**Чкадуа, Отар Одикович.**

## Сингулярные интегро-дифференциальные операторы на многообразии и основные гранично-контактные задачи теории упругости : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.02. - Тбилиси, 1984. - 152 с.

## Введение диссертации (часть автореферата)на тему «Сингулярные интегро-дифференциальные операторы на многообразии и основные гранично-контактные задачи теории упругости»

Важной особенностью развития математической физики второй половины нашего столетия явился синтез многомерных сингулярных ИНТеграЛЬНЫХ уравнении (СМ. МИХЛИН[1], Calderon , Zygmund [i] , Гегелиа [2], [3], seeiey [l] и др.) и уравнений с частными производными. Систематическое исследование интегро-дифференци-альных операторов привело к дальнейшей глубокой переработке их теории, на основе которой возникла теория псевдодифференциальных операторов.

В своей современной форме теория псевдодифференциальных операторов была создана в середине шестидесятых годов. Однако полученные с её помощью продвижения столь существенны, что без псевдодифференциальных операторов уже трудно себе представить современную теорию уравнений с частными производными и математическую физику. Особенно важны псевдодифференциальные операторы для изучения эллиптических уравнений. Они естественным образом появляются при исследовании граничных и гранично-контактных задач этих уравнений.

Термин "псевдодифференциальный оператор" был предложен Фридрихсом и Лаксом (см. Pridrichs , Lax [i] ). В современной форме псевдодифференциальные операторы появились, по существу, в работах Кона, Ниренберга [I] и Хёрмандера [l],[2].

Теории псевдодифференциальных операторов посвящены многочисленные работы: Шубин [1] , Calderon [i] , Taylor JY] , Трев [i], Грушин [I] и др.

Особенно полезными для гранично-контактных задач математической физики оказались сингулярные интегро-дифференциальные (СЙД) операторы, являющиеся частными случаями псевдодифференциальных операторов.

В работе Аграновича [i"] изучена нётеровость эллиптического СИД оператора на компактном многообразии без края и в пространствах Соболева, символ которого обладает конечными условиями гладкости относительно обеих переменных.

Donig в [i] изучил нётеровость эллиптического СИД оператора в R , который действует б пространствах Соболева.

В работе Хёрмандера [з] изложен метод, позволяющий сводить граничные задачи (не обязательно эллиптические) к системе псевдодифференциальных уравнений, распространенных на границе области (см. также Панич [i]).

СИД операторы естественным образом появляются при исследовании гранично-контактных задач теории упругости методом потенциала.

Гранично-контактные задачи для изотропных однородных упругих сред полностью исследованы методами теории потенциала и многомерных сингулярных интегральных уравнений в монографии Купрадзе, Ге-гелиа, Башелейшвили, Бурчуладзе [i].

Методы теории потенциала и СИД уравнений по сравнению с методом гильбертовых пространств предпочтительны в том смысле, что они не только доказывают существование и единственность решений гранично-контактных задач, но дают простые интегральные конструкции для представления решений.

В диссертационной работе изучены матричные СИД операторы в п

R и на компактном многообразии без края действующие в пространствах

ЗУ с , где Jt, - пространство Соболева, a v -обоб

5 S щенное пространство Г'ёлдера. Для этих операторов построены ре:цуля-ризаторы,которые представляют собой псевдодифференциальные операторы и установлены теоремы вложения. Исследование СИД операторов в указанных пространствах продиктовано необходимостью их применений в задачах теории упругости. Методами потенциала и СИД уравнений изучаются гранично-контактные задачи статики теории упругости для анизотропной однородной среды. Получены теоремы существования.

Целью диссертационной работы является обоснование метода потенциала для гранично-контактных задач теории упругости и получение теорем существования решении на базе привлечения матричных СИД операторов в R" и на компактных многообразиях без края, действующих в пространствах С .

Известно, что положительная определенность квадратичных форм удельной энергии деформации обеспечивает выполнение условия накрывания (условия Шапиро-Лопатинского) (см. Лопатине кий [I], Schechter (J-J » Thompson [i], Гачечиладзе, Маисаиа [i]). Из этих условий вытекает эллиптичность СИД оператора, получаемого при исследовании гранично-контактных задач теории упругости.

Об эллиптичности сингулярных интегральных операторов граничных задач теории упругости для анизотропных сред (см. Капана дзе [l]).

Метод потенциала можно применить также для исследования граничных задач теории упругости в нерегулярных областях (см. Мазья [i]).

Изложим кратко содержание диссертационной работы.

Диссертационная работа содержит три главы.

В первой главе рассмотрены СИД операторы в ft" «Глава содержит 5 параграфов.

В параграфе I определяются классы символов, имеющих конечные условия гладкости относительно обеих переменных, а этом же параграфе приведены некоторые обозначения и определения, необходимые для дальнейших исследований.

В параграфе 2 доказываются теоремы ограниченности и композиции псевдодифференциальных операторов. Схема исследования этих вопросов, в основном, заимствована из работы Зскина [i].

В параграфе 3 доказываются теоремы ограниченности и компактности псевдодифференциальных операторов в пространствах деотОСоЬ . £

В параграфе 4 доказывается вспомогательная лемма, при помощи которой строятся регуляризаторы для эллиптических СЙД операК торов в пространствах ЖОЛПСсИ . В этом же параграфе приводится одна теорема вложения.

В параграфе 5 изучаются дифференциальные свойства сверхсингулярных интегралов. Устанавливается, что если существуют некоторые частные производные плотности и эти производные обладают определенными свойствами гладкости, то при некоторых ограничениях, налагаемых на ядро сверхсингулярного интеграла, существуют соответствующие частные производные сверхсингулярного интеграла, обладающие соответствующими условиями гладкости. Получены также формулы дифференцирования сверхсингулярного интеграла. Для сингулярных интегралов эти результаты были получены Гегелиа [i] .

Во второй главе изучены матричные СИД операторы на компактном многообразии V без края, определенные в пространствах . Вторая глава содержит три параграфа.

В параграфе I введено определение "порядка" и "почти порядка" оператора в пространствах365ПС . Определение "почти порядка" оператора в пространствах Соболева введено в работе Аграновича [i] . Эти операторы появляются при преобразовании координат и при композиции СИД операторов. Причиной появления операторов "почти порядка" является конечность условий гладкости, налагаемых на символ СИД оператора. В этом же параграфе приведены некоторые вспомогательные предложения из теории СИД операторов. Кроме того формулируется критерий компактности оператора. а параграфе 2 установлена ограниченность СИД оператора и доказана теорема о композиции.

Кп строится квазирегуляризатор, с помощью которого находятся регуляри-заторы для эллиптического СИД оператора на компактном многообразии V без края. Установлена также теорема вложения.

В третьей главе методами потенциала и СИД уравнений изучаются гранично-контактные задачи статики теории упругости для анизотропных однородных сред.

Третья глава содержит четыре параграфа.

В параграфе I поставлены т.н. главная контактная задача и гранично-контактные задачи теории упругости для анизотропных однородных упругих сред. Здесь же строятся фундаментальные решения, которые определяются о помощью преобразования Фурье.

В параграфе 2 ищем решения главной контактной задачи в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя. Применяя граничные свойства этих потенциалов и учитывая контактные условия задачи, получаем интегро-дифференциальное уравнение для определения неизвестных плотностей потенциалов. Далее, уравновешивая полученное интегро-дифференциальное уравнение обратимым СИД оператором порядка I, получаем СИД уравнение и вычисляем его символ.

В параграфе 3 доказывается важная для дальнейшего теорема о самосопряженности некоторого Сйд оператора (см.(2.22) и (2.23) гл.Ш) и теорема типа Ляпунова-Таубера. С помощью этих теорем исследована разрешимость полученной интегро-дифференциальной системы и доказывается теорема существования решений главной контактной задачи.

В параграфе 4 исследуются I-ан и 11-ая гранично-контактные задачи теории упругости с помощью результатов, установленных в параграфах 2 и 3 этой главы. Доказаны теоремы существования решений.

Доказательства теорем единственности решения этих задач проводятся также как и в работах Кпорв , Payne [(], Купрадзе, Гегелиа, Башелейшвили, Бурчуладзе [1] , с помощью формул Грина.

Результаты диссертационной работы опубликованы в статьях автора [1],[г],[з],Н,[5],[б],[7].