На правах рукописи

Францева Анастасия Сергеевна

Сложность и алгоритмы нахождения представлений многовыходных функций алгебры логики в классах полиномов и обратимых схем

01.01.09 — дискретная математика и
математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск
2019

Работа выполнена на кафедре Алгебраических и информационных систем Иркутского государственного университета.

Научный руководитель: **Винокуров Сергей Федорович**, профессор, доктор физико-математических наук.

Официальные оппоненты: **Кочергин Вадим Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры Дискретной математики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»;

Васильев Александр Валерьевич, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Системного анализа и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО Новосибирский государственный технический университет (НГТУ).

Защита диссертации состоится “29” августа 2019 года в 14 час 30 мин на заседании диссертационного совета Д212.081.35 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г.Казань, ул.Кремлевская, 35; ауд. 1011.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенных печатью организации, просим направлять по указанному адресу ученому секретарю диссертационного совета Д 212.081.35.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, Казань, ул.Кремлевская, д.35. Электронная версия размещена на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: //www.kpfu.ru/.

Автореферат разослан “___”__________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д212.081.35 Еникеев А.И.
канд. физ.-мат. наук, доцент

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. В диссертации исследуются два вопроса минимизации дискретных функций: нахождение сложности представлений функций алгебры логики в некоторых классах полиномиальных нормальных форм (ПНФ), нахождение сложности представлений многовыходных обратимых функций в классах обратимых схем. К классам ПНФ относятся известные классы полиномов Жегалкина [1], поляризованных полиномов Жегалкина или форм Рида-Маллера [2] и кронекеровых форм [3]. В диссертации рассматриваются расширения перечисленных и других, схожих по строению, классов ПНФ.

Интерес к задачам обратимых вычислений возник благодаря работе, связывающей логическую необратимость вычислений, производимых компьютером, с таким физическим явлением, как выделение теплоты [4]. В последние десятилетия активно исследуются как способы синтеза обратимых схем, реализующих обратимые функции, так и способы обратимой реализации функций алгебры логики.

Центральным понятием диссертационных исследований является понятие многовыходной функции, интерес к которому усилился в связи с переходом от классической модели вычислений, опирающейся на теорию функций алгебры логики или булевых функций, к обратимой.

Обозначим через $\tilde{\sigma}$ двоичный набор $(\sigma_1 ... \sigma_n)$ длины n, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$ – компоненты двоичного набора, $i \in \{1, ..., n\}$. Нулевой и единичный наборы обозначаются: $\tilde{0}$, $\tilde{1}$. В дальнейшем при необходимости набор $\tilde{\sigma}$ будет ассоциироваться с целым положительным числом $X = 2^{n-1}\sigma_1 + ... + 2^0\sigma_n$, а множество наборов $\{0, 1\}^n = \{\tilde{\sigma}_0, ..., \tilde{\sigma}_{2^n-1}\}$ будет упорядочено согласно ассоциируемыми с ними числами.

Многовыходной (n, k)-*функцией* f будем называть отображение из множества наборов $\{0, 1\}^n$ в множество $\{0, 1\}^k$. Многовыходная $(n, 1)$-*функция* f является *функцией алгебры логики* в классическом понимании. В диссертации в зависимости от контекста будут использоваться оба термина.

В диссертации удобно задавать $(n, 1)$-функцию f двоичным набором $(\alpha_{\tilde{0}} ... \alpha_{\tilde{1}})$ длины 2^n, называемым вектором значений, в котором $\alpha_{\tilde{\sigma}} = f(\tilde{\sigma})$ по всем наборам $\tilde{\sigma} \in \{0, 1\}^n$. Аргументы функции алгебры логики f именуются переменными и обозначаются символами: x, y, возмож-

[1] *Жегалкин И. И.* Арифметизация символической логики // Матем. сборник. 1928. Т.35. С. 311–377

[2] *Reed I. S.* A class of multiple-error-correcting codes and decoding scheme // Transactions of the IRE Professional Group on Information Theory. 1954. Vol. 4, No. 4. P. 38–49

[3] *Fujita M., Sasao T.* Representations of Discrete Functions. Kluwer Academic Publishers Norwell, MA, USA. 1996. 450 p.

[4] *Landauer R.* Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process // Journal IBM Journal of Research and Development. 1961. Vol. 5, Iss. 3. P. 183–191

но, с индексами. Если наборы переменных обозначаются следующим образом: $\tilde{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\tilde{x}_j^i = (x_i, ..., x_j)$, то возможна сокращенная запись: $f(x_1, ..., x_n) = f(\tilde{x})$, $F(x_0, x_1 ..., x_n) = F(\tilde{x}_n^0)$.

x^σ означает x, если $\sigma = 1$ и $\bar{x}$, если $\sigma = 0$. Символами $\oplus$ и $\sum$ обозначается сложение по модулю 2, символ конъюнкции в виде «·» может быть опущен.

Для описания классов ПНФ в диссертации используется операторный подход, введенный в 90-е годы Винокуровым С.Ф. совместно с Перязевым Н.А. Детальное описание этого подхода приведено в монографии [5]. Для изложения результатов диссертационных исследований потребуются следующие определения основных понятий и утверждения операторного подхода.

Производной функции алгебры логики $f(x_1, ..., x_n)$ по переменной x_i называется функция:

$$f'_{x_i}(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \oplus f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Производной функции алгебры логики $f(x_1, ..., x_n)$ по множеству переменных $x_1, ..., x_s$, $s \leq n$, называется функция:

$$f'_{x_1,...,x_s}(x_1, ..., x_n) = (f'_{x_1,...,x_{s-1}}(x_1, ..., x_n))'_{x_s}.$$

Из определения производной следует, что

$$f'_{x_1,...,x_s}(x_1, ..., x_n) = f'_{x_{i_1},...,x_{i_s}}(x_1, ..., x_n),$$

где $(i_1, ..., i_s)$ – произвольная перестановка $(1, ..., s)$.

Под *оператором* $\mathtt{t}$, будем понимать отображение линейного пространства всех булевых функций B_n в B_n. Оператор представляется в виде последовательности $\mathtt{t} = t_1 ... t_n$, компоненты которой t_i принадлежат множеству специальных символов e, d, p; n – длина оператора.

Компонента t_i оператора $\mathtt{t}$ действует на функцию $f(\tilde{x})$ по переменной x_i следующим образом:

$$t_i f(\tilde{x}) = \begin{cases} f(\tilde{x}), \text{ если } t_i = e, \\ f(x_1, ..., \bar{x}_i, ..., x_n), \text{ если } t_i = p, \\ f'_{x_i}(\tilde{x}), \text{ если } t_i = d. \end{cases}$$

Действие оператора $\mathtt{t} = t_1 ... t_n$ на функцию $f(\tilde{x})$ по переменным $x_1, ..., x_n$ определяется так: $t(f(\tilde{x})) = t_1(t_2 ... t_n f(\tilde{x}))$.

Для описания результатов второй главы будет использоваться следующая *операторная запись производной*: $d^{\tau_1,...,\tau_n}_{x_1,...,x_n} f(x_1, ..., x_n)$, которая обозначает производную функции $f(x_1, ..., x_n)$ по тем переменным x_i, для которых соответствующее $\tau_i = 0$.

Набор $\mathtt{T} = \{\mathtt{t}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{1}}\}$ из 2^n операторов, где каждый оператор имеет длину n, называется *пучком* операторов. Пучок операторов $\mathtt{B} = \{\mathtt{b}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{b}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{b}^{\tilde{1}}\}$ называется *базисным*, если существует функция $g(\tilde{x})$

[5] Избранные вопросы теории булевых функций, А. С. Балюк, С. Ф. Винокуров, А. И. Гайдуков, О. В. Зубков, К. Д. Кириченко, В. И. Пантелеев, Н. А. Перязев, Ю. В. Перязева; Под ред. С. Ф. Винокурова и Н. А. Перязева. М. : Физматлит, 2001. 192 с.

такая, что операторные образы $\{\mathtt{b}^{\tilde{0}}g(\tilde{x}), ..., \mathtt{b}^{\tilde{\tau}}g(\tilde{x}), ..., \mathtt{b}^{\tilde{1}}g(\tilde{x})\}$ образуют базис пространства B_n, как линейного векторного пространства; функция $g(\tilde{x})$ называется *базисной*.

Операторный пучок $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, \ldots, \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, \ldots, \mathtt{a}^{\tilde{1}})$ называется *двупорожденным*, если существуют такие операторы $\mathtt{b} = b_1 \ldots b_n$ и $\mathtt{c} = c_1 \ldots c_n$, $b_i \neq c_i$ для любого i, что оператор $\mathtt{a}^{\tilde{\tau}} = a_1 \ldots a_n$ пучка $\mathtt{A}$ определяется следующим образом:

$$a_i = \begin{cases} b_i, & \text{если } \tau_i = 0, \\ c_i, & \text{если } \tau_i = 1. \end{cases}$$

Любой двупорожденный операторный пучок является базисным [6].

Пусть $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{1}})$ – двупорожденный операторный пучок. Тогда $(n, 1)$-функция f имеет следующую операторную форму по пучку $\mathtt{A}$:

$$OF(f) = \sum_{\tilde{\tau} \in \{0,1\}^n} \alpha_{\tilde{\tau}} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}} g(\tilde{x}), \tag{1}$$

где $\alpha_{\tilde{\tau}} \in \{0, 1\}$.

Для удобства записи в дальнейшем изложении будем обозначать через $\sum_{\tilde{\tau}}$ сумму следующего вида $\sum_{\tilde{\tau} \in \{0,1\}^n}$, через $\cup_{\tilde{\sigma}}$ объединение $\cup_{\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^n}$, по всем наборам $\tilde{\tau}$.

Оператор $\mathtt{c}$ будем называть суммой операторов $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, если для любой функции $f(\tilde{x})$ верно следующее равенство: $\mathtt{c}f(\tilde{x}) = \mathtt{a}f(\tilde{x}) \oplus \mathtt{b}f(\tilde{x})$. Далее удобно записывать так: $\mathtt{c} = \mathtt{a} \oplus \mathtt{b}$.

Для любого двупорожденного операторного пучка $T_{\tilde{\tau}} = (t^{\tilde{0},\tilde{\tau}}, ..., t^{\tilde{1},\tilde{\tau}})$ *существует оператор* $\mathtt{a}^{\tilde{\tau}} = \sum_{\tilde{\delta}} t^{\tilde{\delta},\tilde{\tau}}$ [7].

В форме (1) для всех $\alpha_{\tilde{\tau}} = 1$ вместо оператора $\mathtt{a}^{\tilde{\tau}}$ подставим сумму операторов соответствующего пучка $\mathtt{T}_{\tilde{\tau}}$, проведем операцию сокращения пар одинаковых слагаемых (операцию R) и получим для функции $f(\tilde{x})$ следующее представление: $f(\tilde{x}) = R\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{\tilde{\tau}} \mathtt{t}^{\tilde{\tau},i} g(\tilde{x})\right)$. Данное представление единственно с точностью до порядка слагаемых, называется *специальной операторной формой* и обозначается через $SOF(f)$ [8].

В диссертационных исследованиях используются классы $H_{\mathtt{b}}$ двупорожденных операторных пучков, где $\mathtt{b}$ – оператор длины n. Классы $H_{\mathtt{b}}$ состоят из пучков вида $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{1}})$, в которых $\mathtt{a}^{\tilde{0}} = \mathtt{b}$. Через H обозначается класс всех двупорожденных операторных пучков.

Классы операторных пучков редуцируются в классы полиномиальных нормальных форм, если в качестве базисной функции $g(\tilde{x})$ *рассматривать*

---

[6] Там же, С. 88

[7] Там же, С. 89

[8] Винокуров С. Ф. Перечисление операторных классов булевых функций // Изв. Ирк. государств. университета. Серия : Математика. 2009. Том 2, № 2. С. 40–55.

функцию произведения $x_1 \cdot ... \cdot x_n$ [9].

В рамках диссертационных исследований рассматриваются расширения классов $H_{\mathtt{b}}$ и H: *классы* $EH_{\mathtt{b}}$ *и* EH. Эти классы состоят из расширений $E_{\mathtt{A}}$ двупорожденных операторных пучков $\mathtt{A}$. Классы $E_{\mathtt{A}}$ и EH рассматривались и ранее [10]. Класс $EH_{\mathtt{d}\ldots\mathtt{d}}$, являющейся классом расширенных поляризованных полиномов Жегалкина ZhE, ранее не исследовался. Этот класс имеет приложение в задаче нахождения сложности обратимых реализаций ZhE-полиномов функций алгебры логики в классе обратимых схем RS.

Известны оценки сложности представлений функций алгебры логики в классах двупорожденных операторных форм $H_{\mathtt{b}}$, H [11], расширенных двупорожденных операторных форм $E_{\mathtt{A}}$, EH [12], поляризованных полиномов Жегалкина $Zh = H_{d...d}$ [13].

В 2004 году Рябец Л. В. и Винокуров С.Ф. разработали способ вычисления сложности представления специальной операторной формы функций алгебры логики в классе двупорожденных операторных пучков $H_{\mathtt{b}}$ и алгоритм нахождения минимального представления функций алгебры логики в классе H [14]. Предлагаемый способ был продолжен для разработки алгоритмов нахождения сложности представлений функций алгебры логики в классах $EH_{\mathtt{b}}$, EH и в классе обратимых схем RS.

При получении представлений в классах ZhE, $EH_{\mathtt{b}}$, EH самых сложных функций использовалась библиотека представителей классов LP-эквивалентности для функций 5 переменных, полученная в результате выполнения алгоритма минимизации представлений функций алгебры логики в классе полиномиальных форм [15].

Под *обратимой* функцией $F(\tilde{x})$ будем понимать такую многовыходную (n, n)-функцию $(f_1(x_1, ..., x_n)...f_n(x_1, ..., x_n))$, что отображение

$$F : \{(\sigma_1...\sigma_n)\} \to \{(f_1(\sigma_1...\sigma_n)...f_n(\sigma_1...\sigma_n))\}$$

является взаимно однозначным.

---

[9] Избранные вопросы теории булевых функций; Под ред. С. Ф. Винокурова и Н. А. Перязева. М. : Физматлит, 2001. 192 с.

[10] Там же, С. 130

[11] Там же, С. 147

[12] Там же, С. 152

[13] *Перязев Н. А.* Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 3. С. 323–326

[14] *Рябец Л. В., Винокуров С. Ф.* Алгоритм точной минимизации булевых функций в классе кронекеровых форм // Алгебра и теория моделей 4. Новосибирск: Из-во Новосиб. гос. тех. ун-та, 2003. С. 148–159

[15] *Казимиров А. С.* Оценка числа классов LP-эквивалентности булевых функций // Вестник Бурятского университета: Математика и информатика. Улан-Удэ: Бурятский государственный ун-т, 2005. Серия 13, Выпуск 2. С. 17–22

Для двух обратимых функций $F(\tilde{x}) = (f_1(\tilde{x})...f_n(\tilde{x}))$ и $G(\tilde{x}) = (g_1(\tilde{x})...g_n(\tilde{x}))$ функция $H(\tilde{x}) = G(F(\tilde{x})) = (g_1(f_1, ..., f_n)...g_n(f_1, ..., f_n))$ называется *суперпозицией* функций F и G.

В диссертации рассматривается множество T введенных Т. Тоффоли обратимых функций:

$$T_0^n(x_i): \ (x_1, ..., x_i, ..., x_n) \to (x_1, ..., \bar{x}_i, ..., x_n),$$
$$T_k^n(x_{i_1}, ..., x_{i_k}, x_j): \ (x_1, ..., x_j, ..., x_n) \to (x_1, ..., x_j \oplus x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_k}, ..., x_n),$$ где $k < n$, $\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., n\}$, для любых i, $j \in \{1, ..., n\}$, $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$ [16].

Пусть B_n^n – множество всех обратимых (n, n)-функций; $B \subset B_n^n$. Тогда замыканием $[B]$ называется такое множество всех обратимых функций, которые представимы в виде суперпозиции функций множества B.

Замыкание множества $[T]$ *совпадает с* B_n^n [17].

Функции множества T активно исследовались в различных направлениях. Разработан метод построения обратимой схемы, реализующей любую обратимую функцию из множества T, через элементы, соответствующие функциям вида T_0^n, T_2^n, T_{n-1}^n [18].

С помощью алгоритма синтеза обратимых логических схем, использующего элементы Тоффоли, в 2003 году осуществлено построение библиотеки всех обратимых схем на 3 входах [19]. В алгоритме вычисления сложности произвольной обратимой $(4, 4)$-функции используется разбивка множества всех обратимых функций на классы эквивалентности по перестановкам входов и симметричности схем [20].

В диссертации через R обозначается *класс обратимых схем, построенных на элементах функций вида* T_0^n, T_2^n, T_{n-1}^n *и реализующих все обратимые функции.*

В исследовании задачи нахождения сложности обратимых представлений $(n, 1)$-функций опорной является идея конструирования обратимой схемы с использованием дополнительных входов в схеме, называемых источником, дополнительных выходов, называемых мусором, при условии, что число входов равно числу выходов [21].

В диссертации при исследовании данной задачи:

[16] *Toffoli T.* Reversible Computing // Automata, Languages and Programming (Series: Lecture Notes in Computer Science), Springer Berlin Heidelberg. 1980. Vol. 85. P. 632–644

[17] Там же, С. 636

[18] *Barenco, A.* Elementary gates for quantum computation // Physical Review A. 1995. Vol. 52, Iss. 5. P. 3457–3467, doi: 10.1103/PhysRevA.52.3457

[19] *Shende V. V., Prasad A. K. and oth.* Synthesis of Reversible Logic Circuits // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. Vol. 22, No. 6. 2003. P. 710–722, doi: 10.1109/TCAD.2003.811448

[20] *Golubitsky O., Falconer S. M., Maslov D.* Synthesis of the Optimal 4-bit Reversible Circuits // Proceedings of the 47th Design Automation Conference. Anaheim, California, 2010. P. 653–656

[21] *Fredkin E., Toffoli T.* Conservative Logic // International Journal of Theoretical Physics. 1982. Vol. 21, Iss. 3. P. 219–253

1) используется подмножество $T^r \subset T$ следующих функций Тоффоли:

$$
\begin{aligned}
T_0^{n+1}(x_i):&\ \ (x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n) \to (x_0, x_1, ..., \bar{x}_i, ..., x_n),\\
T_k^{n+1}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}, x_0):&\ \ (x_0, x_1, .., x_n) \to (x_0 \oplus x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_k}, x_1, ..., x_n),\\
&\ \ k \le n,\ \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., n\};
\end{aligned}
$$

2) в обратимых схемах, построенных из элементов функций множества T^r, используется один дополнительный вход;

3) $(n, 1)$-функции представлены полиномами класса ZhE.

Класс получившихся обратимых схем обозначается через RS.

Сложность представлений многовыходных функций в классах полиномов и обратимых схем характеризуется функцией Шеннона [22].

Цели и задачи исследования. Диссертация посвящена исследованию сложности представлений многовыходных функций алгебры логики в классах полиномов и обратимых схем. В диссертации рассматриваются следующие задачи:

- нахождение сложности представлений функций алгебры логики в классах расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{\flat}$ и EH;
- исследование сложности обратимых реализаций полиномов функций алгебры логики в классе обратимых схем RS;
- разработка и реализация алгоритмов нахождения сложности представлений функций алгебры логики в классах расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{\flat}$ и EH;
- разработка и реализация алгоритма нахождения сложности обратимых реализаций полиномов функций алгебры логики в классе обратимых схем RS, алгоритма нахождения сложности представлений многовыходных обратимых функций в классах обратимых схем R.

Положения, выносимые на защиту, и научная новизна. Основные научные результаты диссертации следующие:

- получено точное значение функции Шеннона сложности представлений функций алгебры логики в классах расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{\flat}$;
- найдена новая нижняя граница значения функции Шеннона сложности представлений функций алгебры логики в классе расширенных двупорожденных операторных форм EH;
- получено асимптотически точное значение функции Шеннона сложности обратимых реализаций полиномов функций алгебры логики в классе обратимых схем RS;

[22] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику : Учеб. пособие для вузов / под ред. В. А. Садовничего, 3-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2002. С. 349–351.

- разработан алгоритм нахождения сложности представлений функций алгебры логики в классах расширенных двупорожденных операторных форм $EH_ъ$ и EH, разработан алгоритм нахождения сложности обратимых реализаций полиномов функций алгебры логики в классе обратимых схем RS, разработаны алгоритмы получения точного и приближенного значения сложности многовыходных обратимых функций в классе R; алгоритмы реализованы параллельными программами.

Основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут найти применение в дальнейших исследованиях представлений функций алгебры логики в классах полиномиальных нормальных форм и обратимых схем, в исследованиях задачи полиномиальных представлений функций над конечными полями характеристики больше 2. Результаты могут быть использованы при проектировании дискретных преобразователей информации. Алгоритмы использованы в системе поддержки принятия решений при выполнении лекарственных назначений на основе четырехзначной логики.

Методология и методы исследования. В диссертации применяются методы линейной алгебры при использовании операторного подхода в представлении функций алгебры логики в классах расширенных ПНФ и в классе обратимых схем RS, методы комбинаторики при поиске «сложных» функций в классах расширенных ПНФ, методы теории функций алгебры логики при получении границ значения функции Шеннона сложности представлений функций алгебры логики в указанных классах, методы теории функциональных систем в конструировании обратимых схем, технология параллельного программирования при получении значения сложности обратимой функции в классе обратимых схем R.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и научных семинарах: международный российско-китайский семинар «Алгебра и логика» (Иркутск, 2007 г.), международная конференция «Алгебра и ее приложения» (Красноярск, 2007), российская школа-семинар, посвященная 60-летию со дня рождения Ю. Е. Шишмарева «Синтаксис и семантика логических систем» (Владивосток, 2008 г.), XVIII международная школа-семинар «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика О. Б. Лупанова (Пенза, 2009 г.), российская 3-я школа-семинар, посвященная 80-летию со дня рождения А. И. Кокорина «Синтаксис и семантика логических систем» (Иркутск, 2010 г.), XIX международная конференция по мягким вычислениям и измерениям SCM'2016 (Санкт-Петербург, 2016), XX международная конференция по мягким вычислениям и измерениям

SCM'2017 (Санкт-Петербург, 2017), 5-я российская школа-семинар «Синтаксис и семантика логических систем» (Улан-Удэ, 2017 г.), XXI международная конференция по мягким вычислениям и измерениям SCM'2018 (Санкт-Петербург, 2018), X международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 2018), международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2018).

Публикации автора по теме диссертации. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ, отражающих основное содержание диссертации. В том числе 4 работы в журналах, рекомендованных ВАК РФ, 3 работы опубликованы в сборнике научных трудов, входящим в базу данных международного цитирования Scopus. Имеются 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 9 параграфов, заключения и списка литературы.

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации, положения, выносимые на защиту, относятся к личному вкладу автора. Программы алгоритмов, вычислительные результаты, доказательства разработаны и получены автором. Руководитель ставил исследовательские задачи, осуществлял подбор теоретических подходов, методов, применяемых в исследованиях, консультировал в выборе эффективных способов построения алгоритмов и в содержательном оформлении результатов.

Основное содержание работы

Во **введении** дается обоснование актуальности темы исследований, определяются основные понятия и терминология, принятые при изложении результатов.

Первая глава посвящена задаче нахождения сложности функций алгебры логики в классах расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{\mathtt{b}}$ и EH. В **первом** параграфе через рассмотрение классов $H_{\mathtt{b}}$ пучков вида $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{1}})$, в которых $\mathtt{a}^{\tilde{0}} = \mathtt{b}$, построен класс расширенных двупорожденных операторных форм:

$$EH_{\mathtt{b}} = \bigcup_{\mathtt{A} \in H_{\mathtt{b}}} E_{\mathtt{A}},$$

где $E_{\mathtt{A}} = \bigcup_{\tilde{\delta} \in \{0,1\}^n} \{\mathtt{T}_{\tilde{\delta}}\} \cup \{\mathtt{A}\}$ называется расширением двупорожденного операторного пучка $\mathtt{A}$, если операторный пучок $\mathtt{T}_{\tilde{\delta}} = (\mathtt{t}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{1}})$ строится следующим образом:

$$\mathtt{t}^{\tilde{\tau}} = \begin{cases} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, & \text{если } \tilde{\tau} \neq \tilde{\delta}, \\ \mathtt{c}, & \text{если } \tilde{\tau} = \tilde{\delta}; \end{cases} \qquad \mathtt{c} = \textstyle\sum_{\tilde{\tau}} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}.$$

Если через H обозначить класс всех двупорожденных операторных форм, то $EH = \bigcup_{\mathtt{A} \in H} E_{\mathtt{A}}$ обозначает класс всех расширенных двупорожденных операторных форм.

Во **втором** параграфе получено точное значение функции Шеннона сложности представлений функций алгебры логики в любом из классов расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{\mathfrak{b}}$.

Сложностью $l(f)$ операторной формы $OF(f)$ вида (1) функции f называется число $l(f) = \sum_{\tilde{\tau} \in \{0,1\}^n} \alpha_{\tilde{\tau}}$.

Пусть K – класс базисных операторных пучков. Тогда сложность функции f в классе K равна: $L_K(f) = \min_{OF(f)}(l(f))$ по всем операторным формам $OF(f)$ функции f, построенным по пучкам класса K.

Функция Шеннона сложности представления всех функций алгебры логики в классе K равна: $L_K(n) = \max_{f \in B_n}(L_K(f))$.

Для получения значения верхней границы функции Шеннона сложности представлений функций алгебры логики в любом из классов $EH_{\mathfrak{b}}$ предварительно доказывается следующее предложение:

Предложение 1. *Для любого класса $EH_{\mathfrak{b}}$, где $\mathfrak{b}$ оператор длины n, сложность $L_{EH_{\mathfrak{b}}}(f)$ функции $f(\tilde{x})$ равна:*

$$L_{EH_{\mathfrak{b}}}(f) = \min\{\min_{OF(f)}\{l(f)\}; 2^n - \max_{OF(f)}\{l(f)\} + 1\},$$

по всем операторным формам $OF(f)$, построенным по пучкам класса $H_{\mathfrak{b}}$.

Следствие 1. *Значение функции Шеннона сложности представлений всех функций алгебры логики в любом из классов $EH_{\mathfrak{b}}$ удовлетворяет неравенству:*

$$L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n) \le \frac{1}{2} 2^n.$$

Для получения значения нижней границы функции Шеннона были получены 6 последовательностей множеств функций

$$M_n^j = \{p_n^j(\tilde{x}), q_n^j(\tilde{x}), t_n^j(\tilde{x})\},\ n \ge 3,\ j \in \{1, 2, ..., 6\},$$

функции которых определяются индуктивно.

При $n = 3$ функции $p_3^j(x_1, x_2, x_3)$, $q_3^j(x_1, x_2, x_3)$, $t_3^j(x_1, x_2, x_3)$ представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Функции $p_3^j(x_1, x_2, x_3)$, $q_3^j(x_1, x_2, x_3)$, $t_3^j(x_1, x_2, x_3)$

j	$p_3^j(x_1, x_2, x_3)$	$q_3^j(x_1, x_2, x_3)$	$t_3^j(x_1, x_2, x_3)$
1.	00011011	11010001	11001010
2.	10100001	11001101	01101100
3.	01010011	10001011	11011000
4.	01011101	01100101	00111000
5.	10111010	00011100	10100110
6.	01000110	10110100	11110010

При $n > 3$ функции $p_n^j(\tilde{x}),\ q_n^j(\tilde{x}),\ t_n^j(\tilde{x})$ определяются следующим образом:

$$p_n^j(\tilde{x}) = x_1 q_{n-1}^j(x_2, ..., x_n) \oplus \bar{x}_1 p_{n-1}^j(x_2, ..., x_n),$$
$$q_n^j(\tilde{x}) = x_1 t_{n-1}^j(x_2, ..., x_n) \oplus \bar{x}_1 q_{n-1}^j(x_2, ..., x_n),$$
$$t_n^j(\tilde{x}) = x_1 p_{n-1}^j(x_2, ..., x_n) \oplus \bar{x}_1 t_{n-1}^j(x_2, ..., x_n)$$

по всем $j \in \{1, 2, ..., 6\}$.

Функции множеств M_n^j обладают свойствами, представленными в следующем предложении:

Предложение 2. *Для функций p_n^j, q_n^j, t_n^j множеств M_n^j, $j \in \{1, 2, ..., 6\}$, $n \geq 3$, справедливы следующие равенства:*

$$p_n^j \oplus q_n^j \oplus t_n^j = 0,$$
$$p_n^j = x_1 t_{n-1}^j \oplus p_{n-1}^j, \quad p_n^j = \bar{x}_1 t_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j,$$
$$q_n^j = x_1 p_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j, \quad q_n^j = \bar{x}_1 p_{n-1}^j \oplus t_{n-1}^j,$$
$$t_n^j = x_1 q_{n-1}^j \oplus t_{n-1}^j, \quad t_n^j = \bar{x}_1 q_{n-1}^j \oplus p_{n-1}^j.$$

Теорема 1. *Для любого класса $H_{\mathfrak{b}}$ существует последовательность функций p_n, q_n, t_n таких, что значения сложностей $l(p_n), l(q_n), l(t_n)$ ($n \geq 3$) операторных форм этих функций в классе $H_{\mathfrak{b}}$ либо равны $\frac{1}{2}2^n$, либо попарно различны и принадлежат множеству $\left\{\frac{1}{2}2^n - 1,\ \frac{1}{2}2^n,\ \frac{1}{2}2^n + 1\right\}$.*

Теорема 2. *Для любого класса $EH_{\mathfrak{b}}$* при $n \geq 3$

$$L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n) \geq \frac{1}{2}2^n - 1.$$

В **третьем** параграфе получено новое значение нижней границы функции Шеннона сложности представлений всех функций алгебры логики в классе EH. Для этого была построена новая последовательность множеств функций

$$V_n = \{p_n(x_1, ..., x_n), q_n(x_1, ..., x_n), t_n(x_1, ..., x_n)\}\ (n \geq 4):$$

$$1)\ p_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0001011001101001),$$
$$q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110100010000001),$$
$$t_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1111111011101000),$$
$$2)\ p_n(x_1, ..., x_n) = x_n q_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) \oplus \bar{x}_n p_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}),$$
$$q_n(x_1, ..., x_n) = x_n t_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) \oplus \bar{x}_n q_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}),$$
$$t_n(x_1, ..., x_n) = x_n p_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) \oplus \bar{x}_n t_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}).$$

Предложение 3. *Для функций из $V_n = \{p_n,\ q_n,\ t_n\}$ ($n \geq 4$) справедливы следующие равенства:*

$$p_n \oplus q_n \oplus t_n = 0,$$
$$p_n = x_1 t_{n-1} \oplus p_{n-1}, \quad p_n = \bar{x}_1 t_{n-1} \oplus q_{n-1},$$
$$q_n = x_1 p_{n-1} \oplus q_{n-1}, \quad q_n = \bar{x}_1 p_{n-1} \oplus t_{n-1},$$

$$t_n = x_1 q_{n-1} \oplus t_{n-1}, \quad t_n = \bar{x}_1 q_{n-1} \oplus p_{n-1}.$$

Теорема 3. При $n \geq 4 \quad L_{EH}(n) \geq \left\lfloor \frac{5}{12} 2^n \right\rfloor$.

Отметим, что с учетом найденного ранее [23] значения верхней границы функции Шеннона в классе EH, получается следующее неравенство:

$$\left\lfloor \frac{5}{12} 2^n \right\rfloor \leq L_{EH}(n) \leq \frac{1}{2} 2^n.$$

Функции множества V_n в классе H имеют следующую сложность:

Предложение 4. *Для любой функции* $f_n \in V_n$ $(n \geq 4)$

$$L_H(f_n) = \begin{cases} \frac{1}{2} 2^n - 2, & \text{при четном } n, \\ \frac{1}{2} 2^n - 3, & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Во **второй** главе исследуется задача получения оценки сложности представлений $(n,1)$-функций многовыходными обратимыми функциями в классе обратимых схем RS. В **четвертом** параграфе рассматриваются способы задания обратимой функции $F(\tilde{x}) = (f_1(\tilde{x}) ... f_n(\tilde{x}))$.

1. *Таблица значений.* Пусть каждому набору $\tilde{\sigma}$ сопоставляется набор $\tilde{\alpha}_{\tilde{\sigma}}$ такой, что $\tilde{\alpha}_{\tilde{\sigma}} = (f_1(\tilde{\sigma}) ... f_n(\tilde{\sigma}))$. Тогда по всем $\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^n$ получим таблицу значений обратимой функции $F(\tilde{x})$.

2. *Подстановка.* Набору $\tilde{\sigma} = (\sigma_1 ... \sigma_n)$ поставим в соответствие число $X_{\tilde{\sigma}} = \sigma_1 \cdot 2^{n-1} + ... + \sigma_n \cdot 2^0$, а набору $\tilde{\alpha}_{\tilde{\sigma}}$ – число i_X. Тогда таблица значений обратимой функции $F(\tilde{x})$ ассоциируется с подстановкой:

$$P_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & X & \dots & 2^n - 1 \\ i_0 & i_1 & i_2 & \dots & i_X & \dots & i_{2^n - 1} \end{pmatrix}$$

3. *Матрица.* На множествах двоичных наборов $\tilde{\sigma}$ индуктивно введем следующее отображение φ :

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \varphi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\varphi(\sigma_1 ... \sigma_{n-1} \sigma_n) = \varphi(\sigma_1 ... \sigma_{n-1}) \otimes \varphi(\sigma_n),$$

где $\otimes$ обозначает кронекерово произведение векторов.

Тогда для обратимой функции $F(\tilde{x})$ *подстановочная матрица* M_F порядка 2^n определяется следующим образом: столбец матрицы M_F с номером $\tilde{\sigma}$ равен $\varphi(\alpha_{\tilde{\sigma}}) = \varphi(f_1(\tilde{\sigma}) ... f_n(\tilde{\sigma}))$ и матрица

$$M_F = (\varphi(\alpha_{\tilde{0}}) ... \varphi(\alpha_{\tilde{\sigma}}) ... \varphi(\alpha_{\tilde{1}})).$$

4. Схемное представление. Схема, состоящая из n входов и n выходов, называется *обратимой*, если по значениям на выходах в схеме однозначно можно получить значения на входах. Зададим множества имен $X = \{x_i\}_{i=1}^n$, $Y = \{y_i\}_{i=1}^n$ и сопоставим входам имена x_i, выходам имена y_i.

[23] Избранные вопросы теории булевых функций; Под ред. С. Ф. Винокурова и Н. А. Перязева. М. : Физматлит, 2001. С. 152–154

Одна изолированная вершина, являющаяся входом и выходом одновременно, представляет тривиальную логическую схему (рис. 1 – а)). Пустая логическая схема S_0 с n входами и n выходами реализует тождественную функцию $I:\ \{\tilde{\alpha}\} \to \{\tilde{\alpha}\}$, по всем наборам $\tilde{\alpha}$ (рис. 1 – б)).

Логическая схема S содержит элементы (вентили) E_i с n входами и выходами. Элементы E_i могут быть двух типов: N_i и B_j. Для вентилей N_i на вход x_i, где $i \in \{1, 2, ..., n\}$ «помещается» объект, как показано на рисунке 1 – в). Каждому вентилю N_i сопоставляется функция Тоффоли $T_0^n(x_i)$ так, что вход x_i преобразуется в выход

$$y_i = \bar{x}_i,$$

а входы x_l $(l \neq i)$, преобразуются в выходы $y_l = x_l$. На рисунке 1 – г) изображен вентиль $B_j^{i_1,...,i_k}$. Для него на входах $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$, x_j располагаются объекты в виде окружностей и кругов; на один вход помещается не более одного объекта, круг только один и находится на входе j, $\{i_1, ..., i_k, j\} \subset \{1, ..., n\}$ и $i_1 \neq j, \ldots, i_k \neq j$. Каждому вентилю $B_j^{i_1,...,i_k}$ сопоставляется функция Тоффоли $T_k^n(x_{i_1}, ..., x_{i_k}, x_j)$ так, что вход x_j преобразуется в выход

$$y_j = x_j \oplus x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_k},$$

где $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ обозначают те входы, на которые помещены окружности; входы x_l $(l \neq j, l \neq i_1, \ldots, l \neq i_k)$, преобразуются в выходы $y_l = x_l$.

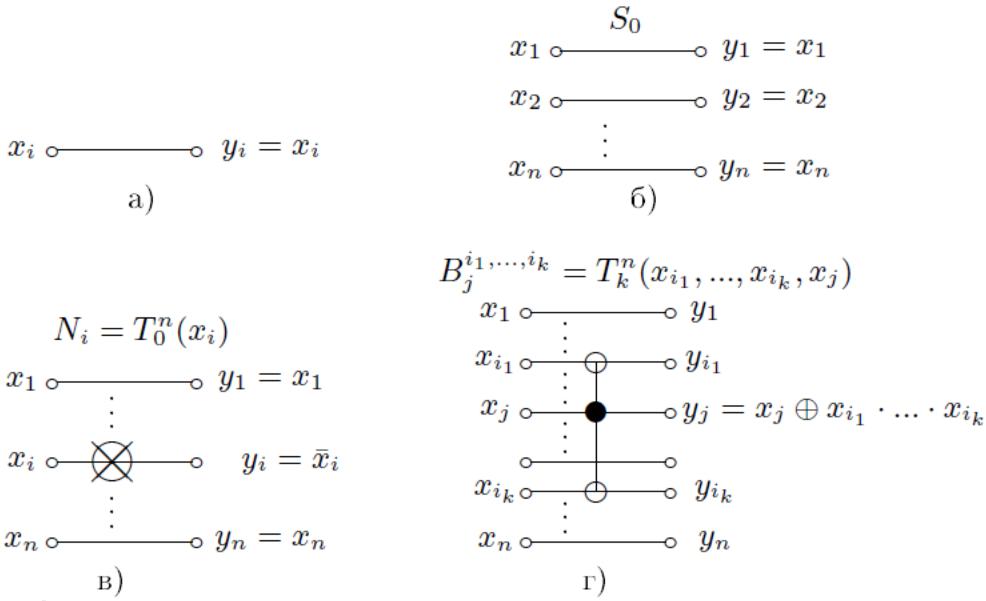

Рис. 1: Структурное описание обратимой схемы: а) тривиальная обратимая схема, б) пустая обратимая схема, в) элемент N_i, г) элемент $B_j^{i_1,...,i_k}$

Если элементу E_i сопоставлена обратимая функция $T_i^n \in T$ то будем говорить, что *элемент* E_i *реализует функцию* T_i^n.

Пусть схема S с n входами и n выходами состоит из двух элементов E_1, E_2, которым соответствуют функции Тоффоли T_{1,i_1}^n, T_{2,i_2}^n $(i_1, i_2 \in \{0, 1, ..., n-1\})$. Тогда схема S реализует некоторую обратимую функцию $F(\tilde{x})$, являющуюся суперпозицией функций T_{1,i_1}^n, T_{2,i_2}^n.

Индуктивный переход основан на операции *склейки схем*. Пусть схема S_1 с входами $x_1^1, ..., x_n^1$ и выходами $y_1^1, ..., y_n^1$ реализует обратимую функцию $F_1(\tilde{x})$, а схема S_2 с входами $x_1^2, ..., x_n^2$ и выходами $y_1^2, ..., y_n^2$ реализует функцию $F_2(\tilde{x})$. Тогда схема S_3 является результатом *склейки* двух схем S_1 и S_2, если выходы $y_1^1, ..., y_n^1$ схемы S_1 соединены с входами $x_1^2, ..., x_n^2$ схемы S_2, причем, $y_i^1 = x_i^2$ по всем i от 1 до n. Схема S_3 реализует обратимую функцию $F_1(F_2)$, которая является суперпозицией функций F_1 и F_2.

Пусть сложность обратимой схемы S равна числу элементов схемы; обозначим через R некоторый класс обратимых схем. Тогда сложность $L_R(F)$ обратимой функции F в классе R определяется: $L_R(F) = \min_S(L(S))$, по всем схемам S из R реализующим функцию F. Функция Шеннона $L_R(n)$ для класса B_n^n всех обратимых функций определяется так: $L_R(n) = \max_{F \in B_n^n}(L_R(F))$.

В **пятом** параграфе приведено представление $(n, 1)$-функции f обратимой функцией вида F^r и метод построения обратимых схем класса RS, если соответствующая $(n, 1)$-функция f представлена в классе ZhE.

Обратимым представлением $(n, 1)$-функции $f(\tilde{x})$ будем называть обратимую $(n+1, n+1)$-функцию

$$F^r(\tilde{x}_n^0) = (f_0(\tilde{x}_n^0),\ f_1(\tilde{x}_n^0),\ ...,\ f_n(\tilde{x}_n^0))$$

такую, что $\quad f_0(\tilde{x}_n^0) = x_0 \oplus f(\tilde{x}), \quad f_i(\tilde{x}_n^0) = x_i \quad$ по всем $1 \le i \le n$.

Выделим подмножество $Y \subset B_n^n$ обратимых функций вида $F^r(\tilde{x}_n^0)$.

Предложение 5. $Y \subset [T^r]$.

В рамках второй главы класс ZhE строится через функцию элементарной конъюнкции $K_n^{\tilde{\sigma}} = x_1^{\sigma_1} \cdot ... \cdot x_n^{\sigma_n}$ и оператор производной $d^{\tilde{\tau}}$. При таких обозначениях базисом поляризованного полинома Жегалкина поляризации $\tilde{\sigma}$ является следующее множество функций $Zh_{\tilde{\sigma}} = \{d^{\tilde{\tau}}(K_n^{\tilde{\sigma}}),\ \tilde{\tau} \in \{0,1\}^n\}$ и класс поляризованных полиномов Жегалкина: $Zh = \bigcup_{\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^n} \{Zh_{\tilde{\sigma}}\}$. Тогда, если через $K_n^{\bar{\tilde{\sigma}}}$ обозначить конъюнкцию $x_1^{\bar{\sigma}_1} \cdot ... \cdot x_n^{\bar{\sigma}_n}$, то

$$\begin{gathered} Zh_{\tilde{\sigma}}^{\tilde{\delta}} E = Zh_{\tilde{\sigma}} \setminus \{d^{\tilde{\delta}}(K_n^{\tilde{\sigma}})\} \cup \{K_n^{\bar{\tilde{\sigma}}}\}; \\ Zh_{\tilde{\sigma}} E = \bigcup_{\tilde{\delta}} \{Zh_{\tilde{\sigma}}^{\tilde{\delta}} E\} \cup \{Zh_{\tilde{\sigma}}\}; \\ ZhE = \bigcup_{\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^n} Zh_{\tilde{\sigma}} E. \end{gathered}$$

Пусть $(n, 1)$-функция $f(\tilde{x})$ в базисе $Zh_{\tilde{\sigma}}$ имеет представление:

$P = \sum_{\tilde{\tau}} \alpha_{\tilde{\tau}} d^{\tilde{\tau}}(K_n^{\tilde{\sigma}})$, где $\alpha_{\tilde{\tau}} \in \{0,1\}$. Тогда в базисе $Zh_{\tilde{\sigma}}^{\tilde{\delta}} E$ функция f имеет вид:

$$P^+ = \begin{cases} P, \text{ если } \alpha_{\tilde{\delta}} = 0, \\ \sum_{\tilde{\tau}} \bar{\alpha}_{\tilde{\tau}} d^{\tilde{\tau}}(K_n^{\tilde{\sigma}}) \oplus K_n^{\bar{\tilde{\sigma}}}, \text{ если } \alpha_{\tilde{\delta}} = 1, \end{cases} \quad \text{для любого } \tilde{\delta} \in \{0,1\}^n.$$

Поскольку вид обратимой схемы $S \in RS$ (выбранная последовательность элементов функций множества T^r) зависит от вида полиномиального представления P $(n,1)$-функции f, то будем говорить, что обратимая схема S реализует полином P функции f и тогда через RS обозначается класс обратимых схем, реализующих полиномы класса ZhE (ZhE-полиномы) $(n,1)$-функций f.

Значение функции Шеннона $L_{RS}(n)$ сложности обратимых реализаций ZhE-полиномов $(n,1)$-функций в классе обратимых схем RS определяется: $L_{RS}(n) = \max_{F^r \in Y}\{\min_{S \in RS}\{L(S)\}\}$, где $L(S)$ – число элементов в обратимой схеме S, реализующей ZhE-полином функции $f \in B_n$.

В **шестом** параграфе получено асимптотически точное значение функции Шеннона $L_{RS}(n)$.

Теорема 5. $L_{RS}(n) = \frac{1}{2}2^n + \gamma$, где $1 \le \gamma \le 2n$

Следствие 2. $L_{RS}(n) \cong \frac{1}{2}2^n$.

В **третьей** главе описаны алгоритмы нахождения сложности представлений функций алгебры логики в классах расширенных двупорожденных операторных форм и обратимых схем, приведена их реализация и вычислительные результаты.

В **седьмом** параграфе описан алгоритм нахождения сложности представлений функции алгебры логики f в классах расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{ъ}$, EH.

В **восьмом** параграфе описан алгоритм нахождения сложности обратимых реализаций ZhE-полиномов функции алгебры логики в классе обратимых схем RS.

В **девятом** параграфе описаны алгоритмы нахождения точного и приближенного значений сложности многовыходных обратимых функций в классе обратимых схем R.

Построенные алгоритмы реализованы на языке C++ последовательными и параллельными программами; расчеты выполнялись на оборудовании центра коллективного пользования «Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН» [24]. Алгоритмы использованы в экспериментальной системе поддержки принятия решений на основе четырехзначной логики, созданной в рамках выполнения проекта №14.579.21.0092 по федеральной целевой программе «Исследования и разработки по приоритетным направлениям раз-

[24] Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН [Электронный ресурс]: сайт, Иркутск: ИДСТУ СО РАН, URL: http://hpc.icc.ru (дата обращения: 08.09.2017).

вития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы».

Заключение

Основные научные результаты диссертации следующие:

1. Найдено значение нижней границы функции Шеннона сложности представлений функций алгебры логики в классах расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{\text{ъ}}$. Для этого построены последовательности множеств функций, для которых доказано, что их сложность отличается на 1 от известного значения верхней границы функции Шеннона.

2. Найдено новое значение нижней границы функции Шеннона сложности представлений функций алгебры логики в классе расширенных двупорожденных операторных форм EH. Для этого построена последовательность множеств «сложных» функций.

3. Исследование сложности обратимых реализаций ZhE-полиномов функций алгебры логики в классе обратимых схем RS, построенных через элементы Тоффоли определенного вида, завершилось нахождением нижней и верхней границами значения функции Шеннона, отличающимися на линейное слагаемое, что дает асимптотически точное значение функции Шеннона.

4. Разработан алгоритм нахождения сложности представлений функций алгебры логики в классах расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{\text{ъ}}$ и EH, среди которых для обратимой реализации функций алгебры логики был выбран класс $EH_{d\ldots d}$, являющейся классом расширенных поляризованных полиномов Жегалкина ZhE. Разработан алгоритм нахождения сложности обратимых реализаций ZhE-полиномов функций алгебры логики в классе обратимых схем RS. Вычислительные результаты данных алгоритмов привели к предположениям о значении сложности обратимых реализаций ZhE-полиномов функций алгебры логики в классе обратимых схем RS, и о сложности представлений функций алгебры логики в классах $EH_{\text{ъ}}$ и EH. Предположения были доказаны.

5. Разработаны алгоритмы минимизации многовыходных обратимых функций в классе обратимых схем R, построенных на элементах Тоффоли, которые позволяют найти точное и приближенное значение сложности обратимой функции. Алгоритмы реализованы параллельными программами.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. *Францева, А.С.* Приближенный алгоритм вычисления сложности обратимой функции в базисе Тоффоли / А.С. Францева, С.Ф. Винокуров //

Изв. Ирк. государств. университета. — Серия : Математика. — 2011. — Т. 4, № 4. — С. 12–26.

2. *Францева, А.С.* Сложность представлений многовыходных функций алгебры логики / С.Ф. Винокуров, А.С. Францева // Изв. Ирк. государств. университета. — Серия : Математика. — 2016. — Т. 16. — С. 30–42.

3. *Frantseva, A.* Complexity of representations of multiple-output Boolean functions in the reversible logic circuits / A. Frantseva, S. Vinokurov // Proceeding of the 19th International Conference on Soft Computing and Measurement (SCM), St.Petersburg, Russia. — 2016. — P. 374–376. https://doi.org/10.1109/SCM.2016.7519785.

4. *Frantseva, A.S.* Algorithm for constructing minimal representations of multi-ple-output Boolean functions in the reversible logic circuits / S.F. Vinokurov, L. V. Ryabets, S.I. Todikov, A.S. Frantseva // Proceedings of the 20th International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM), St.Petersburg, Russia. — 2017. — P. 541–543. https://doi.org/10.1109/SCM.2017.7970644.

5. *Францева, А.С.* Алгоритм минимизации функций алгебры логики в классе обратимых схем Тоффоли / А.С. Францева // Изв. Ирк. государств. университета. — Серия : Математика. — 2018. — Т. 25. — С. 144–158. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.25.144.

6. *Францева, А.С.* Сложность представлений булевых функций в классах расширенных двупорожденных операторных форм / А.С. Францева // Сибирские Электронные Математические Известия : электронное периодическое издание. — 2019. — Т. 16. — С. 523–541. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.034.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

7. Пат. 2016660636 РФ, Реестр программ для ЭВМ. Программа алгоритма вычисления приближенного значения сложности обратимой функции в базисе Тоффоли / Францева А.С., Винокуров С.Ф., Рябец Л.В. ; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВО «ИГУ» (RU). — № 2016617938/69 ; заявл. 20.07.16 ; опубл. 19.09.16, Бюл. № 10. — 1 с.

8. Пат. 2016660638 РФ, Реестр программ для ЭВМ. Программа алгоритма синтеза обратимых логических схем в базисе Тоффоли / Францева А.С., Винокуров С.Ф., Балюк А.С., Казимиров А.С. ; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВО «ИГУ» (RU). — № 2016617950/69 ; заявл. 20.07.16 ; опубл. 19.09.16, Бюл. № 10. — 1 с.

9. Пат. 2017619310 РФ, Реестр программ для ЭВМ. Программа построения минимального представления многовыходных булевых функций в классе обратимых схем / Францева А.С. Винокуров С.Ф., Рябец Л.В. ; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВО «ИГУ» (RU). — № заявки 2017616741 ; заявл. 11.07.2017 ; опубл. 22.08.17, Бюл. № 9. — 1 с.