

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА



На правах рукописи

УДК 519.217

Мазур Анна Евгеньевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПОДГОНКА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ
С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
И СИЛЬНОЙ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ
ПОСРЕДСТВОМ ГАУССОВСКИХ РЯДОВ**

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2021

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико-математического факультета Московского
государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: Питербарг Владимир Ильич

доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: Бурнашев Марат Валиевич

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник

Института проблем передачи информации

Маркович Наталья Михайловна

доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник

Института проблем управления РАН

Чернояров Олег Вячеславович

доктор физико-математических наук,
профессор Национального

исследовательского университета МЭИ

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования «Балтийский
федеральный университет имени Иммануила Канта»

Защита диссертации состоится «28» сентября в 14.00 на заседании
диссертационного совета ФПМИ.01.01.05.005 по адресу 141701, Московская
область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте
Московского физико-технического института (национального
исследовательского университета): [https://mipt.ru/education/
post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php](https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php)

Работа представлена «24» мая в Аттестационную комиссию федерального
государственного автономного образовательного учреждения высшего
образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите
диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в
соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной
научнотехнической политике».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Модели временных рядов с тяжелыми хвостами распределений и сильной временной зависимостью (большим радиусом корреляции) часто используются при исследовании финансовых и эконометрических данных, в задачах передачи информации^{1 2 3 4}. Обычно в качестве моделей применяются модели с устойчивым распределением, различные типы преобразований дробного броуновского движения^{2 4 5}. В то же время имеются и другие хорошо изученные модели случайных временных рядов с сильной временной зависимостью. В первую очередь это гауссовские последовательности. Однако гауссовское распределение имеет легкий, суперэкспоненциальный, хвост, что зачастую является существенным недостатком при построении моделей для вышеупомянутых данных. Чтобы использовать все возможности хорошо развитой техники исследования гауссовских распределений, можно прибегнуть к нелинейным преобразованиям фазового пространства (пространства значений временного ряда), то есть к *копулам*. Например, в⁶ гауссовские копулы применяются в задачах хеджирования и прогноза доходности при наличии большого числа факторов и малого числа наблюдений. Зависимость гауссовских распределений от малого числа параметров и возможность моделирования сильной зависимости играют здесь существенную роль.

Исследования и применения моделей для хвостов распределений временных рядов широко используют результаты классической теории экстремумов. В основе классической теории экстремумов лежит широко известная теорема Гнеденко-Фишера-Типпета⁷, в которой дано полное описание возможных предельных распределений максимума $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$, при неограниченно растущем n , здесь $Y_1, \dots, Y_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Теорема Б. В. Гнеденко утверждает, что если существуют последовательности $a_n > 0$ и b_n такие, что предел по распределению при $n \rightarrow \infty$ последовательности случайных величин $a_n(M_n - b_n)$ существует и имеет невырожденную функцию распределения (принимаящую больше двух

¹ Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. Modeling extremal events: for insurance and finance. Berlin, Springer. 1997

² Cont R. Long range dependence in financial markets // Fractals in engineering, Ed. by E. Lutton & Lévy-Véhel J. Springer. 2005. P. 159-179

³ Resnick S.I. Heavy tail modeling and teletraffic data: special invited paper // The Annals of Statistics. 1997. V. 25. N 5. P. 1805-1869

⁴ Mikosch T. Extreme values in finance, telecommunications, and the environment, Ed. by Finkenstädt B., Rootzén H. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton. 2004. P. 196-297

⁵ Heath D., Resnick S., Samorodnitsky G. Heavy tails and long range dependence in on/off processes and associated fluid model // Mathematics of Operations Research. 1998. V. 23. N 1. P. 145-165

⁶ Cherny A.S., Douady R., Molchanov S. A. On measuring hedge fund risk, 2008. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1113620> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1113620>

⁷ Gnedenko. B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Annals of Mathematics. 1943. V. 44. P. 423-453

значений), то эта функция принадлежит одному из трех типов, называемых распределениями экстремальных значений. Эти типы определяются следующими распределениями с точностью до линейных преобразований аргумента:

$$\text{Тип Гумбеля : } \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\text{Тип Фреше : } \Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}}, & \alpha > 0, x > 0 \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{Тип Вейбулла : } \Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}}, & \alpha > 0, x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Говорят, что функция распределения F случайных величин принадлежит области максимального притяжения Фреше, Гумбеля или Вейбулла, если функция распределения предела нормированного максимума последовательности случайных величин, $a_n(M_n - b_n)$, принадлежит типу Фреше, Гумбеля или Вейбулла соответственно. Существуют необходимые и достаточные условия принадлежности функции распределения какой-либо области максимального притяжения. Такие критерии описаны в классической литературе по теории экстремумов, например, ⁸ и ⁹.

В первой части настоящей работы мы рассматриваем гауссовские копульные временные ряды, маргинальные функции распределения которых принадлежат области максимального притяжения Фреше $\text{MDA}(\Phi_{\alpha})$. Под гауссовским копульным временным рядом мы понимаем случайную последовательность $X_k = f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots$, где ξ_k – гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $R(k)$. Выбирая соответствующим образом копульную функцию $f(x)$, можно получать различные типы хвостов маргинальных распределений временного ряда X_k . В статье ¹⁰ введен и исследован весьма общий вид копульной функции $f(x)$ для получения гауссовского копульного временного ряда, распределение которого принадлежит области максимального притяжения Фреше. Появляется возможность подгонки модели к данным, имеющим предположительно тяжелые (степенные) хвосты распределений, принадлежащие области максимального притяжения Фреше. Далее, для использования предельной теоремы Гнеденко для копульного гауссовского временного ряда, хвосты маргинальных распределений которого принадлежат области максимального притяжения Фреше, мы

⁸ De Haan L., Ferreira A. Extreme value theory: an introduction. Springer. 2007

⁹ Лидбеттер М. Р., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. Мир. 1989

¹⁰ Мазур А. Е., Питербарг В. И. Гауссовские копульные временные ряды с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью // Вестник Московского университета. 2015. V. 70. N 5. P. 197-201

отталкиваемся от предельной теоремы Бермана для максимума гауссовской последовательности, например, ¹¹. Предположим, что

$$R(n) \ln n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\max_{k=1, \dots, n} \xi_k < a_n^{-1}x + a_n\right) = e^{-e^{-x}},$$

где

$$a_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{\ln \ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2 \ln n}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Этот подход хорошо работает, если данные моделируются распределением с конечной дисперсией. В этом случае можно найти связь между ковариационной функцией моделируемого копульного ряда и исходного гауссовского. В случае же, когда модель с конечной дисперсией плохо работает, для переноса результатов классической теории экстремумов со случая независимых случайных величин на стационарные последовательности обычно используется *условие сильного перемешивания*, введенное М. Розенблатом в 1956 г. Приведем это условие.

Определение 1 *Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания, если существует функция $\alpha(k)$, такая, что выполнено:*

$$\alpha(k) = \sup\{|P(AB) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{B}_1^l, \mathcal{B}_{l+k+1}^\infty, l \geq 1\} \rightarrow 0, \quad (3)$$

при $k \rightarrow \infty$. Здесь $\mathcal{B}_i^j$ – σ -алгебра, порожденная $\xi_i, \dots, \xi_j$.

Повторим, что в качестве альтернативы для описания зависимости между случайными величинами ξ_i и ξ_j может использоваться их ковариация. Одним из известных ограничений на ковариационную функцию является довольно слабое условие Бермана (1), влекущее, как мы видели, выполнимость теоремы Гнеденко для нормальных последовательностей.

Позднее, в 1974 году, М. Р. Лидбеттер предложил более слабый аналог условия перемешивания Розенблатта, при котором остаются верными многие центральные утверждения в теории экстремумов. Сформулируем это условие. Для краткости вместо $F_{i_1, \dots, i_n}(u, \dots, u)$, где $F_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n)$ – совместная функция распределения случайных величин $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}$, будем писать $F_{i_1, \dots, i_n}(u)$. Пусть $\{u_n\}$ – последовательность вещественных чисел.

Определение 2 *Говорят, что выполнено условие $D(u_n)$, если для любых целых чисел*

$$1 \leq i_1 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_{p'} \leq n,$$

¹¹*Piterbarg V. I. Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields // American Mathematical Society. 1996. V. 148*

для которых $j_1 - i_p \geq l_n$,

$$|F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{p'}}(u_n) - F_{i_1, \dots, i_p}(u_n)F_{j_1, \dots, j_{p'}}(u_n)| \leq \alpha_{n, l_n},$$

где $\alpha_{n, l_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторой последовательности $l_n = o(n)$.

Определение 3 Говорят, что для стационарной последовательности $\{\xi_j\}$ и числовой последовательности $\{u_n\}$ выполнено условие $D'(u_n)$, если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{[n/m]} P(\xi_1 > u_n, \xi_j > u_n) \rightarrow 0, \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

В рамках построенной в диссертации модели, мы перейдем от условия α -перемешивания для стационарных случайных величин к более слабым условиям на зависимость, к условиям на ковариацию.

Во второй части рассматривается задача оценивания копульной функции f по статистическим данным. Построение моделей по данным, предположительно имеющим тяжелые хвосты, является важной задачей при исследовании финансовых и экономических данных, а также во многих других приложениях вероятностных методов. Временные ряды с различными хвостами распределений удобно моделировать при помощи гауссовских временных рядов в силу развитой техники работы с ними и простого вида зависимости между наблюдениями. Моделируются как последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, так и стационарный временной ряд, в предположении, что маргинальная функция распределения случайных величин $X_i, i \in 1, \dots, n$ принадлежит области максимального притяжения Фреше. При этом важной задачей является задача оценивания и исследования свойств квантиля $x_{p_n} = F^{-1}(1 - p_n)$, где p_n – уровень квантиля функции распределения F . Оценка приведенного квантиля и исследование его свойств для случая независимых случайных величин приводятся в классической монографии по статистике экстремумов ⁸. Достаточно универсальный метод перехода к зависимым случайным величинам при решении подобных задач был рассмотрен Х. Ротсеном в ¹² При наложении ряда дополнительных условий автор доказывает слабую сходимость нормированной эмпирической функции хвоста к функции распределения F . Полученный Х. Ротсеном результат обсуждается и дополняется в некоторых работах Х. Дреса ¹³, ¹⁴. Для проверки асимптотической нормальности оценки индекса экстремального

¹²Rootzén, H. Weak convergence of the tail empirical process for dependent sequences // Stochastic Processes and their Applications. 2009. V. **119**. N. 2. P. 468-490.

¹³Drees H. Tail empirical processes under mixing conditions // Empirical process techniques for dependent data. 2002. P. 325 - 342

¹⁴Drees H. Weighted approximation of tail processes for β -mixing random variables // The Annals of Applied Probability, 2000. V. **10**. N 4. P. 1274-1301

значения удобно использовать технику перехода к последовательности функционалов от эмпирической квантильной функции хвоста

$$F_n^{-1}\left(1 - \frac{k_n t}{n}\right) = X_{n-[k_n t], n} \text{ при } t \in [0, 1],$$

описанную в ^{12 15 16}. Здесь и далее $[\cdot]$ – целая часть числа.

В настоящей работе оценки копульной функции f строятся как с использованием независимых наблюдений, так и в случае наблюдений в виде стационарного временного ряда. Основные методы работы, применяемые для решения задачи, описаны в ^{8, 9} и ¹⁷. В ¹⁷ приведен результат, позволяющий оценить коэффициент сильного перемешивания следа гауссовской стационарной последовательности Y_k , $k = 1, \dots, n$, на уровне u_n , то есть последовательности $I_{\{Y_k > u_n\}}$, (где I – индикатор события), с помощью ковариационной функции последовательности Y_k . Данный результат позволяет работать со стационарными последовательностями с сильной зависимостью, пользуясь техникой работы с нормальными случайными величинами. В ^{8, 9}, например, приведены предельные теоремы для максимумов последовательностей случайных величин, теоремы об асимптотических свойствах индекса экстремального значения для случая независимых случайных величин.

Цель и задачи исследования.

Целью диссертации является изучение как явного вида, так и статистических оценок копульных функций для независимых случайных величин и для стационарного временного ряда с сильной временной зависимостью. Среди задач выделяются следующие:

- Построение вида функции f , позволяющей преобразовывать нормальную случайную величину в случайную величину, принадлежащую области максимального притяжения Фреше, $MDA(\Phi_\alpha)$. Доказана предельная теорема для максимумов копульного временного ряда $f(\xi_i)$, $i = 1, \dots, n$ при достаточно слабом условии на зависимость для наблюдаемого временного ряда X_i , $i = 1, \dots, n$, или гауссовского временного ряда ξ_i , $i = 1, \dots, n$.
- Построение оценки функции f в модели $X_i = f(\xi_i)$, $i = 1, \dots, n$, где ξ_k – гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией, и маргинальная функция распределения случайных величин X_i , $i = 1, \dots, n$, принадлежит

¹⁵ Drees H. A general class of estimators of the extreme value index // Journal of Statistical Planning and Inference. 1998. V. **66**. N 1. P. 95-112

¹⁶ Drees H. On smooth statistical tail functionals // Scandinavian Journal of Statistics. 1998. V. **25**. N 1. P. 187-210

¹⁷ Путербарг В. И. Двадцать лекций о гауссовских процессах. МЦНМО. 2015

области притяжения Фреше. В диссертации проведено исследование статистических свойств оценки $\hat{f}$ как для независимых случайных величин гауссовской последовательности $\xi_i, i = 1, \dots, n$, так и для гауссовского стационарного временного ряда с условиями на ковариационную функцию.

Методика исследования.

В диссертации используются как классические методы теории вероятностей и теории случайных процессов, такие как предельная теорема Фишера-Типпета-Гнеденко^{1,2}, теорема Бермана¹¹, так и специальные методы стохастической теории экстремумов, такие как лемма Лидбеттера, условия на перемешивание Лидбеттера⁹, оценка сверху на коэффициент перемешивания для гауссовской стационарной последовательности¹⁷, результаты об асимптотических свойствах индексов экстремального значения⁸.

Научная новизна.

Представленные в диссертации результаты являются новыми, основные направления исследования и мотивация приведены ниже.

- Построен вид функции f , позволяющей преобразовывать нормальную случайную величину в случайную величину, принадлежащую области максимального притяжения Фреше. Доказана предельная теорема для максимумов копульного временного ряда $f(\xi_i), i = 1, \dots, n$ при достаточно слабом условии на зависимость для наблюдаемого временного ряда $X_i, i = 1, \dots, n$, или гауссовского временного ряда $\xi_i, i = 1, \dots, n$.
- Построена оценка функции f в модели $X_i = f(\xi_i), i = 1, \dots, n$, где ξ_k – гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией, и маргинальная функция распределения случайных величин $X_i, i = 1, \dots, n$, принадлежит области притяжения Фреше. В диссертации доказана асимптотическая нормальность оценки $\hat{f}$ как для независимых случайных величин гауссовской последовательности $\xi_i, i = 1, \dots, n$, так и для гауссовского стационарного временного ряда с условиями на ковариационную функцию.

Положения, выносимые на защиту.

В диссертации получены следующие основные результаты.

- Для временных рядов с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью построено преобразование, преобразующее гауссовские случайные величины в величины из области притяжения

Фреше. Показана выполнимость предельных соотношений для нормированного максимума стационарной последовательности с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью, где построенное преобразование дает возможность применения развитой техники исследования гауссовских распределений к моделям временных рядов с тяжелыми хвостами.

- Построена оценка преобразований, преобразующих гауссовские случайные величины в случайные величины из области притяжения Фреше, для последовательностей случайных величин и временных рядов с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью. Исследованы статистические свойства построенной оценки, показана асимптотическая нормальность при условиях на ковариацию с последующим применением асимптотических методов для гауссовских распределений вместо проверки условий перемешивания.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в стохастической теории экстремумов, в страховании, в финансовой сфере и во многих других приложениях вероятностных методов.

Соответствие паспорту научной специальности.

В диссертации исследуются задачи статистической теории экстремумов случайных последовательностей и процессов: строится и исследуется модель для работы с временными рядами с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью посредством гауссовских рядов с применением техник работы с гауссовскими распределениями, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика» по направлению «статистика случайных процессов и полей».

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях:

- «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию Б.В. Гнеденко, Москва, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, 26-30 июня 2012
- Satellite conference of 6th European Congress of Mathematics “Copulae in mathematical and Quantitative finance”, Guest House of the Jagiellonian University “Przegorzaly”, Krakow, 9-11 July, 2012
- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013», Москва, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, 8-13 апреля 2013

- 7th European Congress of Mathematics, Technische Universität, Berlin, 18-22 July 2016

а также на семинарах:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей, механико-математический факультет МГУ, руководитель – академик РАН, проф. А. Н. Ширяев, 2018
- Семинар «Статистика экстремальных значений», институт проблем управления РАН, руководитель – д.ф.-м. н., гл. н. с. Н. М. Маркович, 2018
- Семинар «Гауссовские случайные процессы», механико-математический факультет МГУ, руководитель – проф. В.И. Питербарг, неоднократно (2010 – 2016)

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в четырех статьях ([1-4]), из которых три включены в международные базы данных (Web of Science и Scopus), одна депонирована в ВИНТИ. Имеются также опубликованные тезисы докладов международных конференций ([5-8]). Список работ приведен в конце автореферата ([1-8]).

Структура и объем работы.

Диссертация изложена на 105 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 74 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвященных вопросам статистической теории экстремумов. Историческая справка подкрепляется соответствующими ссылками на научные работы. Кроме того, во введении объясняется актуальность темы и научная новизна предпринятого автором исследования.

В **первой главе** диссертации строится вид функции f , позволяющий преобразовывать нормальную случайную величину в случайную величину, принадлежащую области максимального притяжения Фреше, $MDA(\Phi_\alpha)$.

Сформулируем теорему, которая описывает представление функции f , с помощью которого можно преобразовать гауссовские случайные величины к случайным величинам из области максимального притяжения Фреше.

Теорема 1.1 Пусть ξ – стандартная нормальная случайная величина. Тогда $f(\xi) \in MDA(\Phi_\alpha)$, если при $x \geq x_0$ для некоторого $x_0 > 0$ имеет место представление

$$f(x) = C \exp \left(\frac{x^2}{2\alpha} + \int_0^x sg(s)ds \right) \quad (4)$$

для некоторых $C > 0$ и непрерывно дифференцируемой функции $g(x)$ такой, что $g(x) \rightarrow 0$ и $g'(x)/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\mathcal{GC}_\alpha$ класс функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1.

Далее показывается выполнимость предельных соотношений при описанном виде функции f . Предполагаем, что ковариационная функция $R(k) = E(\xi_1 \xi_{k+1})$ удовлетворяет условию Бермана

$$R(n) \ln n \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Пусть $X_k = f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots$ – стационарная последовательность с ковариационной функцией $\rho(k) = EX_1 X_{k+1}$. Предположим, что $f \in \mathcal{GC}_\alpha$ для $\alpha > 2$. В этом случае $EX_1^2 < \infty$ и ковариационная функция копульного процесса X_k существует. Поскольку нас интересуют только значения f для достаточно больших x , предположим без ограничения общности, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} f(x) dx = 0, \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2} f(x) dx \neq 0. \quad (7)$$

Далее сформулируем доказанную в диссертации предельную теорему для гауссовского копульного временного ряда $X_k = f(\xi_k)$, $k \geq 1$, с условиями, наложенными на ковариационную функцию как самой гауссовской стационарной последовательности ξ_k , $k \geq 1$, так и на ковариационную функцию копульного временного ряда X_k , $k \geq 1$, при условии ее существования.

Теорема 1.11 Пусть $f(x) \in \mathcal{GC}_\alpha$, $\alpha > 2$. Пусть ξ_k – стандартная гауссовская последовательность с ковариационной функцией $R(k)$. Тогда функция распределения $F(\cdot) = \Phi(f^{-1}(\cdot))$ случайной величины $X_k = f(\xi_k)$ принадлежит области максимального притяжения Фреше, $MDA(\Phi_\alpha)$. Также пусть выполнено ограничение на зависимость гауссовских случайных величин $R(k) \ln k \rightarrow 0$ или условие на зависимость

наблюдаемых случайных величин $\rho(k) \ln k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В этом случае для всех $x > 0$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\max_{k=1, \dots, n} X_k < d_n x\right) = e^{-x^{-\alpha}}, \quad (8)$$

где либо $d_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$, либо $d_n = f(a_n)$, $a_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{\ln \ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2 \ln n}}$.

В случае отсутствия вторых моментов у наблюдаемых случайных величин, при $\alpha > 0$, накладываем условие Бермана только на гауссовскую последовательность, теорема 1.17. В этом случае предельная теорема для максимумов доказывается с помощью сведения к вышеприведенным условиям перемешивания по Лидбеттеру, смотри также ⁹. А именно, в этом случае формулируется и доказывается следующая лемма:

Лемма 1.15 Если $R(n) \ln n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $f \in \mathcal{GC}_\alpha$, $\alpha > 0$, то гауссовский копульный временной ряд $X_k = f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условиям Лидбеттера.

Во **второй** главе исследуются состоятельность и асимптотическая нормальность оценки копульной функции f , для которой

$$X_k = f(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные стандартные нормальные случайные величины, или $\xi_1, \dots, \xi_n$ – гауссовская стандартная стационарная последовательность случайных величин с ковариационной функцией $cov(\xi_i, \xi_j) = R_{i,j} = R(j - i)$, и пусть на ковариацию наложено условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |kR(k)| < \infty. \quad (9)$$

Задача состоит в оценке функции $f(x)$ для достаточно больших значений x и исследовании полученной оценки.

Для гауссовского копульного временного ряда X_k , $k = 1, 2, \dots$ с маргинальной функцией распределения F из $MDA(\Phi_\alpha)$ для достаточно больших x построена оценка $\hat{f}$ копульной функции $f(x)$. А именно, при y_n – произвольной числовой последовательности, стремящейся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, в диссертации построена оценка $\hat{f}(y_n)$:

$$\hat{f}(y_n) = X_{n-k_n, n} \left(\frac{k_n}{n(1 - \Phi(y_n))} \right)^{\hat{\gamma}}, \quad (10)$$

где $\hat{\gamma}$ – оценка индекса экстремального значения $\gamma = 1/\alpha$; $X_{n-k_n, n}$ – $(n - k_n)$ -ая порядковая статистика, где $k_n \rightarrow \infty$, $k_n/n \rightarrow 0$; Φ – функция распределения стандартного нормального закона.

В диссертации показана состоятельность и асимптотическая нормальность оценки $\hat{f}$ функции f для независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$ и для стационарного временного ряда $X_1, \dots, X_n$ в данной модели при дополнительном условии на зависимость, где ограничение на зависимость случайных величин задается условием на ковариационную функцию. Сформулируем описанное условие. Пусть $\delta_{l_n} = \sup_{m \geq l_n} |R(m)| < 1$, где $R(m) = \text{cov}(\xi_1, \xi_{m+1})$, и $l_n = r_n^\alpha$, где $r_n = o(n)$, $0 < \alpha < \frac{1-\delta_1}{1+\delta_1}$. В диссертации требуем выполнение следующего условия:

$$D2' : \quad n f^{-1}(u_n + x\sigma_n)(\phi(f^{-1}(u_n + x\sigma_n)))^{\frac{1-\delta_{l_n}}{1+\delta_{l_n}}} \sum_{k=l_n}^{\infty} |kR(k)| \rightarrow 0, \quad (11)$$

при $n \rightarrow \infty$, где ϕ – плотность стандартного нормального распределения. Приведем теорему об асимптотической нормальности оценки $\hat{f}$ функции f для стационарного случая:

Теорема 2.15 Пусть функция распределения F принадлежит области максимального притяжения Фреше и $F(x) = \Phi(f^{-1}(x))$. Пусть для некоторой функции $A(t)$, такой, что $A(t) \rightarrow 0$ и при $t \rightarrow \infty$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{U(tx)}{U(t)} - x^\gamma}{A(t)} = x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho},$$

где $\rho < 0$ – параметр второго порядка. Пусть $y_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и пусть для промежуточной последовательности k_n выполнено $\sqrt{k_n}A(n/k_n) \rightarrow \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$. И пусть выполнено $n\tilde{p}_n = o(k_n)$ и $\log(n\tilde{p}_n) = o(\sqrt{k_n})$, где $\tilde{p}_n = 1 - \Phi(y_n)$, при $n \rightarrow \infty$. Если $X_1, \dots, X_n$ – временной ряд такой, что $X_k = f(\xi_k)$, где ξ_k – гауссовская последовательность, для которой выполнены условия 9 и $D2'$, тогда для нормированной оценки $\hat{f}$ выполнено:

Тогда для оценки $\hat{f}$ выполнено:

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\log \tilde{d}_n} \left(\frac{\hat{f}(y_n)}{f(y_n)} - 1 \right) \xrightarrow{d} \Gamma, \quad (12)$$

где $\tilde{d}_n = k_n/(n\tilde{p}_n)$ и Γ – нормальная случайная величина, имеющая то же распределение, что и предел последовательности $\sqrt{k_n}(\hat{\gamma} - \gamma)$, где $\hat{\gamma}$ – любая асимптотически нормальная оценка индекса экстремального значения γ в условиях доказываемой теоремы.

Для доказательства последнего результата проверяются условия введенные Х. Ротсеном в ¹². Первое условие накладывает ограничение на размер кластеров, состоящих из экстремумов, ограничивая их p -ый момент.

Второе условие есть условие на сходимость ковариационной функции эмпирического нормированного хвоста функции распределения F при $n \rightarrow \infty$. Третье условие накладывает ограничение на зависимость между блоками, на которые мы разбиваем последовательность. И четвертое условие обеспечивает экспоненциальную скорость убывания по u_n коэффициентов сильного перемешивания.

В **третьей** главе, дополнении к диссертации с численными результатами, приведены эмпирические распределения оценок $\hat{f}(y_n)$ при конкретном выборе симулируемого временного ряда, фиксированных размерах выборки и y_n , также приведен пример применимости оценки $\hat{f}(y_n)$ к реальным данным. Полученные распределения согласуются с теоретическими результатами о состоятельности и асимптотической нормальности оценки.

Заключение.

Таким образом, в диссертации построено преобразование f , преобразующее гауссовские случайные величины в случайные величины из области притяжения Фреше. В диссертации показана связь корреляций временных рядов: гауссовского временного ряда ξ_i и временного ряда $X_i = f(\xi_i)$, что позволяет проверять условие убывания корреляции непосредственно по наблюдаемой выборке. Доказаны предельные теоремы для максимумов членов временного ряда с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью, полученного из гауссовского временного ряда применением построенного преобразования.

Рассмотрена также обратная задача, задача оценивания таких преобразований f и исследование статистических свойств полученной оценки при условиях на корреляционную функцию наблюдаемого статистического ряда с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью, с последующим применением асимптотических методов для гауссовских распределений вместо проверки условий перемешивания.

Построенная модель могла бы найти применение при работе с экономическими и финансовыми данными, а также в теории стохастических экстремумов. В дальнейшем представляло бы интерес обобщение результатов на более высокие размерности.

Автор выражает глубочайшую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Питербаргу Владимиру Ильичу, за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе. Отдельную благодарность автор приносит Игорю Владимировичу Родионову за помощь в изложении результатов и полезные обсуждения.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи, опубликованные в журналах Web of science, SCOPUS, RSCI

[1] *Мазур А. Е., Питербарг В. И.* Гауссовские копульные временные ряды с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью // Вестник Московского университета. 2015. V. **70**. N 5. P. 197-201.

В работе [1] доказательства предложения 1 и леммы 1, предложение 2 и предложение 3 принадлежат диссертанту. Общая постановка задачи принадлежит научному руководителю, Питербаргу В. И.

Mazur A. E., Piterbarg V. I. Gaussian copula time series with heavy tails and strong time dependence // Moscow University Mathematics Bulletin. 2015. V. **70**. N 5. P. 197-201

[2] *Мазур, А. Е.* Моделирование и подгонка временных рядов с тяжелыми хвостами распределений и сильной временной зависимостью посредством гауссовских рядов // Теория вероятностей и ее приложения. 2018. V. **63**, N 1. P. 186-190.

Mazur A. E. Modeling and fitting of time series with heavy distribution tails and strong time dependence by Gaussian time series // Theory of Probability & Its Applications. 2018. V. **63**. N 1. P. 151-154.

[3] *Мазур А. Е.* Подгонка временных рядов с тяжелыми хвостами распределений и сильной временной зависимостью посредством гауссовских рядов // Фундаментальная и прикладная математика. 2018. V. **22**. N 3. P. 127-143.

Mazur A. E. Fitting Time Series with Heavy Tails and Strong Time Dependence // Journal of Mathematical Sciences V. **254**, P. 537–549. 2021.

Иные публикации

[4] *Мазур, А. Е.* Моделирование и подгонка временных рядов с тяжелыми хвостами распределений и сильной временной зависимостью посредством гауссовских рядов. Деп. в ВИНТИ, 28.08.2017, N 97-B2017, 5, 2017.

Тезисы докладов на научных конференциях

[5] *Мазур А. Е., Питербарг В. И.* Modeling time series with heavy tails and strong dependence by Gaussian copulae sequence, Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко, Тезисы докладов. 171. Ленанд, 2012.

[6] *Мазур А. Е., Питербарг В. И.* Modeling time series with heavy tails and strong dependence by Gaussian copulae sequence, Международная

спутниковая конференция 6-го Европейского конгресса, workshop «Copulae in mathematical and quantitative finance», book of abstracts, posters, 7, 2012

[7] *Мазур А. Е.* Estimation of copula functions for stationary time series with heavy tails and strong time dependence, 7-й Европейский конгресс по математике, Scientific program. 89. Technische Universität Berlin. 2016.

[8] *Мазур А. Е.* Gaussian copula time series with heavy tails and strong dependence // Материалы Международного Молодежного научного форума «Ломоносов-2013», Москва.