МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Малышкин Юрий Андреевич

Асимптотические свойства случайных графов

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова и на кафедре прикладной физики Тверского государственного университета.

Научный руководитель:	**Булинский Александр Вадимович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Круглов Виктор Макарович** доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова
	Лотов Владимир Иванович доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики имени С.Л.Соболева РАН
	Жуковский Максим Евгеньевич кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ

Защита диссертации состоится 9 ноября 2018 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинский горы, д. 1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16–24.
E-mail: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:
https://istina.msu.ru/dissertations/142396211

Автореферат разослан 8 октября 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07,
доктор физико-математических наук, профессор — Власов Виктор Валентинович

Актуальность

Случайные графы - важный математический объект, введеный Эрдешем и Реньи[1]. Изучению их свойств посвящен ряд монографий[2,3]. Случайные графы также имеют широкое практическое применение[4]. Граф Эрдеша-Реньи $G(n,p)$, $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, строится следующим образом. Вводится множество вершин $V = \{v_1, ..., v_n\}$ и независимые случайные величины $X_{i,j}$, $1 \le i < j \le n$, имеющие распределение Бернулли с параметром p. Если $X_{i,j} = 1$, то вершины v_i и v_j соединяются ребром. При этом для каждой пары n, p строится новый граф (p обычно зависит от n). К этой модели близка модель случайного графа $G(n,m)$, $n,m \in \mathbb{N}$, которая представляет собой равномерную выборку из всех графов с n вершинами и m ребрами. Указанные модели являются классическими и всесторонне исследованы [5]. Для них были выявлены различные асимптотические свойства (т.е. свойства, выполненные с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, см., например, [6]), в частности, были найдены размеры наибольшей связанной компоненты, распределение степеней вершин и диаметр полученного графа. Модель Эрдеша-Реньи является статической моделью, т.е. модель для $(n+1)$-ой вершины строится без использования модели для n вершин. В отличие от статических моделей, в динамических моделях граф на $(n+1)$-ой вершине определяется с помощью графа, уже построенного для n вершин. Примером динамической модели графа является граф предпочтительного присоединения, введенный Барабашем и Альберт[7].

С развитием моделей сложных сетей (таких как интернет или социальные сети) возникла необходимость в моделях, обладающих свойствами, отличными от свойств модели Эрдеша-Реньи[8]. Несмотря на большое разнообразие практических приложений, в которых используются сложные сети[9,10], они имеют ряд об-

[1] P. Erdos, A. Renyi. *On random graphs I.* Publ. Math. (Debrecen), 6, 290–297, 1959.

[2] A. Frieze, M. Karonski. Introduction to Random Graphs. Cambridge University Press, Cambridge, 476 p., 2016.

[3] G. Grimmet. Probability on Graphs. Cambridge University Press, Cambridge, 247 p., 2010.

[4] A. Bonato, N. Hadi, P. Horn, P. Pralat, C. Wang. *Models of online social networks.* Internet Math., 6(3), 285—313, 2011.

[5] B. Bollobas. Random Graphs. Second edn. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 73. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[6] М.Е. Жуковский, А.М. Райгородский. *Случайные графы: модели и предельные характеристики.* УМН, 70:1(421), 35-–88, 2015.

[7] A.-L. Barabasi, R. Albert. *Emergence of scaling in random networks.* Science, 286(5439), 509–512, 1999.

[8] M.E.J. Newman. *Models of the small world.* J. Stat. Phys., 101, 819–841, 2000.

[9] M.A. Abdullah, M. Bode, N. Fountoulakis. *Local majority dynamics on preferential attachment graphs.* WAW 2015 Proceedings of the 12th International Workshop on Algorithms and Models for the Web Graph, 9479, 95–106, 2015.

[10] R. Palovics, A.A. Benczur. *Raising graphs from randomness to reveal information networks.* Proceedings of the Tenth ACM International Conference on Web Search and Data Mining, 23–32, 2017.

щих свойств. Одним из основных является степенное распределение степеней[11] вершин[12][13]. Существуют различные модели, описывающие свойства сложных сетей. В частности, стоит упомянуть конфигурационные графы[14], графы пересечения[15] и графы с удалением ребер[16]. Отметим также недавние работы[17,18], в которых исследуются локальные свойства графов предпочтительного присоединения.

Графы предпочтительного присоединения достаточно хорошо описывают поведение сложных сетей[19]. Простейшая модель предпочтительного присоединения строится следующим образом. Имеется начальный граф P_1 (для простоты обычно рассматривается граф, состоящий из двух вершин и ребра между ними, начальный граф не влияет на асимптотические свойства распределения степеней вершин). Затем на каждом шаге построения добавляется одна вершина, из которой проводится одно ребро (в общем случае независимо друг от друга на n-ом шаге проводится m_n ребер). Вершина, в которую проводится ребро, выбирается из уже имеющихся вершин с вероятностями, пропорциональными их степеням.

В дальнейшем были предложены различные вариации этой модели, использующие дополнительные параметры. Это позволяет строить более гибкие модели со свойствами, отличными от тех, которые присущи классическим моделям. В частности, стоит упомянуть предпочтительное присоединение (т.е. процедуру добавления вершины и ребра) с весовой функцией[20], последовательное предпочтительное присоединение[21], предпочтительное присоединение с весом

[11] Здесь и далее приходится использовать слово степень в разных смыслах. Степень вершины - это число ее соседей (вершин, соединенных с ней ребром). Определение степенного закона распределения см., например, в[12], с. 7.

[12] R. Hofstag. Random Graphs and Complex Networks. Cambridge University Press, Cambridge, 375 p., 2016.

[13] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabasi. Internet: diameter of the world-wide web. Nature, 401, 130–131, 1999.

[14] Ю.Л. Павлов, Е.В. Феклистова. *О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа.* Дискретная математика, 28:2, 58–70, 2016.

[15] M. Deijfen, W. Kets. *Random intersection graphs with tunable degree distribution and clustering.* Probability in the Engineering and Informational Sciences, 23:4, 661–674, 2009.

[16] E. Thörnblad. *Asymptotic degree distribution of a duplication–deletion random graph Model.* Internet Math., 11:3, 289–305, 2015.

[17] A. Krot, L. Ostroumova-Prohorenkova. *Local Clustering Coefficient in Generalized Preferential Attachment Models.* Internet Math., 2017.

[18] L. Ostroumova-Prokhorenkova, A. Raigorodskii, P. Pralat. *Modularity of complex networks models.* Internet Math., 2017.

[19] S.-H. Yook, H. Jeong, A.-L. Barabasi. *Modeling the internet's large-scale topology.* PNAS, 99:22, 13382–13386, 2002.

[20] K.B. Athreya. *Preferential attachment random graphs with general weight function.* Internet Math., 4:4, 401–418, 2008.

[21] E. Peköz, A. Röllin, N. Ross. *Joint degree distributions of preferential attachment random graphs.* Adv. Appl. Probab., 49:2, 368–387, 2017.

вершин[22] и геометрическое предпочтительное присоединение[23].

В диссертации исследуется новый вариант модели графов предпочтительного присоединения. На каждом шаге рассматривается набор из d вершин, выбираемых последовательно с возвращением из уже имеющихся вершин с вероятностями, пропорциональными их степеням. Затем из этих вершин по определенному правилу выбирается вершина, в которую проводится ребро из новой вершины. В диссертации это правило будет основано на учете степеней вершин в упомянутой выборке. Мы рассмотрим два случая - выбор вершины (из выделенных вершин) с наименьшей степенью и с наибольшей степенью. Предложенная модель представляет интерес, поскольку демонстрирует новые асимптотические свойства распределния степеней вершин графов, отличающиеся от тех, которые хорошо известны для классической модели предпочтительного присоединения. При этом, в отличии от известной модели Мори[24], установлены три принципиально различных типа асимптотического поведения максимальной степени вершины в графе P_n при $n \to \infty$.

Выбор вершины с наименьшей степенью из d выделенных вершин может рассматриваться как развитие модели с выбором наименее заполненной шарами урны [25]. В урновой модели добавление должной процедуры выбора позволило уменьшить порядок числа шаров в наиболее заполненной урне с $\ln n$ до $\ln \ln n$. В диссертации показано, что асимптотические свойства урновой модели проявляются и в графе предпочтительного присоединения с указанным выбором вершины с наименьшей степенью. При этом порядок роста (при $n \to \infty$) степени вершины, имеющей максимальную степень, уменьшается с $n^{1/2}$ [7] до $\ln \ln n$ ([3]). Схожий эффект был обнаружен автором работы[20], где с помощью использования сублинейной весовой функции[26] порядок максимальной степени вершины в графе был понижен с $n^{1/2}$ до $(\log n)^q$, $q > 1$.

В отличие от главы 1, в которой величина $d \in \mathbb{N}$ была фиксированной (и неслучайной), далее мы рассматриваем последовательность $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в $\mathbb{N}$. Для простоты обозначений будем считать, что d - случайная величина с таким же распределением как у d_1 (можно считать, что в первой главе d - постоянная величина, $d > 1$). При этом величина d_n, используемая для построения графа P_{n+1} из графа P_n, не зависит от набора случайных величин, применяемых для построения графа P_n. Этот набор будет описан в главе 2. Теперь вместо степе-

[22] S. Dereich, M. Ortgiese. *Robust analysis of preferential attachment models with fitness.* Combin. Probab. Comput., 23:3, 386–411, 2014.

[23] J. Jordan, A.R. Wade, *Phase transitions for random geometric preferential attachment graphs*, Adv. Appl. Probab., 47:2, 565–588, 2015.

[24] T.F. Móri. *On random trees.* Studia Sci. Math. Hungar., 39, 143–155, 2002.

[25] Y. Azar, A.Z. Broder, A.R. Karlin, E. Upfal. *Balanced allocations.* SIAM J. Comput., 29:1, 180–200, 1999.

[26] Действительная функция $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется сублинейной, если $f(n) \sim n^p$ при $n \to \infty$, $0 < p < 1$.

ней вершин графа P_n мы будем использовать в процессе построения графа P_{n+1} эти степени, измененные на некоторый параметр $\beta > -1$. Таким образом, вместо $\deg_{P_n} v$, где $v \in V(P_n)$, мы рассматриваем $\deg_{P_n} v + \beta$. Ограничение $\beta > -1$ обеспечивает то, что $\deg_{P_n} v + \beta > 0$.

В случае выбора вершины с наибольшей степенью в зависимости от параметров модели (число $\beta > -1$ и распределение случайной величины d) возможны три варианта асимптотического поведения максимальной степени вершины в графе. При $\mathbb{E}d < 2+\beta$ максимальная степень вершины имеет порядок $n^{\mathbb{E}d/(2+\beta)}$, что соответствует стардантным моделям предпочтительного присоединения[27]. При $\mathbb{E}d > 2 + \beta$ максимальная степень вершины растет линейно по n. Похожий эффект возникает при рассмотрении суперлинейной[28] весовой функции[20]. При этом если в случае суперлинейной весовой функции предел эмпирического распределения степеней вершин вырожден (т.е. число вершин любой степени, отличной от 1, имеет порядок, меньший n), то в нашей модели в пределе возникает невырожденное эмпирическое распределение степеней вершин. Также в диссертации исследован переходный случай $\mathbb{E}d = 2 + \beta$, в котором максимальная степень вершины имеет порядок $n/\ln n$. Таким образом, удалось получить полное описание возможного асимптотического поведения максимальной степени вершины в предложенной нами модели случайных графов.

Результаты и методы работы [3] получили продолжение в работе Хаслегрейва и Джордана[29], в которой был рассмотрен выбор s-ой по величине степени вершины из r вершин для постоянных s и r. При этом новых эффектов в поведении максимальной степени вершины не наблюдается, в завсимости от соотношения между s и r максимальная степень вершины имеет либо порядок $\ln \ln n$, либо линейный порядок.

Цели и задачи

Целью работы являлось исследование новой модели предпочтительного присоединения вершин случайного графа. В рамках этой модели ставились задачи установления предельных теорем, описывающих как асимптотическое поведение максимальной степени вершины в графе, так и числа вершин фиксированной степени.

При этом использовались следующие две процедуры предпочтительного присоединения вершин:

1) с выбором вершины, имеющей наименьшую степень,
2) с выбором вершины, имеющей наибольшую степень.

[27] T.F. Móri. *The maximum degree of the Barabási-Albert random tree.* Combin. Probab. Comput., 14:3, 339–348, 2005.

[28] Действительная функция $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется суперлинейной, если выполнено условие $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} < \infty$.

[29] J. Haslegrave, J. Jordan. *Preferential attachment with choice.* Random Struct. Algor., 48, 751-–766, 2016.

Научная новизна

Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

В первой главе рассматривается присоединение новой вершины к вершине с минимальной степенью среди d (определенным образом) выделенных вершин. Доказано, что в рамках предложенной модели максимальная степень вершины в графе с n вершинами растет п.н. как $\ln\ln n/\ln d$. Для урновой модели схожий по смыслу результат был получен в работе Азара, Бродера, Карлин и Упфала[26]. При этом если в урновой модели добавление выбора урны уменьшает порядок наиболее заполненой урны с $\ln n$ до $\ln\ln n$, то в нашей модели предпочтительного присоединения порядок максимальной степени вершины в графе уменьшается с $n^{1/2}$ до $\ln\ln n$.

Во второй и третьей главах рассматривается присоединение новой вершины к вершине с максимальной степенью среди d выделенных вершин (для случайного d, как было отмечено на предыдущей странице). Данная модель обобщает модель, рассмотренную Мори[28]. При этом в случае $\mathbb{P}(d = 1) = 1$ получается упомянутая модель дерева предпочтительного присоединения. Основное внимание нами уделяется исследованию максимальной степени вершины в графе в зависимости от параметров модели. Доказано, что если $\mathbb{E}d < 2 + \beta$, то максимальная степень вершины имеет порядок $n^{\mathbb{E}d/(2+\beta)}$ (n - число вершин в графе), что соответствует степенному распределению степеней вершин, которое широко используется для моделирования сложных сетей. Если $\mathbb{E}d > 2 + \beta$, то в графе найдется вершина, степень которой растет линейно по n. Данный эффект для иных моделей предпочтительного присоединения исследовался в работе Атреа[20]. В случае $\mathbb{E}d = 2 + \beta$ максимальная степень вершины в графе растет как $n/\ln n$. Данный эффект не наблюдался в других моделях.

Для случаных величин $Z_1, ..., Z_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим порядковые статистики $Z_{(1)} \leq ... \leq Z_{(n+1)}$ (порядок нумерации совпадающих величин объяснен в главе 1 на с. 12). Назовем k-ым максимумом, где $k = 1, ..., n+1$, величину $Z_{(n+2-k)}$, т.е. $\max_{1\leq i\leq n+1} Z_i = Z_{(n+1)}$. В главе 3 при широких условиях на величину d для случаев $Ed > 2+\beta$ и $\mathbb{E}d < 2+\beta$ найдено для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ асимптотическое поведение (при $n \to \infty$) величины $M_k(n)$, являющейся k-ым максимумом для набора случайных величин $\deg_{P_n} v_i$, $i = 1, ..., n+1$. Граничный случай $\mathbb{E}d = 2 + \beta$ также рассмотрен на примере поведения первого минимума $M_1(n)$. Удалось доказать, что для должным образом нормированных величин $M_1(n)$ имеет место п.н. сходимость к единице, когда $n \to \infty$.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации для новой модели предпочтительного присоединения вершин графа получены следующие основные результаты.

1. Установлено, что максимальная степень вершины в графе предпочтительного присоединения с выбором вершины наименьшей степени из d выделенных вершин имеет п.н. порядок $\ln n/\ln\ln d$, где d - произвольное фиксированное натуральное число, большее единицы.

2. Доказаны закон больших чисел, многомерные центральная предельная теорема и закон повторного логарифма для числа вершин фиксированной степени в модели предпочтительного присоединения с выбором вершины с наибольшей степенью из выделенных d вершин (d - случайное).

3. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдено асимптотическое поведение k-ого максимума величин $\deg_{P_n} v_i$, $i = 1, ..., n+1$. Обнаружен новый эффект роста максимальной степени вершины исследуемого случайного графа при $n \to \infty$.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Рассматриваемая модель обобщает стандартную модель предпочтительного присоединения. Она имеет дополнительные параметры, что позволяет варьировать свойства изучаемых случайных графов. Полученные результаты представляют интерес для специалистов (МГУ имени М.В.Ломоносова, СПбГУ, Математического института имени В.А.Стеклова РАН, Московского физико-технического института, Института проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, Карельского Научного центра РАН и др.), работающих в области теории случайных графов.

Методология и методы диссертационного исследования

Для доказательства основных результатов используется, главным образом, различная вероятностная техника. Применяется также аппарат математического анализа функций.

В первой главе мы применяем ступенчатую индукцию (layered induction), теорию случайных блужданий и оценки вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных величин. Модель, рассматриваемая в данной главе, тесно связана с урновой моделью.

Во второй главе широко используется многомерная стохастическая аппроксимация для получения новых предельных теорем. С ее помощью удается приблизить исследуемые случайные последовательности некоторыми мартингалами.

В третьей главе мы применяем одномерную стохастическую аппроксимацию, теорию случайных блужданий и строим различные вспомогательные мартингалы для установления предельных теорем. В данной главе широко используется понятие выделенной вершины (persistent hub), существование которой позволяет значительно упростить доказательство основных результатов главы.

Соответствие паспорту научной специальности

В диссертации изучаются асимптотические свойства случайных графов и устанавливаются предельные теоремы, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.05 "Теория вероятностей и математическая статистика".

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих международных конференциях:

- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2014”, секция “Математика и механика” ([4], с. 1).
- International Workshop “Probability, Analysis and Geometry”, [5], с. 9, 2014 г.
- Analytical and Computational Methods in Probability Theory and Applications (ACMPT-2017), [6], с. 55.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова:

- Большом семинаре кафедры теории вероятностей под руководством академика РАН, профессора А.Н. Ширяева (2018 г.).
- Семинаре “Асимптотический анализ случайных процессов и полей” под руководством профессора А.В. Булинского (2015-2017 гг., неоднократно).
- Семинаре “Экстремальная комбинаторика и случайные структуры” под руководством д.ф.-м.н. Д.А. Шабанова (2016 г.).

Публикации

Основное содержание работы опубликовано в 4 статьях ([1, 2, 3, 7]), из них 3 включены в международные базы данных (Web of Science и Scopus). Имеются также опубликованные тезисы докладов международных конференциях [4, 5, 6].

Личный вклад автора

Диссертантом совместно с научным руководителем проводились выбор темы, планирование работы, постановка задачи и обсуждение полученных результатов. Результаты, изложенные в первой главе, установлены совместно с профессором E. Paquette. При этом автором диссертации доказаны лемма 3 (сходимость эмпирического распределения степеней вершин), лемма 4, лемма 5 и нижняя оценка в теореме 1. Результаты второй и третьей глав получены лично автором диссертации.

Работа по завершению диссертации проводилась в соответствии с тематическими планами НИР Тверского государственного университета в рамках проектной (№11.1937-2014-К, 2014-2016) и базовой (№3.8032.2017-БЧ) частей государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации.

Структура диссертации

Диссертация объемом 98 страниц состоит из введения, трех глав, заключения, библиографии, содержащей 89 наименований, и списка обозначений.

Основное содержание работы

Во **введение** к диссертации обсуждается актуальность, научная новизна и структура диссертации, формулируются цели и задачи работы, описываются теоретическая и практическая значимость и методы, используемые для получения результатов.

В **первой главе** исследуется модель предпочтительного присоединения с выбором вершины с наименьшей степенью из d вершин, $d \geq 2$, $d \in \mathbb{N}$. Глава состоит из трех разделов. В разделе 1.1 дается описание модели и формулируется основная теорема главы.

Пусть $\deg P_n$ - максимальная степень вершины в дереве P_n.

Теорема 1. *В рамках описанной модели случайных графов существует случайная величина $C = C(\omega)$ такая, что*

$$\mathbb{P}\left(\left|\deg P_n - \frac{\ln\ln n}{\ln d}\right| < C \textit{ для всех } n > 1\right) = 1.$$

Доказательство верхней оценки основано на исследовании динамики функции

$$F_n(k) := \sum_{i=1}^{n+1} (\deg_{P_n} v_i)\mathbf{1}\{\deg_{P_n} v_i \geq k\}, k, n \in \mathbb{N},$$

равной сумме степеней всех вершин, имеющих степень не меньше k. При анализе указанной функции мы применяем ступенчатую индукцию (layered induction), теорию случайных блужданий и оценки вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных величин. Доказательство нижней оценки аналогично доказательству для урновой модели[26].

В разделе 1.2 устанавливается сходимость величин $F_j(k)$ для фиксированного k, к величинам, заданным рекурсивно по формулам

$$\alpha_{1,d} = 1,\ 2\alpha_{k,d} + (k-1)\alpha_{k,d}^d = k\alpha_{k-1,d}^d,\ k > 1.$$

Результат формулируется следующим образом.
Лемма 3. *Для любых чисел $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ и функции $w(n)$ (не зависящей от k и ϵ), $n \in \mathbb{N}$, такой, что $w(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, выполнено соотношение*

$$\mathbb{P}\left(\exists j \geq w(n) \ : \ |F_j(k) - 2j\alpha_{k,d}| > \epsilon j\right) \to 0, \ n \to \infty.$$

Из указанной леммы мы также получаем сходимость $N_k(n)/n \to \frac{2}{k}(\alpha_{k,d} - \alpha_{k+1,d})$ п.н. при $n \to \infty$.

В разделе 1.3 мы завершаем доказательство теоремы 1, используя ступенчатую индукцию по параметру k для функций $F_j(k)$, при этом для каждого k мы получим оценки на $F_j(k)$ для значений j, лежащих в некотором уменьшающемся с ростом k интервале. Стоит отметить, что границы интервала и величина k зависят от n, а полученные неравенства будут выполнятся с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. Итоговая оценка будет строится в несколько этапов.

Вначале мы проверим, что справедливы оценки величины $F_j(k)$, которые убывают по двойной экспоненте от k, для $k_0 \leq k \leq k_*(n)$ и $\phi(n,k) \leq j \leq n$, где $\phi(n,k) \leq n$. Указанные оценки формулируются в виде двух лемм.
Лемма 4. *Пусть $0 < f(k_0) < \frac{1}{e^2 k_0}$ и $f(k+1) = (k+1)f(k)^d$ для $k \geq k_0$. Тогда существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что для всех $j \geq 0$*

$$\exp(-c_1 d^j) \leq f(k_0 + j) \leq \exp(-c_2 d^j).$$

Введем $k_* := \lceil \log_d \log_C (n^{1/2}) \rceil - 1 = \frac{\ln\ln n}{\ln d} + \Theta(1)$, $\rho(n) := \lceil (\ln\ln n)^{1/3} \rceil$ и $\phi(n,k) := \lceil \rho(n) C^{d^{k+1}} \rceil$.
Лемма 5. *Если $\alpha_{k_0,d} < \frac{1}{e^2 k_0}$, то с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, для всех $k_0 \leq k \leq k_*$ и $\phi(n,k) \leq j \leq n$, выполнено неравенство*

$$\frac{F_j(k)}{2j} \leq f(k),$$

где $f(k)$ фигурирует в лемме 4, причем $f(k_0) := (\alpha_{k_0,d} + \frac{1}{e^2 k_0})/2$.

Далее мы получим оценку вида $F_j(k) \leq 2j^{1-\beta}$, $0 < \beta < 1$, выполненную с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, для некоторых $\beta = \beta_0$ и $M > 0$ при $(\ln\ln n)^M \leq j \leq n$ и $k > k_*(n)$. Увеличив k_* на некоторую постоянную величину (зависящую только от β_0), мы можем сделать β в указанной оценке сколь угодно близким к 1. Такая оценка достигается пошагово, с использованием следующего результата.
Лемма 6. *Если существует постоянная $M_1 > 0$ такая, что с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, для некоторого $k \leq \ln\ln n$ выполнено*

неравенство
$$F_j(k) \le 2(j)^{1-\beta}, \quad \forall\ j:\ (2\ln\ln n)^{M_1} \le j \le n,$$
для некоторого $\beta < \frac{1}{d}$, *то существует постоянная* $M_2 > 0$ *такая, что с вероятностью, стремящейся к 1, при* $n \to \infty$,
$$F_j(k+1) \le 2(j)^{1-(d-0.5)\beta}, \quad \forall\ j:\ (2\ln\ln n)^{M_2} \le j \le n.$$

Наконец, мы покажем, что найдется r (зависящее только от β) такое, что при $k(n){=}k_*(n){+}r$ величины $F_j(k(n){+}1)$ равны $F_{j_0}(k(n){+}1)$ при всех $j_0{\le}j{\le}n$ с вероятностью, стремящейся к единице при $n \to \infty$. Указанный результат формулируется следующим образом.

Лемма 7. *Существуют* $M = M(\beta_0) > 0$ *и натуральное* $r = r(\beta_0)$ *такие, что для* $j_0 = (2\ln\ln n)^M$ *с вероятностью, стремящейся к* 1 *при* $n \to \infty$, *выполнено соотношение* $F_j(k_* + r) = F_{j_0}(k_* + r)$ *для всех* $j_0 \le j \le n$.

После этого останется объяснить, почему справедливо утверждение теоремы 1.

Во **второй и третьей главах** рассматривается модель с выбором вершины с наибольшей степенью из случайного числа вершин. Пусть $d, d_1, d_2, ...$ - независимые одинаково распределенные случайные величины и $\beta > -1$ - неслучайный параметр.

Вторая глава состоит из четырех разделов. В разделе 2.1 описывается модель и формулируются усиленный закон больших чисел, многомерная центральная предельная теорема и закон повторного логарифма для числа $N_k(n)$ вершин фиксированной степени k в дереве P_n, которые затем доказываются в последующих разделах. Для доказательства используется многомерная стохастическая аппроксимация. Применяется также аппарат математического анализа функций.

В разделе 2.2 устанавливается усиленный закон больших чисел. Рассмотрим $Z_k(n) = N_k(n)/n$, где $k, n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbb{E}d < \infty$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует* $x_k^* > 0$ *такое, что* $Z_k(n) \to x_k^*$ *п.н. при* $n \to \infty$.

В разделе 2.3 доказывается многомерная центральная предельная теорема. Положим $W_k(n) = (N_1(n)/n, ..., N_k(n)/n)^t$, $\rho_k^* = (x_1^*, ..., x_k^*)$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathbb{E}d^2 < \infty$. *Тогда* $n^{1/2}(W_k(n) - \rho_k^*)$ *сходится по распределению к гауссовскому вектору с нулевым средним и положительно определенной ковариационной матрицей* V_k.

Матрицы V_k, $k \in \mathbb{N}$, определяются в процессе доказательства.

В разделе 2.4 устанавливается закон повторного логарифма.

Теорема 7. *Пусть* $\mathbb{E}d^2 < \infty$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существуют матрицы* H_k *и* Σ_k *размером* $k \times k$ *такие, что с вероятностью* 1 *для собственных* *векторов w_k матрицы H_k*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{1/2} w_k^t(W_k(n)-\rho_k^*)$$

$$=-\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{1/2} w_k^t(Z_k(n)-x_k^*)=(2w_k^t\Sigma_k w_k)^{1/2}.$$

Величины x_k^* и матрицы H_k и Σ_k определяются в процессе доказательства.

В **третьей главе** получены результаты, описывающие асимптотическое поведение величин $M_1(n)\geq M_2(n)\geq ...\geq M_k(n)$ равных k максимальным степеням вершин в графе P_n. Глава остоит из четырех разделов. В разделе 3.1 формулируются две теоремы и устанавливаются вспомагательные результаты, используемые при доказательстве обеих теорем. В разделе 3.2 доказываетя теорема о существовании выделенной вершины, которая затем применяется для доказательства основной теоремы. В разделах 3.3 и 3.4 устанавливается основная теорема для случаев $k=1$ и $k>1$ соответственно.

Сформулируем основную теорему главы. Для $j\in\mathbb{N}$ рассмотрим величины $m_j:=\sum_{i=j}^{\infty}\mathbb{P}(d=i)\binom{i}{j}$.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие $m_j<C^j$ для некоторого $C>0$ и всех $j\in\mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

Если $\mathbb{E}d<2+\beta$, то для любых $\epsilon>0$ и $k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(n^{\mathbb{E}d/(2+\beta)-\epsilon}<M_k(n)<n^{\mathbb{E}d/(2+\beta)+\epsilon})=1.$$

Если $\mathbb{E}d>2+\beta$, то уравнение $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(d=i)\left(1-(1-x/(2+\beta))^i\right)=x$ имеет единственное положительное решение x^* на отрезке $[0,1]$ и

$$\frac{M_1(n)}{n}\to x^* \text{ п.н. при } n\to\infty.$$

Также для любых $\epsilon>0$ и $k>1$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(n^{\mathbb{E}(d(1-x^*/(2+\beta))^{d-1})/(2+\beta)-\epsilon}<M_k(n)<n^{\mathbb{E}(d(1-x^*/(2+\beta))^{d-1})/(2+\beta)+\epsilon})=1.$$

Если $\mathbb{E}d=2+\beta$, то

$$\frac{M_1(n)\ln n}{n}\to\frac{(2+\beta)^2}{m_2} \text{ п.н., } n\to\infty.$$

Для доказательства мы используем одномерную стохастическую аппроксимацию, теорию случайных блужданий и строим различные вспомогательные мартингалы для установления предельных теорем. При этом широко используется понятие выделенной вершины (persistent hub), существование которой позволяет значительно упростить доказательство основных результатов главы.

Доказательство можно условно разбить на три части

1. Начальная оценка снизу на величины $M(n)$.

2. Доказательство существования выделенных вершин, на которых достигаются значения $M_1(n), ..., M_k(n)$ максимумов распределения степеней вершин, начиная с некоторого случайного момента (persistent hub).

3. Использование существования выделенных вершин для доказательства основной теоремы.

Доказательство теоремы 8 занимает 15 страниц (30 с учетом первых двух пунктов) и основано на 6 леммах и следующей теореме.

Теорема 9. *Для любого k существуют случайные величины $N_1 \leq ... \leq N_k$ и $K_1, ..., K_k$ такие, что с вероятностью единица для любого $n \geq N_k$ выполнены соотношения $\deg_{P_n} v_{K_i} = M_i(n)$ при $i = 1, ..., k$ и $M_1(n) > ... > M_k(n) > \deg_{P_n} v_i$ при $i \notin \{K_1, ..., K_k\}$.*

Доказательство теоремы 9 основано на 5 леммах и занимает 8 страниц.

Заключение

Таким образом, в диссертации получено полное описание возможного асимптотического поведения максимальной степени вершины в предложенной нами новой модели случайных графов.

Для модели с выбором вершины с наименьшей степенью установлено асимптотическое поведение степени вершины с максимальной степенью и найден предел эмпирического распределения степеней вершин.

Для модели с выбором вершины с наибольшей степенью получены различные типы асимптотического поведения максимальной степени вершины в зависимости от соотношения между параметрами β и d. При этом некоторые из установленных свойств не наблюдались в других моделях. Также доказаны закон больших чисел, многомерная центральная предельная теорема и закон повторного логарифма для числа вершин фиксированной степени.

Доказанные результаты могут найти применение при моделировании различных сложных сетей, в частности, сегментов интернета и социальных сетей. В дальнейшем, представляло бы интерес исследование и других классов случайных графов, обладающих асимптотическими свойствами, аналогичными выявленным в диссертации.

Благодарности

Автор признателен своему научному руководителю профессору Александру Вадимовичу Булинскому за полезные обсуждения и ценные замечания.

Работы автора по теме дисертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Web of science, SCOPUS, RSCI

[1] Y. Malyshkin. Preferential attachment combined with the random number of choices// Internet Math. – 2018. - Vol. 1. – №1. – P. 1–25.

[2] Y. Malyshkin, E. Paquette. The power of choice combined with preferential attachement// Electron. Commun. Probab. – 2014. – Vol. 19. – №44. – P. 1–13. В работе [2] диссертанту принадлежат лемма 3.2, лемма 4.2 и лемма 6.2.

[3] Y. Malyshkin, E. Paquette. The power of choice over preferential attachment// ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. – 2015. – Vol. 12. – №2. – P. 903–915. В работе [3] диссертанту принадлежат лемма 3.1, лемма 3.2, лемма 3.3 и нижняя оценка в теореме 1.1.

Тезисы докладов на научных конференциях

[4] Ю.А. Малышкин. Модель предпочтительного выбора ребер для графа с растущим числом вершин// Материалы Международного Молодежного научного форума "Ломоносов-2014", Москва, 7-14 апреля 2014. – с. 1.

[5] Y. Malyshkin. High degree vertices in the preferential attachment model with choice// International Workshop "Probability, Analysis and Geometry", Lomonosov Moscow State University and Ulm University, Moscow, September 30 - October 4, 2014. – Abstracts of communication. – p.9.

[6] Y. Malyshkin. The number of vertices of fixed degree in the preferential attachment model with choice// Internetional Conference "Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications - ACMPT-2017 ", Moscow, October 23-27, 2017. Proceedings. – P. 55–59.

Иные публикации

[7] Y. Malyshkin. High degree vertices in the power of choice model combined with preferential attachment// Herald of Tver State University, Series: Applied Mathematics. – 2017. – no. 1. – P. 31–43.

Технический редактор А.В. Жильцов
Подписано в печать 26.09.2018. Формат 60 84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ №488.
Тверской государственный университет
Редакционно-издательское управление
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.
Тел. РИУ: (4822) 35-60-63.