**Кудишин, Павел Михайлович.**

## Обратная задача для дифференциальных операторов высших порядков с особенностью : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.01. - Саратов, 1999. - 108 с.

## Введение диссертации (часть автореферата)на тему «Обратная задача для дифференциальных операторов высших порядков с особенностью»

Обратная задача спектрального анализа заключается в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам. Подобные задачи возникают в различных областях естествознания, например, в квантовой механике при определении внутриатомных сил по известным уровням энергии, в радиотехнике при синтезе параметров неоднородных линий передач, в теории упругости при определении размеров поперечных сечений балки по заданным частотам ее собственных колебаний, в геофизике, в метеорологии и т.д. Обратные задачи играют важную роль и при интегрировании нелинейных уравнений математической физики. Интерес к обратным задачам постоянно растет благодаря появлению новых важных приложений в естественных науках, и сейчас теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Наиболее полно изучены обратные задачи для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля у" + ч(х)у (0.1)

Первый результат в этом направлении принадлежит В.А.Амбарцумяну [72], который исследовал исключительный случай восстановления потенциала д(х) по спектру. Дальнейшее развитие теория обратных задач получила в работе Г.Борга [76]. Он доказал единственность восстановления функции д(ж) на конечном интервале по двум спектрам дифференциального оператора Штурма-Лиувилля с одним общим краевым условием. Аналогичный факт был установлен Н.Левинсоном [83], но для других спектральных характеристик. В работе А.Н.Тихонова [52] получена теорема единственности решения обратной задачи Штурма-Лиувилля на полуоси по заданной функции Вейля.

Важную роль в спектральной теории дифференциального оператора Штурма-Лиувилля сыграл оператор преобразования. К решению обратной задачи оператор преобразования первым применил В.А.Марченко [30], [31]. Он доказал, что дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля, заданный на полуоси или конечном отрезке, однозначно определяется заданием спектральной функции.

Более сложной задачей является построение конструктивной процедуры восстановления дифференциального оператора и описание необходимых и достаточных условий на спектральные данные. Эти вопросы исследовались в работах М.Г.Гасымова, И.М.Гельфанда, М.Г.Крейна, Б.М.Левитана, Ф.С.Рофе-Бекетова, Л.Д.Фаддеева и других [4], [11], [13], [21] - [24], [30] - [34], [45], [54], [55], [75], [78], [80] - [82], [85].

Многие приложения теории обратных задач связаны с дифференциальными операторами высших порядков с интегрируемыми коэффициентами п—2 у(п) + 1>(\*)Уу) (°-2) з=о

В сравнении с дифференциальным оператором Штурма-Лиувилля, обратная задача для операторов (0.2) сложнее для изучения. В различных постановках она исследовалась в [25] - [28], [47] - [49], [57] - [59], [62] - [66], [68], [70], [73], [74] и др. В работах А.Ф.Леонтьева [29], В.И.Мацаева [35], М.К.Фаге [53], А.П.Хромова [60] выяснено, что оператор преобразования при п > 2 имеет более сложную структуру, что затрудняет его использование для решения обратной задачи. Однако в случае аналитических коэффициентов [47], [56] операторы преобразования имеют такой же треугольный вид, как и для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля. В частности, М.Г.Гасымов [10], Л.А.Сахович [47] - [49], И.Г.Хачатрян [57], [58] исследовали обратную задачу восстановления самосопряженных дифференциальных операторов на полуоси по спектральной функции, а также обратную задачу рассеяния с помощью "треугольного" оператора преобразования.

В работах З.Л.Лейбензона [25]-[28] исследовалась обратная задача для дифференциального оператора (0.2) на конечном отрезке при условии "разделенно-сти" спектров. З.Л.Лейбензон предложил эффективный метод решения обратной задачи, основанный на исследовании отображений пространств решений, связанных со спектральными свойствами операторов, и являющийся развитием идей Н.Левинсона [83]. Полное решение обратной задачи для конечного отрезка, полуоси и оси получено в работах В.А.Юрко, К.ВеаЬ, Р.Бе1й, С.Тоте!, Х^Ьои [62]-[66], [68], [70], [73], [74], [79], [90] - [92].

Большое число работ посвящено обратным задачам для уравнений в частных производных, например работы Ю.Е.Аниконова, Ю.М.Березанского, А.Л.Бухгейма, И.А.Васина, В.В.Дубровского, А.Б.Костина, Л.П.Нижника, А.И.Прилепко, В.Г.Романова, В.А.Садовничего [1] - [3], [5], [15] - [17], [38], [41] - [44], [86].

Данная работа посвящена исследованию обратной задачи для дифференциальных операторов высших порядков с регулярной особенностью п-2 у = у{п) + £ + Ф)) Уи) (о.з)

3=0 на конечном отрезке. Дифференциальные операторы (0.3) возникают в различных разделах математики и их приложениях (см. [6], [7], [14], [84] и литературу в них). К уравнениям с особенностью £у = А у также сводятся многие дифференциальные уравнения с точкой поворота, например, уравнение = Лг(\*)г(\*), < > 0, г(<) ~ аР, \* +0, 7 > 0, и другие более общие уравнения. Точки поворота появляются в теории упругости, оптике, геофизике и других областях естественных наук. Обратная задача для уравнений с точками поворота и особенностями используются, в частности, при исследовании разрывных решений уравнений математической физики (см., например, [77]).

В случае п = 2 прямые и обратные задачи для операторов с особенностью (0.3) исследовались в работах многих авторов [7]-[9], [18], [39], [50], [89]. При произвольном п прямые задачи исследовались в [6], [67], [71]. В работе В.А.Юрко [67] построены специальные фундаментальные системы решений для дифференциального уравнения с особенностью 1у = Ху , получена асимптотика множителей Стокса для построенных фундаментальных систем решений. В работе [71] получена асимптотика спектра краевых задач для дифференциального оператора (0.3), доказана теорема о полноте системы собственных и присоединенных функций в соответствующих пространствах, получена теорема о разложении в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям. В отличие от обратной задачи для дифференциальных операторов высших порядков с регулярной особенностью на полуоси, исследовавшейся в работах В.А.Юрко [67], [69], [88], обратная задача на конечном отрезке до сих пор не была изучена.

Наличие особенности у дифференциального оператора (0.3) вносит существенные трудности в исследование обратной задачи. Оператор преобразования не годится для этих целей ввиду сложности своей структуры. Поэтому в данной работе реализован иной подход, связанный с развитием идей метода контурного интеграла. Важную роль в этом методе играют специальные фундаментальные системы решений дифференциального уравнения с особенностью 1у = Ху , построенные в [67].

Дополнительную трудность в исследование обратной задачи вносит кратность спектра. В этом случае даже для оператора без особенностей вида (0.2), коэффициенты которого являются суммируемыми функциями, открытым является вопрос о постановке и решении обратной задачи. В данной работе вводятся дискретные спектральные данные - совокупность спектров (п — 1) -ой краевой задачи для дифференциального оператора (0.3) и матриц порядка п . Введенные спектральные характеристики можно рассматривать как обобщение спектральных характеристик, известных для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля. В данной работе доказана теорема единственности восстановления коэффициентов дифференциального оператора по спектральным данным. Также получено конструктивное решение обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Центральным местом здесь является построение и исследование так называемого основного уравнения обратной задачи, которое является линейным в соответствующем банаховом пространстве. Таким образом, нелинейная обратная задача сводится к решению линейного уравнения. Доказана однозначная разрешимость этого уравнения. Возникающие при этом трудности, связанные с наличием особенности и кратностью спектра, преодолеваются введением дополнительного параметра в основное уравнение обратной задачи, а также выявлением и использованием структурных свойств спектральных характеристик.

Данная диссертация состоит из двух глав. В главе I производится исследование спектральных свойств операторов с особенностью, дается постановка обратной задачи, доказывается единственность ее решения. В §1 вводится дифференциальное уравнение с особенностью, строятся специальные фундаментальные системы решений, вводятся краевые задачи к = 1,п — 1 приводится асимптотика их спектров.

§2 посвящен равносходимости разложений в ряд Фурье по системе собственных и присоединенных функций краевой задачи для дифференциального оператора (0.3) и по тригонометрической системе внутри конечного интервала. Для этого используется метод Коши-Пуанкаре интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра. В случае, когда и^ = 0, ] = 0, п — 2 , равносходимость имеет место для всякой суммируемой функции, что совпадает с результатом, полученным М.Стоуном [87]. Отметим, что вопросам равносходимости посвящены также работы [19], [20], [36], [46], [51], [61] и многие другие.

В §3 вводятся спектральные данные - совокупность спектров (п —1)-ой краевой задачи вк и матриц 0г1/ь1)Р(Ло) ; выявлены структурные свойства спектральных характеристик.

В §4 главы I доказана единственность восстановления дифференциального оператора с регулярной особенностью по спектральным данным.