен случаю гладкой области, а §7 — существенно более сложному случаю выпуклой многоугольной области. В последнем

[8]Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравентсв для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями// *Дифференц. уравнения.* 1995. Т. 31. С. 1142–1149.

случае открытым вопросом является даже построение и исследование точности асимптотического разложения для исходной задачи. Отметим, что в случае прямоугольной области последний вопрос был рассмотрен В.Ф. Бутузовым для линейного уравнения реакции-диффузии. Полулинейное же уравнение в прямоугольной области рассматривалась в работах И.В. Денисова, но при весьма серьезных ограничениях на данные в угловых точках области. В §7 данная задача рассмотрена, во-первых, в более общей многоугольной области, а во-вторых, при достаточно простых и, в некотором смысле, необходимых предположениях о данных задачи в углах области. Также рассматриваются аспекты построения робастных по отношению к малому параметру численных методов для данной задачи.

Таким образом, несмотря на наличие большого количества работ в области численных методов для сингулярно возмущенных уравнений, некоторые важные вопросы остаются нерассмотренными. В частности, значительный интерес представляет развитие теоретического аппарата для получения робастных апостериорных оценок на анизотропных сетках. Также ранее не были получены робастные апостериорные оценки для сингулярно возмущенных параболических уравнений. Наконец, малоизученным является теоретическое обоснование точности численных методов для немонотонных сингулярно возмущенных уравнений, в особенности, в случае уравнений в частных производных.

Целью данной диссертации является теоретическое исследование конечноэлементных аппроксимаций некоторых полулинейных сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии. Поскольку для таких задач характерны решения с резкими пограничными и внутренними слоями, особое внимание уделено анализу анизотропных сеток и оценкам в норме максимума модуля. Автором установлен ряд новых апостериорных и априорных оценок.

Научная новизна. В диссертации представлены новые более сильные и точные оценки точности численных решений сингулярно возмущенных задач, ряд из которых усиливает известные оценки и в регулярном случае. Получение этих результатов оказалось возможным исключительно благодаря разработанному автором новому теоретическому аппарату получения апостериорных оценок на анизотропных сетках, а также развитию автором аппарата теоретического исследования сходимости численных методов для немонотонных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных.

Перечислим **научные результаты, выносимые на защиту**:

1. Для полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в полигональных областях установлены явные апостериорные оценки ошибки численного решения на основе невязок в норме максимума модуля на локально квазиравномерных сетках. Постоянные в полученных оценках не зависят от диаметров элементов сетки и малого параметра.

2. Для полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в многоугольных областях получены явные апостериорные оценки ошибки численного решения в норме максимума модуля на неструктурированных анизотропных сетках. Постоянные в полученных оценках не зависят от диаметров элементов сетки, их аспектного соотношения (т. е. степени их сплющенности) и малого параметра. Полученные апостериорные оценки являются новыми даже для уравнения Лапласа. Представленный подход обобщен для получения апостериорных оценок ошибки в энергетической норме.

3. Для полулинейных параболических уравнений второго порядка получены апостериорные оценки в норме максимума модуля для ошибки соответсвующих численных решений. Рассмотрены временные полудискретизации и полностью дискретные методы на основе неявного метода Эйлера, метода Кранка-Николсон и разрывного метода Галеркина dG(r) с квадратурой Радо.

4. Для немонотонных полулинейных сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в гладких областях исследованы численные решения на сгущающихся в пограничных слоях сетках типа Бахвалова и Шишкина. Доказано существование решений соответствующих нелинейных дискретных задач и установлен второй порядок сходимости (с логарифмическим множителем в случае сетки Шишкина) в сеточной норме максимума модуля равномерно по малому параметру ε при условии $\varepsilon \leqslant Ch$, при этом как число степеней свободы не превосходит Ch^{-2}.

5. Для немонотонного полулинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии в выпуклой многоугольной области построено асимптотическое разложение и установлено существование решения исходной задачи в окрестности построенного асимптотического

разложения.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретическую направленность. Установленные апостериорные оценки могут быть использованы в адаптивных алгоритмах построения как локально квазиравномерных, так и анизотропных сеток. Теоретический аппарат, предложенный для получения апостериорных оценок на анизотропных сетках, может получить дальнейшее развитие при исследовании более сложных сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии. Теоретический же аппарат получения априорных оценок численного решения нелинейных многомерных уравнений реакции-диффузии, представленный в главе 3, может быть использован при рассмотрении более сложных многомерных задач данного типа.

Личный вклад автора. Отметим, что вклад автора являлся определяющим при получении всех научных результатов, выносимых на защиту. Основные результаты, представленные в §2, §3 и §6, были получены и опубликованы автором без соавторов [13, 16, 2]. В остальных четырех параграфах представлены результаты, полученные совместно с А. Демловым [14], Р.Б. Келлоггом [5] и Т. Линсом [9, 11, 15] (последний был привлечен к данным исследованиям в рамках работы, под руководством автора, по гранту Science Foundation Ireland). Несколько менее значительные результаты работы были получены автором как без соавторов [3, 4, 12, 17], так и совместно с и ее учениками [7, 10, 6], а также с М. Стайнзом [1, 8]. Что касается совместных публикаций, то личный вклад автора диссертации заключался как в постановке рассмотренных задач, так и в получении ключевых результатов указанных работ.

Степень достоверности результатов исследований, изложенных в диссертации. Апробация. Достоверность результатов диссертации подтверждается следующим:

1. Все основные результаты диссертации сформулированы в виде теорем и доказаны с использованием строгих математических обоснований.

2. Основные результаты диссертации изложены в **17 публикациях** в журналах, включенных в системы цитирования **Web of Science** и **Scopus**, [1–17]. Таким образом, основные положения и их доказательства успешно прошли анонимное рецензирование, прежде чем они были опубликованы в международных рецензируемых журналах.

3. Результаты диссертации были представлены автором и получили

одобрение специалистов на ряде **международных конференций**, включая следующие:

— Second International Conference “Multiscale methods and Large-scale Scientific Computing”, Marchuk Institute of Numerical Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, 2018 (приглашенный доклад)

— International Conference BAIL 2018 “Boundary and Interior Layers”, Glasgow, Scotland, UK, 2018

— “Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations with Applications”, Banff International Research Station, Canada, 2018 (приглашенный доклад)

— 27th Biennial Conference on Numerical Analysis, Strathclyde University, UK, 2017

— International Conference “Contemporary Problems of Mathematical Physics and Computational Mathematics” dedicated to the 110th anniversary of academician A.N. Tikhonov, Moscow State University, Russia, 2016 (пленарный доклад)

— International Conference BAIL 2016 “Boundary and Interior Layers”, Beijing, China, 2016

— 2016 AARMS-CRM Workshop on “Numerical Analysis of Singularly Perturbed Differential Equations”, Halifax, Canada, 2016 (пленарный доклад)

— 6th Conference on “Numerical Analysis and Applications” NAA’16, Lozenetz, Bulgaria, 2016 (пленарный доклад)

— MAFELAP 2016 “The Mathematics of Finite Elements and Applications”, Brunel University, UK, 2016

— 13th Workshop on “Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena” dedicated to the 90th birthday of A.B. Vasil’eva, Moscow State University, Russia, 2016

— International Workshop “Adaptive Algorithms for Computational PDEs”, University of Birmingham, UK, 2016 (приглашенный доклад)

— 26th Biennial Conference on Numerical Analysis, Strathclyde University, UK, 2015

— International Conference BAIL 2014 “Boundary and Interior Layers”, Charles University in Prague, Czech Republic, 2014 (пленарный доклад)

— Sixth Conference “Finite Difference Methods: Theory and Applications”, Lozenetz, Bulgaria, 2014 (пленарный доклад)

— International Multidisciplinary Workshop MURPHYS-HSFS-2014, Weierstrass Institute (WIAS), Berlin, Germany, 2014

— British Computational PDEs Colloquium: New Trends, International Centre for Mathematical Sciences, Edinburgh, UK, 2014 (приглашенный доклад)

— International Workshop VMS2013 "Variational MultiScale and Stabilized Finite Elements", Barcelona, Spain, 2013

— 25th Biennial Conference on Numerical Analysis, Strathclyde University, UK, 2013

— MAFELAP 2013 "The Mathematics of Finite Elements and Applications", Brunel University, UK, 2013

— Fifth Conference on "Numerical Analysis and Applications" NAA'12, Lozenetz, Bulgaria, 2012 (пленарный доклад)

— International Conference FoCM'11 "Foundations of Computational Mathematics", Budapest, Hungary, 2011 (приглашенный доклад)

— 24th Biennial Conference on Numerical Analysis, Strathclyde University, UK, 2011

— International Conference BAIL 2010 "Boundary and Interior Layers: Computational and Asymptotic Methods", Zaragoza, Spain, 2010

— Fifth Conference "Finite Difference Methods: Theory and Applications", Lozenetz, Bulgaria, 2010 (пленарный доклад)

— 23rd Biennial Conference on Numerical Analysis, Strathclyde University, UK, 2009

— International Conference "Contemporary Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics" in memory of the academician A.A. Samarskii, Moscow, Russia, 2009

— International Conference BAIL 2008 "Boundary and Interior Layers", Limerick, Ireland, 2008

— Fourth Conference on "Numerical Analysis and Applications" NAA'08, Lozenetz, Bulgaria, 2008 (пленарный доклад)

— International Conference CMAM-3 "Computational Methods in Applied Mathematics", Minsk, Belarus, 2007.

— Second International Workshop on "Analysis and Numerical Approximation of Singular Problems" IWANASP'06, Karlovassi, Greece, 2006 (приглашенный доклад)

— Fourth Conference on "Finite Difference Methods: Theory and Applications", Lozenetz, Bulgaria, 2006 (пленарный доклад)

— Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics", Moscow, Russia, 2006.

— Workshop on "Adaptive Method, Theory and Application", Peking University, Beijing, China, 2005 (приглашенный доклад)

— 21st Biennial Conference on Numerical Analysis, Dundee, UK, 2005

— Conference MMA2005/CMAM2, Trakai, Lithuania, 2005

Соответствие паспорту специальности. Диссертация посвящена теоретическому анализу некоторых методов численного решения математических задач и соответствует следующим направлениям, указанным в описании специальности **01.01.07 — вычислительная математика**:

— Создание алгоритмов численного решения задач алгебры, анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, теории вероятностей и статистики, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники.

— Разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность профессору В.Б. Андрееву за многолетнюю поддержку и внимание к работе, а также полезные обсуждения при написании данной диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Здесь мы используем обозначения и нумерацию утверждений из текста работы.

Структура диссертации. Диссертация (общим объемом 298 стр.) состоит из введения, трех глав, разделенных на 7 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 183 названия.

Во **Введении** обосновывается актуальность темы, обсуждается степень ее разработанности, представлены общая характеристика и краткое содержание работы, а также положения, выносимые на защиту.

Глава 1, включающая §§1–3, посвящена получению явных апостериорных оценок ошибки численного решения для следующего полулинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии:

$$Lu := -\varepsilon^2 \Delta u + f(x,u) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{1}$$

Предполагается, что $0 < \varepsilon \leqslant 1$, а f непрерывна в $\Omega \times \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию $f(\cdot, s) \in L_\infty(\Omega)$ при любом $s \in \mathbb{R}$, а также одностороннему условию Липшица $f(x,u) - f(x,v) \geqslant C_f[u-v]$ при любых $u \geqslant v$ с некоторой постоянной $C_f \geqslant 0$. Отметим, что при выполнении последнего условия с $C_f = 0$ уравнения типа (1) в дальнейшем будем называть монотонными. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, является, возможно нелипшицевым, многоугольником или многогранником. Рассматриваемая задача имеет единственное решение $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$; см. Лемму 1.1. Также предполагается, что $C_f + \varepsilon^2 \geqslant 1$ (поскольку деление на $C_f + \varepsilon^2$ немедленно сводит (1) к данному случаю).

Рассмотрены стандартные конечноэлементные аппроксимации задачи (1). Пусть $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ является стандартным лагранжевым конечноэлементным пространством непрерывных кусочно-полиномиальных функций степени r, соответствующих локально квазиравномерной триангуляции области $\mathcal{T}$, а $u_h \in S_h$ пусть удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^2 \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle + \langle f(\cdot, u_h), v_h \rangle_h = 0 \quad \forall\, v_h \in S_h. \tag{2}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ — некоторое его приближение, получаемое с использованием квадратурных формул.

В **§1** для задачи (1) установлены явные апостериорные оценки ошибки численного решения на основе невязок в норме максимума модуля на локально квазиравномерных сетках. Постоянные в полученных оценках не зависят от диаметров элементов сетки и малого параметра. При этом получены и использованы неулучшаемые оценки функции Грина линеаризованного оператора; см. Теорему 1.2. Последние, даже в случае уравнения Лапласа, несколько улучшают стандартные, и поэтому приводят к апостериорным оценкам с более точной степенью логарифма. Доказано, что присутствующий в полученных апостериорных оценках логарифм является необходимым по крайней мере в случае линейных конечных элементов для уравнения Лапласа. (Ранее необходимость логарифма была доказана лишь для аналогичных априорных оценок.)

Полученные в параграфе апостериорные оценки представлены в Теореме 1.12. Для простоты изложения, предположим пока, что все все интегралы в (2) вычисляются точно, т. е. $\langle\cdot,\cdot\rangle_h = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Тогда верхняя апостериорная оценка их Теоремы 1.12 принимает вид

$$\|u - u_h\|_{\infty\,;\Omega} \leqslant C \max_{T\in\mathcal{T}} \Big(\min\{1, \ell_h h_T^2 \varepsilon^{-2}\} \; \|\, \varepsilon^2 \Delta u_h - f(\cdot, u_h)\,\|_{\infty\,;T} \\ + \min\{\varepsilon, \ell_h h_T\} \|[\![\nabla u_h]\!]\|_{\infty\,;\partial T} \Big). \tag{3}$$

Здесь $h_T = \operatorname{diam}(T)$, $[\![\nabla u_h]\!]$ обозначает стандартный скачок нормальной производной u_h при переходе через границу элемента сетки, а $\ell_h = \ln(2 + \varepsilon \underline{h}^{-1})$ с $\underline{h} = \min_{T\in\mathcal{T}} h_T$.

Заметим, что оценка (3) является робастной по ε в том смысле, что зависимость от ε а этой оценке показана явно. Также, аналогично работе[6] (в которой впервые были получены робастные апостериорные оценки для уравнений типа (1), но в энергетической норме), весовые коэффициенты в этой оценке принимают разную форму в зависимости от локального диаметра сетки h_T, принимающего значения $h_T < \varepsilon$ или $h_T \geqslant \varepsilon$.

Теорема 1.12 также описывает полученные нами робастные по ε нижние апостериорные оценки; последние теоретически обосновывают эффективность соответствующих верхних оценок.

Отметим также улучшение логарифмических коэффициентов в (3) по сравнению со стандартными оценками даже для случая уравнения Лапласа. Степень ℓ_h в (3) равна 1 при $n = 2$ и $n = 3$, в то время как степень аналогичного логарифмического множителя, как правило, больше 1. Степень логарифма при $n = 3$ уже была ранее улучшена до 1; здесь же мы получаем аналогичное улучшение для $n = 2$. Заметим, что последнее улучшение будет установлено благодаря более точной, по сравнению со стандартными, оценке $|G(x,\cdot)|_{2,1,\Omega\setminus B(x,\rho)} \lesssim \varepsilon^{-2}\ell_\rho$ для функции Грина G эллиптического оператора типа L в (1) (см. Теорему 1.2). Здесь $B(x,\rho)$ — шар радиуса ρ с центром $x \in \Omega$, и, что весьма важно, логарифмический множитель $\ell_\rho := \ln(2 + \varepsilon\rho^{-1})$ имеет степень 1.

Более того, в §1.4 показано, что присутствующий в (3) логарифмический коэффициент является необходимым по крайней мере в случае линейных конечных элементов для уравнения Лапласа в некоторых выпуклых полигональных областях; см. Лемму 1.14. Ранее необходимость логарифма была доказана лишь для аналогичных априорных оценок (в частности, в [17] при $n = 3$).

Основной материал параграфа опубликован в работе [14].

В **§2** для задачи (1) в многоугольных областях установлены явные апостериорные оценки ошибки численного решения на основе невязок в норме максимума модуля. По сравнению с §1, в данном параграфе, а также в §3, мы ограничиваем рассмотрение линейными конечными элементами в двумерной области, при этом наше внимание перенесено на существенно более сложный случай неструктурированных анизотропных сеток (т. е. элементы рассматриваемых здесь сеток могут быть сколь угодно сильно сплющены). Постоянные в полученных оценках не зависят от диаметров элементов сетки, их аспектного соотношения (т. е. степени их сплющенности) и малого параметра.

Даже для линейного уравнения Лапласа (получаемого из (1) при $\varepsilon = 1$ и $f_u = 0$) нам неизвестны какие-либо апостериорные оценки в норме максимума модуля при отсутствии предположения ограниченности аспектного соотношения элементов сетки (поскольку предположение о локальной квазиравномерности сетки является стандартным в работах по данной тематике). Еще больший интерес анизотропные сетки представляют в контексте сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (таких, как (1) при $\varepsilon \ll 1$), поскольку для решений таких уравнений характерны пограничные и внутренние слои.

Как уже отмечалось, в §§2–3 для уравнения (1) рассмотрены стандартные линейные конечные элементы. Пусть $S_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ является пространством непрерывных кусочно-линейных функций, ассоциируемым с триангуляцией $\mathcal{T}$, а численное решение $u_h \in S_h$ пусть удовлетворяет соотношению (2), в котором используется $\langle f(\cdot, u_h), v_h \rangle_h := \langle f_h^I, v_h \rangle$, где $f_h(\cdot) := f(\cdot; u_h)$, а f_h^I — стандартный кусочно-линейный интерполянт Лагранжа для f_h. Для простоты изложения, предположим пока, что углы всех анизотропных элементов близки к нетупым. Тогда наша первая оценка из Теоремы 2.9 принимает вид

$$\|u - u_h\|_{\infty\,;\Omega} \leqslant C\,\ell_h \max_{z \in \mathcal{N}} \Big(\min\{\varepsilon, H_z\} \, \big\|J_z\big\|_{\infty\,;\gamma_z} + \min\{\varepsilon^2, H_z^2\} \, \|\varepsilon^{-2} f_h^I\|_{\infty\,;\omega_z} \Big) + C\,\|f_h - f_h^I\|_{\infty\,;\Omega}\,, \tag{4}$$

где постоянная C is не зависит от диаметров элементов сетки и их аспектных соотношений (т. е. степени их сплющенности), а также от малого параметра ε. (Данная оценка получается объединением (2.44), (2.47), (2.21) с Леммой 2.17.) Здесь $\mathcal{N}$ является множеством вершин элементов $\mathcal{T}$, J_z

обозначает стандартный скачок нормальной производной u_h через границу элемента, ω_z — множество элементов, окружающих вершину $z \in \mathcal{N}$, а γ_z — множество ребер внутри ω_z, $H_z = \operatorname{diam}(\omega_z)$, $\ell_h = \ln(2 + \varepsilon \underline{h}^{-1})$, а $\underline{h}$ — минимальный диаметр окружностей, вписанных в треугольники в $\mathcal{T}$.

Заметим, что при $\varepsilon = 1$ соотношение (4) дает стандартную апостериорную оценку, с той существенной разницей, что здесь она установлена для случая анизотропных сеток. Отметим также, что оценка (4) практически идентична с апостериорной оценкой (3), полученной для сингулярно возмущенного случая $\varepsilon \in (0, 1]$, однако сейчас мы отказываемся от предположения локальной квазирваномерности триангуляции.

При внимательном рассмотрении стандартных доказательств для случая локально квазиравномерных сеток обнаруживается, что одним из серьезных препятствий при их обобщении на случай анизотропных сеток является применение теоремы о следах при оценке невязок через границы элементов. При этом в получающихся апостериорных оценках появляются коэффициенты, зависящие от аспектных соотношений элементов сетки, поэтому такие оценки чрезвычайно грубы и не могут быть использованы для практической оценки ошибки численного решения. В частности, для преодоления данного теоретического препятствия и потребовалось развитие нового теоретического аппарата получения апостериорных оценок на анизотропных сетках.

Следует заметить, что, в отличие от других слагаемых в (4), поэлементные невязки $\|\varepsilon^{-2} f_h^I\|_{\infty\,;\omega_z}$ не отражают анизотропность соответствующих элементов сетки. С тем, чтобы получить более точную (и, в некотором смысле, анизотропную) оценку для поэлементных невязок, будут введены в рассмотрение цепочки коротких ребер, соединяющих анизотропные узлы (см. §2.6.4). При некоторых дополнительных ограничениях на такие цепочки получена более точная оценка, вытекающая из Теоремы 2.15:

$$
\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{\infty\,;\Omega} \leqslant C\,\ell_h \Big[&\max_{z \in \mathcal{N}} \Big(\min\{\varepsilon, H_z\} \big\| J_z \big\|_{\infty\,;\gamma_z} \Big) \\
&+ \max_{z \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{\text{paths}}} \Big(\min\{1, \varepsilon^{-2} H_z^2\} \|f_h^I\|_{\infty\,;\omega_z} \Big) \\
+ \max_{z \in \mathcal{N}_{\text{paths}}} \Big(&\min\{\varepsilon, H_z\}\, \min\{\varepsilon, h_z\} \|\varepsilon^{-2} f_h^I\|_{\infty\,;\omega_z} + \min\{1, \varepsilon^{-2} H_z^2\} \operatorname{osc}(f_h^I; \omega_z) \Big) \Big] \\
&+ C\,\|f_h - f_h^I\|_{\infty\,;\Omega}\,, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

(которая получается объединением (2.44), (2.58), (2.21) с Леммой 2.17). Здесь $\mathcal{N}_{\rm paths}$ обозначает множество узлов, которые задействованы хотя бы в одной цепочке, а $h_z \sim H_z^{-1}|\omega_z|$. Поскольку для анизотропных узлов справедливо $h_z \ll H_z$, то очевидно, что оценка (5) является более точной по сравнению с (4). (Последнее также подтверждается результатами численных экспериментов в §2.5.4).

Основной материал параграфа опубликован в работе [13].

В **§3**, как и в §2, для задачи (1) в многоугольных областях установлены явные апостериорные оценки ошибки численного решения на основе невязок для случая неструктурированных анизотропных сеток, но, в отличие от §2, здесь оценки решения получены в так называемой энергетической норме $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{\varepsilon\,;\Omega}$, которая является нормализованным вариантом нормы в $W_2^1(\Omega)$ и определяется соотношением

$$|\!|\!|v|\!|\!|_{\varepsilon\,;\Omega} := \Bigl\{\varepsilon^2\|\nabla v\|^2_{2\,;\Omega} + \|v\|^2_{2\,;\Omega}\Bigr\}^{1/2}.$$

Постоянные в полученных оценках не зависят от диаметров элементов сетки, их аспектного соотношения и малого параметра. При этом для интерполяции функции Грина на анизотропных сетках предложен новый квазиинтерполяционный оператор. По сравнению с ранее известными апостериорными оценками данного типа, в полученных нами оценках отсутствуют нежелательные функции согласования (matching functions). Полученные результаты являются новыми даже для уравнения Лапласа.

В рамках краткого описания основных результатов параграфа, наша первая оценка из Теоремы 3.9 принимает вид

$$\begin{aligned}|\!|\!|u_h - u|\!|\!|_{\varepsilon\,;\Omega} \leqslant C\,\Bigl\{\sum_{z\in\mathcal{N}}\min\{h_z H_z,\,\varepsilon H_z\}\,\bigl\|\varepsilon J_z\bigr\|^2_{\infty\,;\gamma_z}\\ +\sum_{z\in\mathcal{N}}\bigl\|\min\{1,\,H_z\varepsilon^{-1}\}\,f_h^I\bigr\|^2_{2\,;\omega_z} + \bigl\|f_h - f_h^I\bigr\|^2_{2\,;\Omega}\Bigr\}^{1/2},\end{aligned} \qquad (6)$$

где постоянная C is не зависит от диаметров элементов сетки и их аспектных соотношений (т. е. степени их сплющенности), а также от малого параметра ε. (Данная оценка получается объединением (3.14), (3.15), (3.25), (3.26) с Замечанием 3.10 и Теоремой 3.18.) Здесь $\mathcal{N}$ является множеством вершин элементов $\mathcal{T}$, J_z обозначает стандартный скачок нормальной производной u_h через границу элемента, ω_z — множество элементов, окружающих вершину $z \in \mathcal{N}$, γ_z — множество ребер внутри ω_z, $H_z = \mathrm{diam}(\omega_z)$, а $h_z \sim H_z^{-1}|\omega_z|$.

При некоторых дополнительных предположениях о триангуляции в Теореме 3.11 установлена и более точная (хотя и несколько более сложная) апостериорная оценка, в которой, по сравнению с (6), грубо говоря, слагаемые $\min\{1,\, H_z\varepsilon^{-1}\}$ будут заменены на $\min\{1,\, h_z\varepsilon^{-1}\}$, при этом в оценке появятся некоторые новые слагаемые, связанные с поэлементными невязками.

Важно отметить, что в апостериорных оценках на основе невязок всегда присутствует некоторая постоянная, аналогичная C в правых частях оценок (4), (5) и (6), в то время как во всех более ранних апостериорных оценках в энергетичской норме на неструктурированных анизотропных сетках, аналогичных полученным Г. Кунертом и Р. Ферфюртом[7], такие постоянные определяются через так называемые функции согласования (matching functions). Последние же являются функциями ошибки численного решения и принимают умеренные значения, если либо сетка локально квазиравномерна, либо если сетка, будучи анизотропной, правильно ориентирована по отношению к решению. В общем же случае функции согласования зависят от аспектного соотношения элементов сетки, и, таким образом, постоянные в оценках типа[7] (аналогичные C в (6)) могут принимать неограниченно большие значения на сильно анизотропных сетках (если только сетка не является правильно ориентированной по отношению к решению).

Достаточно очевидно, что присутствие подобных функций согласования в апостериорных оценках весьма нежелательно. С другой стороны, в §2 получены апостериорные оценки в норме максимума модуля, в которых функции согласования вообще отсутствуют. Поэтому совершенно естественно, что, в большой степени, в §3 мы опираемся на теоретический аппарат, описанный в §2. В то же время преодолен ряд дополнительных технических трудностей. Например, модифицированный интерполянт Лагранжа, который используется при интерполяции функции Грина в §2, становится неприменимым при получении оценок в энергетической норме даже в случае уравнения Лапласа. Поэтому для интерполяции функции Грина на анизотропных сетках построен новый квазиинтерполяционный оператор, свойства которого описаны в Теореме 3.18, и которой может представлять независимый интерес. Также нам потребуется более тонкая версия теоремы о следах для анизотропных элементов, и будут ослаблены некоторые предположения о триангуляции, сделанные в §2 для упрощения изложения.

Основной материал параграфа опубликован в работе [16].

Глава 2, включающая §§4–5, посвящена полулинейным параболическим уравнениям второго порядка. Для данных уравнений рассматриваются временные полудискретизации и полностью дискретные методы на основе неявного метода Эйлера, метода Кранка-Николсон и разрывного метода Галеркина $\mathrm{dG}(r)$ с квадратурой Радо. Основными результатами главы являются апостериорные оценки в норме максимума модуля для ошибки соответствующих численных решений.

Полученные результаты являются новыми и для классических, и для сингулярно возмущенных уравнений. Простота предложенного теоретического подхода связана с использованием интерполянтов численного решения по времени, степень которых соответствует порядку метода и является более низкой по сравнению с типично используемыми в литературе интерполянтами (например, при анализе неявного метода Эйлера будет использоваться кусочно-постоянная интерполяция). Также важную роль в представленном анализе играют оценки для функции Грина параболического оператора.

Рассматривается полулинейное параболическое уравнение в виде

$$\mathcal{M}u := \partial_t u + \mathcal{L}u + f(x,t,u) = 0 \qquad \text{при} \ \ (x,t) \in Q := \Omega \times (0,T],$$

где $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t)$ является линейным эллиптическим оператором второго порядка, а пространственная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет липшицеву границу. При этом накладываются следующие начальное и граничное условия:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{при} \ \ x \in \bar{\Omega}, \qquad u(x,t) = 0 \quad \text{при} \ \ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T].$$

Предполагается, что функция f непрерывна в $\bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}$, дифференцируема по третьему аргументу, а также при некоторых неотрицательных постоянных γ и $\bar{\gamma}$ удовлетворяет соотношениям

$$0 \leqslant \gamma^2 \leqslant \partial_z f(x,t,z) \leqslant \bar{\gamma}^2 \qquad \text{при} \quad (x,t,z) \in \bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}.$$

В качестве модельного уравнения используется вариант с $\mathcal{L} := -\varepsilon^2\triangle = -\varepsilon^2\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$:

$$\mathcal{M}u := \partial_t u - \varepsilon^2\triangle u + f(x,t,u) = 0 \tag{7}$$

в ограниченной полигональной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при $n = 1, 2, 3$. Последнее уравнение будет рассмотрено в двух режимах:

$$\text{(i)} \quad \varepsilon = 1, \;\; \gamma \geqslant 0; \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \varepsilon \ll 1, \;\; \gamma > 0.$$

Заметим, что режим (ii) соответствует сингулярно возмущенному уравнению реакции-диффузии, для решений которого характерны резкие пограничные и внутренние слои. Весьма важно, чтобы апостериорные оценки, полученные для данного случая, были робастными в том смысле, что любая зависимость от малого параметра ε должна быть представлена явным образом[5], а также эффективность таких оценок не должна ухудшаться при уменьшении ε.

Основной материал главы опубликован в работе [11].

В **§4** представлены апостериорные оценки для полудискретных методов (без дискретизации по пространству). Основные результаты параграфа, апостериорные оценки для неявного метода Эйлера, метода Кранка-Николсон и разрывного метода Галеркина, представлены соответветственно в Теоремах 4.8, 4.10 и 4.13. (Эти апостериорные оценки также объединены в виде более общей оценки (4.10).)

Например, в случае независящего от t оператора $\mathcal{L}$ неявной метод Эйлера на произвольной неравномерной сетке по времени $\{t_j\}$ принимает вид

$$\frac{U^j - U^{j-1}}{t_j - t_{j-1}} + \mathcal{L}U^j + f(\cdot, t_j, U^j) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad j = 1, \ldots, M; \qquad U^0 = \varphi.$$

Здесь $U^j \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ — численное решение, ассоциируемое с временным уровнем t_j. А оценка из Теоремы 4.8 для этого случая принимает вид

$$\begin{aligned}\big\|U^m - u(\cdot, t_m)\big\|_{\infty,\Omega} &\leqslant (\kappa_1\,\ell_m + \kappa_2) \max_{j=1,\ldots,m-1} \big\|U^j - U^{j-1}\big\|_{\infty,\Omega} \\ &+ 2\,\kappa_0\,\big\|U^m - U^{m-1}\big\|_{\infty,\Omega} + \kappa_0 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{e}^{-\gamma^2(t_m - s)}\,\big\|f(\cdot, s, U^j) - f(\cdot, t_j, U^j)\big\|_{\infty,\Omega}\,\mathrm{d}s\,,\end{aligned} \tag{8}$$

где $m = 1, \ldots, M$, $\ell_m = \ell_m(\gamma) := \int_{\tau_m}^{t_m} s^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma^2 s}\,\mathrm{d}s \leqslant \ln(t_m/\tau_m)$.

Здесь (а также в более общей оценке (4.10)) присутствуют постоянные κ_0, $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 \geqslant 0$ из следующих оценок на функцию Грина $\mathcal{G}$ соответствующего линеаризованного параболического оператора:

$$\|\mathcal{G}(x,t;\cdot,s)\|_{1,\Omega} \leqslant \kappa_0\,\mathrm{e}^{-\gamma^2(t-s)}, \qquad \int_0^{t-\tau} \|\partial_s\mathcal{G}(x,t;\cdot,s)\|_{1,\Omega}\,\mathrm{d}s \leqslant \kappa_1\,\ell(\tau,t) + \kappa_2,$$

где $x \in \Omega$, $\tau \in (0,t]$, $t \in (0,T]$, а $\ell(\tau,t) := \int_\tau^t s^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma^2 s}\,\mathrm{d}s \leqslant \ln(t/\tau)$. Заметим, что данные постоянные для модельной задачи (7) получены в Лемме 4.2.

§5 посвящен обобщению результатов, полученных в §4, на случай полностью дискретных методов. В качестве дискретизаций по пространству используются стандартные методы конечных элементов. Основные результаты параграфа, апостериорные оценки в норме максимума модуля для полностью дискретных неявного метода Эйлера, метода Кранка-Николсон и разрывного метода Галеркина, представлены соответветственно в Теоремах 5.9, 5.17 and 5.22. (Эти апостериорные оценки объединены в виде более общей оценки (5.8).)

Например, в случае независящего от t оператора $\mathcal{L}$ для полностью дискретного неявного метода Эйлера на произвольной неравномерной сетке по времени $\{t_j\}$ оценка из Теоремы 5.9 принимает вид

$$\begin{aligned}\big\|u_h^m - u(\cdot,t_m)\big\|_{\infty,\Omega} \leqslant \kappa_0\,\mathrm{e}^{-\gamma^2 t_m}\big\|u_h^0 - \varphi\big\|_{\infty,\Omega} \\ + (\kappa_1\,\ell_m + \kappa_2)\max_{j=1,\ldots,m-1}\Big\{\big\|u_h^j - u_h^{j-1}\big\|_{\infty,\Omega} + \eta^j\Big\} \\ + 2\kappa_0\,\big\|u_h^m - u_h^{m-1}\big\|_{\infty,\Omega} + (\kappa_0+1)\,\eta^m \\ + \kappa_0\sum_{j=1}^m\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathrm{e}^{-\gamma^2(t_m-s)}\,\big\|\theta_h(\cdot,s)\big\|_{\infty,\Omega}\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{9}$$

где $m = 1, \ldots, M$. Здесь $u_h^j \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$ — численное решение, ассоциируемое с временным уровнем t_j. Также предполагается, что сетка по пространству и соответствующее конечноэлементное пространство V_h не зависят от j. (Теорема 5.9 дает апостериорную оценку и для более общего случая.) Величина θ_h в (9) в некотором смысле аналогична $f(\cdot,s,U^j) - f(\cdot,t_j,U^j)$ в (8) (см. Замечание 5.6).

Наконец, новые, по сравнению с (8), величины η^j в (9) описывают ошибку, порождаемую дискретизацией по пространству. При обобщении результатов предыдущего параграфа на случай полностью дискретных методов мы опираемся на так называемые эллиптические реконструкции (elliptic reconstructions). Данный технический аппарат является аналогом техники на основе проекции Ритца (Ritz projection), часто используемой при получении априорных оценок ошибки для конечноэлементных решений параболических задач. Данный подход позволяет представить η^j в терминах явных эллиптических апостериорных оценивателей, соответствующих используемой пространственной дискретизации. Например, для метода Эйлера величина η^j явным образом выражается через численное решение u_h^j и соответствующую функцию $\frac{u_h^j - u_h^{j-1}}{t_j - t_{j-1}} + f(\cdot, t_j, u_h^j)$.

Глава 3, включающая §§6–7, посвящена немонотонным эллиптическим сингулярно возмущенным уравнениям реакции-диффузии. Под немонотонными полулинейными эллиптическими уравнениями будут пониматься уравнения, в которых нелинейность по неизвестной функции не является монотонной, поэтому такие уравнения могут иметь несколько решений.

Рассматривается краевая задача для полулинейного сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии в виде

$$Fu \equiv -\varepsilon^2 \triangle u + b(x,u) = 0, \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{10a}$$
$$u(x) = g(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{10b}$$

где ε — положительный параметр, принимающий сколь угодно малые значения, $\triangle = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ обозначает оператор Лапласа, а Ω является ограниченной двумерной областью.

Полагая $\varepsilon = 0$ в (10a), получаем вырожденную версию (10):

$$b(x, u_0(x)) = 0 \quad \text{для } x \in \Omega. \tag{11}$$

Заметим, что решение u_0 уравнения (11), вообще говоря, не удовлетворяет граничному условию в (10b). Это приводит к тому, что для решений (10) характерны порграничные слои. Решения (10) могут также иметь внутренние переходные слои (см., например, работу Н.Н. Нефедова[8] и [8]).

Отметим, что функция b не предполагается монотонной по u, поэтому и вырожденное уравнение (11), и исходная задача (10) могут иметь несколько решений. В литературе же по вычислительной математике нередко предполагается, что уравнение (10a) монотонно по u и, более того, $b_u(x,u) > \gamma^2 > 0$ при любых $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^1$ для некоторой положительной постоянной γ. При данном условии вырожденная задача имеет единственное решение u_0, которое является достаточно гладким в $\bar{\Omega}$ (что, в силу компактности $\bar{\Omega}$, следует из применения теоремы о неявной функции). Тем не менее, данное глобальное условие является довольно серьезным ограничением. Например, математические модели возникающие при моделировании биологических и химических процессов нередко используют уравнения типа (10), в которых $b(x,u)$ <u>немонотонна</u> по u.

В **§6** рассмотрены погранслойные решения задачи (10) в случае гладкой области Ω. Целью параграфа является доказательство существования численных решений, а также исследование их точности на сгущающихся в пограничных слоях сетках типа Бахвалова и Шишкина. Установлен второй порядок сходимости (с логарифмическим множителем в случае сетки Шишкина) в сеточной норме максимума модуля равномерно по малому параметру ε при условии $\varepsilon \leqslant Ch$. Здесь $h > 0$ является максимальным диаметром элементов сетки, в то время как число степеней свободы не превосходит Ch^{-2}. Полученные теоретические оценки сходимости проиллюстрированы результатами численных экспериментов.

Отметим, что, в силу немонотонности исходного уравнения в сочетании с наличием малого параметра при старших производных, стандартный технический аппарат, используемый при получении априорных оценок ошибки как для конечно-разностных, так и для конечноэлементных численных решений, становится неприменимым. В данном параграфе, при доказательстве существования и точности численных решений используется принципиально иной подход, основанный на построении дискретных верхних и нижних решений, при этом последние является нелинейными модификациями асимтотического разложения для исходной задачи. Данный подход ранее использовался в работах в работах К.М. Д'Аннунцио, М. Стайнза и Г. Сана, а также в [1] для обыкновенных дифференциальных уравнений, и впервые был обобщен автором диссертации на случаи эллиптических и параболических уравнений в [2, 6].

Задача (10) в гладкой области Ω при следующих предположениях (которые можно также найти в работах П. Файфа и Н.Н. Нефедова[8]):

A1 Существует устойчивое вырожденное решение, т. е. вырожденная задача (11) имеет достаточно гладкое решение u_0, удовлетворяющее при некоторой постоянной $\gamma > 0$ условию

$$b_u(x, u_0) > \gamma^2 > 0 \quad \text{для любого } x \in \Omega.$$

A2 Граничное условие $g(x)$ удовлетворяет

$$\int_{u_0(x)}^{v} b(x,s)\,ds > 0 \qquad \text{для любого } \ v \in \big(u_0(x), g(x)\big]', \qquad x \in \partial\Omega.$$

Используемое здесь обозначение $(a, b]'$ совпадает с $(a, b]$ при $a < b$ и $[b, a)$ при $a > b$, в то время как $(a, b]' = \varnothing$ при $a = b$.

Условия A1 и A2 естественным образом возникают при построении асимптотического разложения для задачи (10) и гарантируют, что существует погранслойное решение u, для которого справедливо соотношение $u \approx u_0$ во внутренней части области, в то время как вдоль границы области возникает пограничный слой ширины $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$; см. Теорему 6.2.

Рассматриваемый нами численный метод использует дискретизацию области с использованием сгущающихся в окрестности погранслоя криволинейных прямоугольных сеток типа Бахвалова и Шишкина, число узлов которых не превосходит Ch^{-2}. Здесь $h > 0$ — максимальный диаметр элементов сетки. Что касается дискретизации уравнения (10a), то оно аппроксимируется с использованием метода конечных разностей на криволинейной прямоугольной части сетки и линейного метода конечных элементов с сосредоточенными массами на квазиравномерной триангуляции Делоне (Delaunay) во внутренней части области. С точки зрения используемого здесь технического аппарата, ключевым свойством рассматриваемого численного метода является то, что дискретизация оператора $-\triangle$ соответствует M-матрице. Последнее позволяет использовать дискретные нижние и верхние решения при доказательстве существования численного решения и исследовании его точности.

Основной результат параграфа, Теорема 6.28, устанавливает второй порядок сходимости в сеточной норме максимума модуля равномерно по малому параметру ε (с логарифмическим множителем в случае сетки Шишкина).

Основной материал параграфа опубликован в работе [2], а обобщения данного подхода кратко описаны в §6.5 и опубликованы в работах [6, 8, 10].

В **§7** задача (10) рассматривается в выпуклой многоугольной области. Наличие угловых точек на границе $\partial\Omega$ приводит к дополнительным сложностям в асимптотическом анализе. В дополнение к достаточно стандартным погранслойным функциям, в асимптотическом разложении появляются угловые пограничные функции. Эти угловые функции определяются как решения некоторых нелинейных краевых задач в бесконечном выпуклом секторе, что серьезно усложняет анализ, поскольку даже существование решений таких задач далеко неочевидно.

Отметим, что наш интерес к асимптотическому анализу задачи (10) обусловлен тем, что построенное асимпотическое разложение и соответствующие верхние и нижние решения могут быть использованы при построении и теоретическом исследовании ε-равномерных численных методов для рассматриваемой задачи (аналогично §6). Некоторые аспекты построения таких численных методов для (10) кратко обсуждаются в §7.5.

Будут также сделаны те же предположения A1 и A2, что и в §6, а также следующее дополнительное предположение.

A3 (*Угловые условия*) Для каждой угловой точки P_j многоугольной области Ω, при $g(P_j) \neq u_0(P_j)$ предполагается, что

$$\frac{b(P_j, g(P_j))}{g(P_j) - u_0(P_j)} > 0.$$

Обсудим предположение A3. Ключевым элементом анализа, изложению которого посвящен данный параграф, будет исследование некоторых решений полулинейного эллиптического уравнения

$$-\triangle z + f(z) = 0 \tag{12}$$

в бесконечном секторе. Уравнение типа (12) представляет интерес, поскольку угловые погранфункции, ассоциируемые с вершиной P_j могут быть описаны с использованием некоторого решения уравнения (12) при $f(z) = b(P_j, z)$ с условием $z = g(P_j)$ на границе сектора. Как будет показано, предположение A3 не только является достаточным для существования решения z. Результат из работы Г. Свирса показывает, что A3 также является в некотором смысле необходимым для существования решения z определенного типа. Более того, в Теореме 7.17 с использованием A3 установлена устойчивость решений (12). Для этого в Теореме 7.15 показано, что главное собственное значение оператора, возникающего при линеаризации (12) около решения z и рассматриваемого в соответствующем секторе радиуса R, является положительным и отделено от нуля положительной постоянной равномерно по $R \to \infty$. Раздел, посвященный задаче (12) и соответствующему линеаризованному оператору, является ключевым в §7, и может также представлять независимый интерес.

Основным результатом параграфа является построение асимптотического разложения первого порядка $u_{\rm as}$ для задачи (10) и доказательство существования решения этой задачи $u(x)$, для которого справедлива оценка $|u - u_{\rm as}| \leqslant C\varepsilon^2$; последнее сформулировано в виде Теоремы 7.23. Также установлены поточечные оценки производных для компонент построенного асимптотического разложения. Последние получены с целью последующего построения и теоретического исследования сходимости численных методов для рассматриваемой задачи. Аналогичные результаты для гладких областей были получены П. Файфом и Н.Н. Нефедовым[8].

Результаты данного параграфа являются принципиально новыми для многоугольных областей. Отметим, что в случае прямоугольной области результаты, аналогичные нашим, были ранее получены В.Ф. Бутузовым для линейного варианта задачи (10). Нелинейная же задача (10) в прямоугольной области рассматривалась в ряде работ И.В. Денисова, но при весьма более сильных, по сравнению с A3, ограничениях в угловых точках области. Следуя работам Н.Н. Нефедова[8], для доказательства существования решения в данном параграфе используется теория верхних и нижних решений. При этом последние построены с помощью нелинейной модификации асимптотического разложения.

Основной материал параграфа опубликован в работе [5].

В **Заключении** перечислены основные результаты работы.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Kopteva, N., Stynes, M. Numerical analysis of a singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion problem with multiple solutions// ***Applied Numerical Mathematics***. 2004. V. 51. Pp. 273–288.

2. Kopteva, N. Maximum norm error analysis of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem// ***Mathematics of Computation***. 2007. V. 76. Pp. 631–646.

3. Kopteva, N. Maximum norm a posteriori error estimates for a 1d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem// ***IMA Journal of Numerical Analysis***. 2007. V. 27. Pp. 576–592.

4. Kopteva, N. Maximum norm a posteriori error estimate for a 2d singularly perturbed reaction-diffusion problem// ***SIAM Journal on Numerical Analysis***. 2008. V. 46. Pp. 1602–1618.

5. Kellogg, R. B., Kopteva, N. A singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem in a polygonal domain// ***Journal of Differential Equations***. 2010. V. 248. Pp. 184–208.

6. Kopteva, N., Savescu, S. B. Pointwise error estimates for a singularly perturbed time-dependent semilinear reaction-diffusion problem// ***IMA Journal of Numerical Analysis***. 2011. V. 31. Pp. 616-639.

7. Chadha, N. M., Kopteva, N. Maximum norm a posteriori error estimate for a 3d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem// ***Advances in Computational Mathematics***. 2011. V. 35. Pp. 33–55.

8. Kopteva, N., Stynes, M. Stabilised approximation of interior-layer solutions of a singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem// ***Numerische Mathematik***. 2011. V. 119. Pp. 787–810.

9. Kopteva, N., Linß, T. Maximum norm a posteriori error estimation for a time-dependent reaction-diffusion problem// ***Computational Methods in Applied Mathematics***. 2012. V. 12. Pp. 189–205.

10. Kopteva, N., Pickett, M. A second-order overlapping Schwarz method for a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem// ***Mathematics of Computation***. 2012. V. 81. Pp. 81–105.

11. Kopteva, N., Linß, T. Maximum norm a posteriori error estimation for parabolic problems using elliptic reconstructions// ***SIAM Journal on Numerical Analysis***. 2013. V. 51. Pp. 1494–1524.

12. Kopteva, N. Linear finite elements may be only first-order pointwise accurate on anisotropic triangulations// ***Mathematics of Computation***. 2014. V. 83. Pp. 2061–2070.

13. Kopteva, N. Maximum-norm a posteriori error estimates for singularly perturbed reaction-diffusion problems on anisotropic meshes// ***SIAM Journal on Numerical Analysis***. 2015. V. 53. Pp. 2519–2544.

14. Demlow, A., Kopteva, N. Maximum-norm a posteriori error estimates for singularly perturbed elliptic reaction-diffusion problems// ***Numerische Mathematik***. 2016. V. 133. Pp. 707–742.

15. Kopteva, N., Linß, T. Improved maximum-norm a posteriori error estimates for linear and semilinear parabolic equations// ***Advances in Computational Mathematics***. 2017. V. 43. Pp. 999–1022.

16. Kopteva, N. Energy-norm a posteriori error estimates for singularly perturbed reaction-diffusion problems on anisotropic meshes// ***Numerische Mathematik***. 2017. V. 137. Pp. 607–642.

17. Kopteva, N. Logarithm cannot be removed in maximum norm error estimates for linear finite elements in 3D// ***Mathematics of Computation***. 2018. Published electronically 28-Sep-2018. DOI: 10.1090/mcom/3384.