МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Антипов Евгений Александрович

Асимптотика движения фронта в задачах реакция-диффузия-адвекция

01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	**Нефедов Николай Николаевич** доктор физико–математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Глызин Сергей Дмитриевич** доктор физико-математических наук, профессор Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова
	Нестеров Андрей Владимирович доктор физико-математических наук, профессор Московского городского педагогического университета
	Дмитриев Михаил Геннадьевич доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН

Защита состоится 19 апреля 2018 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.06 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, дом 1, стр. 2, физический факультет, ЦФА.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА» https://istina.msu.ru/dissertations/102230224/

Автореферат разослан 16 марта 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.06,
доктор физико-математических наук
профессор П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Диссертационная работа представляется к защите по специальности 01.01.03 – математическая физика, одной из целей которой является разработка математического аппарата для исследования математических проблем, возникающих в таких областях теоретической физики как механика жидкости и газа, механика частиц и систем, и других. В частности, особый интерес представляет наличие областей больших градиентов функций, описывающих температуру, плотность или скорость потока частиц, возникающее по причине пространственной неоднородности среды. Эти области называют внутренними переходными слоями. Задачи с внутренними переходными слоями содержат естественный малый параметр, равный отношению ширины переходного слоя к ширине рассматриваемой области, поэтому при разработке соответствующих математических моделей можно с успехом использовать сингулярно возмущенные задачи для уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с малым параметром при старшей производной по пространственным координатам [1] - [14]. В частности, интерес представляют задачи, имеющие решения вида движущихся фронтов. К таким задачам относятся, например, исследование фронтов горения [15] или нелинейных акустических волн [16] - [17]. Исследованию задач с решением вида движущегося фронта посвящена настоящая работа.

Актуальность темы заключается в том, что задачи с малым параметром при старшей производной по пространственным координатам относятся к разряду «жестких», при численном решении которых можно столкнуться с определенными трудностями, такими как выбор начальных условий, лежащих в области влияния решения с внутренним переходным слоем, а также подбор адекватных сеток для реализации разностных схем. Эффективным средством для преодоления этих трудностей является аналитическое исследование решения. Используемые в работе асимптотические методы, в частности, алгоритм Васильевой [18] и асимптотический метод дифференциальных неравенств [19] - [26] позволяют с точностью до малого параметра определить положение переходного слоя и уравнение его движения [27] - [31], а также обосновать существование решения рассматриваемого вида и тем самым подтвердить достоверность численных расчетов. Кроме того, исследования проведенные в работе, могут быть использованы для уточнения уже имеющихся математических моделей или для разработки новых. В частности, результаты, полученные в настоящей работе, являются важным этапом моделирования нелинейных волн, описываемых уравнением Бюргерса с так называемой квадратичной и «модульной» нелинейностями [16] - [17].

Цель работы

Получить обоснованные асимптотические приближения решений начально-краевых задач типа реакция-адвекция-диффузия с решениями вида движущихся одномерных и двумерных фронтов.

Определить влияние, которое оказывают реакция и адвекция на динамику движения фронта.

Задачи

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

Модификация алгоритма Васильевой для задач с адвективным слагаемым и распространение метода дифференциальных неравенств на случай начально-краевых задач с решением вида движущегося фронта, а также разработка иллюстрационных примеров.

– для одномерных начально-краевых задач типа реакция-адвекция-диффузия в случае «большой» адвекции, то есть когда адвективное слагаемое, сравнимо по порядку величины с реактивным, а диффузия мала,

– для двумерных нелинейных начально-краевых задач в которых решение вида движущегося фронта возникает благодаря нелинейным реактивным слагаемым,

– для двумерных начально-краевых задач с большим адвективным слагаемым.

Положения, выносимые на защиту

– Исследование новых классов сингулярно возмущенных задач типа реакция-диффузия-адвекция с решениями вида движущегося фронта.

– Разработка алгоритмов построения асимптотических разложений решений одномерных и двумерных задач с внутренними переходными слоями, дающих возможность определять уравнение движения фронта.

– Строгое математическое обоснование результатов. Доказательство существования решений вида движущегося фронта у начально-краевых задач.

Научная новизна

Исследование, проведенное в диссертационной работе продолжает цикл работ [26], [25], [32], касающихся асимптотического исследования решений краевых задач вида движущегося фронта на отрезке. Новизна работы заключается в том, что в ней асимптитические методы впервые были применены для исследования начально- краевых задач с «большим» адвективным слагаемым на отрезке, а также для задач с решением вида фронта в полосе.

Теоретическая и практическая ценность

Практическая значимость диссертационной работы состоит получении условий существования решений вида движущихся фронтов и асимптотических приближений уравнений движения фронта, возникающего за счет «большого» адвективного слагаемого или за счет нелинейного реактивного слагаемого. Полученные результаты могут быть использованы для разработки новых математических моделей в теории горения, акустике и теории упругости.

Теоретическая значимость работы состоит в развитии методов асимптотического исследования локализации фронта, а также распространении асимптотического метода дифференциальных неравенств на новые классы задач.

Личный вклад автора

Личный вклад автора состоит в модификации известных алгоритмов построения асимптотических разложений и обоснования существования решений с движущимися внутренними переходными слоями одномерных и двумерных задач типа реакция-диффузия-адвекция и двумерной начально-краевой задачи типа реакция-диффузия, а также в конструировании примеров указанных типов задач, подготовке публикаций и докладов на научных конференциях по теме диссертационной работы. Результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно.

Апробация работы

Результаты работы были доложены на следующих конференциях: FDM'14: Sixth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications (2014, Болгария), Международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики» (2014, Москва), Тихоновские Чтения 2014 года (2014, Москва), 11-th Annual Workshop "Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena (2014 Сербия), Ломоносовские чтения - 2017 (2017, Москва), International Conference on Mathematical Modeling in Applied Sciences (2017, Санкт-Петербург), Новые тенденции в нелинейной динамике (2017, Ярославль), Тихоновские Чтения 2017 года (2017, Москва).

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 16 публикаций, из которых 4 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, обзора литературы, трех содержательных глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 125 страниц. Список использованной литературы содержит 64 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** освещен круг вопросов, охваченных диссертацией, охарактеризованы актуальность и новизна работы и изложено ее краткое содержание.

В **Главе 1** приведен обзор научных работ, близких к теме диссертации — исследованию решений вида движущегося фронта в задачах реакция-адвекция-диффузия.

Глава 2 посвящена исследованию вопроса о существовании и асимптотическом приближении решения с внутренним переходным слоем задачи

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=A(u,x)\frac{\partial u}{\partial x}+B(u,x), \quad x\in(0;1), \quad t\in(0;T],\\
&u(0,t,\varepsilon)=u^0, \quad u(1,t,\varepsilon)=u^1, \quad t\in[0;T],\\
&u(x,0,\varepsilon)=u_{init}(x,\varepsilon), \quad x\in[0;1].
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $A(u,x)$ и $B(u,x)$ – достаточно гладкие функции в области $(u,x)\in I_u\times[0;1]$, I_u – некоторый промежуток изменения переменной u, $\varepsilon>0$ – малый параметр, $T>0$. Требуемый порядок гладкости функций A и B связан с порядком строящейся асимптотики.

Предполагается, что в начальный момент времени уже существует сформированный фронт, т.е. функция $u_{init}(x,\varepsilon)$ имеет внутренний переходный слой в окрестности некоторой точки x_{00} отрезка $[0;1]$. Доказывается существование решения в виде движущегося фронта, т.е. решения, имеющего внутренний переходный слой, который в каждый момент времени t локализован в окрестности точки $\hat{x}(t,\varepsilon)\in(0;1)$. Слева от указанной окрестности решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) близко к решению дифференциального уравнения

$$
A(u,x)\frac{du}{dx}+B(u,x)=0 \tag{2}
$$

с начальным условием $u(0)=u^0$, а справа – близко к решению уравнения (2) с начальным условием $u(1)=u^1$.

В **Главе 3** рассмотрена начально-краевая задача для уравнения реакция-диффузия:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\Delta u - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = f(u,x,y,\varepsilon), \quad x\in\mathbb{R},\ \ y\in(0,a),\ \ t\in(0,T],\\
&u_y(x,0,t,\varepsilon) = u_y(x,a,t,\varepsilon) = 0,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ t\in[0,T],\\
&u(x,y,t,\varepsilon) = u(x+L,y,t,\varepsilon),\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in[0,a],\ \ t\in[0,T],\\
&u(x,y,0,\varepsilon) = u_{init}(x,y,\varepsilon),\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in[0,a].
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ – малый параметр. Будем считать, что функция $f(u,x,y,\varepsilon)$ – L - периодическая по переменной x, достаточно гладкая в области $I_u\times\bar{D}$, где I_u – допустимый интервал значений u, $\bar{D}=\{(x,y):\mathbb{R}\times[0,a]\}$, $u_{init}(x,y,\varepsilon)$ - непрерывная функция в $\bar{D}$, L - периодическая по переменной x.

Считаем, что вырожденное уравнение $f(u,x,y,0)=0$ имеет в области $\bar{D}$ три изолированных L - периодических по переменной x корня $u=\varphi^{(\mp)}(x,y)$, $u=\varphi^{(0)}(x,y)$, причем всюду в области $\bar{D}$ выполняются неравенства $\varphi^{(-)}(x,y)<\varphi^{0}(x,y)<\varphi^{(+)}(x,y)$ и $f_u(\varphi^{(\mp)}(x,y),x,y,0)>0$, $f_u(\varphi^{0}(x,y),x,y,0)<0$.

Исследован вопрос существования решения задачи (3), которое имеет вид движущегося фронта, а именно, такого решения, которое в каждый момент времени при $0\leqslant y\leqslant h(x,t)$ близко к поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$, а при $h(x,t)\leqslant y\leqslant a$ близко к поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$, и резко изменяется от значений на поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$ до значений на поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$ в окрестности некоторой кривой $y=h(x,t)$.

Для задачи получены условия, при которых существует решение, построено его асимптотическое приближение по малому параметру и доказано существование. При доказательстве теоремы использовался асимптотический метод дифференциальных неравенств.

В **Главе 4** исследуется начально–краевая задача реакция-диффузия-адвекция:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = (\mathbf{A}(u,x,y),\nabla)\,u + B(u,x,y), \quad x\in\mathbb{R},\ \ y\in(0,a),\ \ t\in(0,T],\\
&u(x,0,t,\varepsilon) = u^0(x),\ \ u(x,a,t,\varepsilon) = u^1(x),\ \ x\in\mathbb{R},\ \ t\in[0,T],\\
&u(x,y,t,\varepsilon) = u(x+L,y,t,\varepsilon),\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in[0,a],\ \ t\in[0,T],\\
&u(x,y,0,\varepsilon) = u_{init}(x,y,\varepsilon),\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in[0,a].
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{A}(u,x,y) = \{A_1(u,x,y), A_2(u,x,y)\}$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ - малый параметр. Будем считать, что функции $A_i(u,x,y), i = 1,2$ и $B(u,x,y)$ – L-периодические по переменной x, достаточно гладкие в области $I_u \times \bar{D} \times [0,T]$, где I_u – допустимый интервал значений u, $\bar{D} = \{(x,y) : \mathbb{R}\times[0,a]\}$; функции $u^0(x)$, $u^1(x)$ – L-периодические, непрерывные при $x\in\mathbb{R}$; $u_{init}(x,y,\varepsilon)$ - непрерывная функция в $\bar{D}$, L – периодическая по переменной x.

Считаем, что дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$(\mathbf{A}(u,x,y),\nabla)\,u + B(u,x,y) = 0$$

с дополнительным условием $u(x,0) = u^0(x)$ имеет решение $\varphi^{(-)}(x,y)$, а с дополнительным условием $u(x,a) = u^1(x)$ — решение $\varphi^{(+)}(x,y)$, где $\varphi^{(\mp)}(x,y)$ — достаточно гладкие в $\bar{D}$ L-периодические по переменной x функции, причем

$$\varphi^{(-)}(x,y) < \varphi^{(+)}(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y)\in\bar{D}.$$

Исследован вопрос о существовании и асимптотическом приближении решения задачи (4), которое имеет вид движущегося фронта изменяющегося от значений на поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$ до значений на поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$ в окрестности некоторой кривой $y = h(x,t)$.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

Статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI

1. Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н. Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 10. — С. 35–49. Translated in English: Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N. N. Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 54, no. 10. — P. 1536–1549.

2. Volkov V.T., Nefedov N.N., Antipov E.A. Asymptotic-numerical method for moving fronts in two-dimensional r-d-a problems // Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9045. — P. 408–416.

3. Антипов Е.А. , Волков В.Т. , Левашова Н.Т. , Нефедов Н.Н. Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 259–279.

4. Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., «Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым», Моделирование и анализ информационных систем, 25:1 (2018), 17–31.

Статья в сборнике

Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т., Антипов Е.А., Ягремцев А.В. Решение вида контрастной структуры типа ступеньки в нестационарной задаче реакция-адвекция-диффузия случае // Математические методы и приложения. Труды двадцатых математических чтений РГСУ. — М.: АПКиППРО Москва, 2011. — С. 93–99.

Тезисы докладов

1. Попов В. Ю., Антипов Е. А., Левашова Н. Т. Численное исследование процессов формирования контрастных структур в задачах реакция-адвекция-диффузия // Научная конференция Тихоновские чтения. 25-29 октября 2010 года. МГУ им. М.В.Ломоносова. — МАКС Пресс Москва, 2010. — С. 52–53.

2. Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т., Антипов Е.А., Ягремцев А.В. Решение вида контрастной структуры типа ступеньки в нестационарной задаче реакция-адвекция-диффузия случае. Математические методы и приложения // Мат. методы и приложения. Труды математических чтений РГСУ. — АПК и ППРО Москва, 2011. — С. 93–99.

3. Ягремцев А. В., Антипов Е. А. Исследование решения контрастной структуры типа ступенька в задаче реакция-диффузия-адвекция // Материалы конференции "Ломоносов-2011". — МГУ электронное, 2011.

4. Антипов Е.А., Волков В.Т., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотическое описание движущихся фронтов в двумерной задаче реакция-диффузия // Международный научный семинар "Актуальные проблемы математической физики". Сборник тезисов докладов. — Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, 2014. — С. 116–119.

5. Антипов Е.А., Волков В.Т., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотическое описание движущихся фронтов в двумерной задаче реакция-диффузия // Международный научный семинар Актуальные проблемы математической физики. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет. — Издательство физического факультета МГУ Москва, 2014. — С. 116–119.

6. Нефедов Н.Н., Волков В.Т., Левашова Н.Т., Антипов Е.А. Асимптотико - численный подход при описании движущегося фронта в задаче реакция-адвекция-диффузия // Научная конференция Тихоновские чтения. Тезисы докладов. — Москва, 2014. — С. 77–78.

7. Volkov V.T., NefedovN N., Antipov E.A. Analytic-numerical method for moving fronts in two-dimensional r-d-a problems // Abstract of “FDM’14: Sixth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications”. June 18-23, 2014. Lozenetz, Bulgaria. — 2014. — P. 40–40.

8. Volkov V.T., Nefedov N.N., Antipov E.A. Analytic- numerical method for moving fronts in reaction-advection-diffusion equations // Abstracts of the 11-th Annual Workshop “Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena”, Novi Sad, Serbia. — 2014. — P. 21–22.

9. Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т., Антипов Е.А. Существование и асмптотика фронтов в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция // Тезисы докладов научной конференции Тихоновские чтения. — МАКС-Пресс Москва, 2017. — С. 75–75.

10. Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н. Пример построения асимптотического приближения решения вида движущегося фронта уравнения реакция-диффузи-адвекция в двумерной области // Сборник тезисов международной конфеернции "Новые тенденции в нелинейной динамике". — Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова г. Ярославль, 2017. — С. 15–17.

11. Antipov E., Levashova N., Nefedov N. The moving front solution in a two dimensional problem from reaction-diffusion-advection equation // International conference on mathematical modelling in applied sciences. Saint Petersburg-Russia. July 24-28 2017. — Saint Petersburg-Russia, 2017. — P. 203–204.

Список цитированной литературы:

1. Применение теории контрастных структур для описания поля скорости ветра в пространственно-неоднородном растительном покрове / Н. Т. Левашова, Ю. В. Мухартова, М. А. Давыдова и др. // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — № 3. — С. 3–10.

2. Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред / А. Э. Сидорова, Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова, Л. В. Яковенко // Биофизика. — 2015. — Т. 60, № 3. — С. 574–582.

3. *Левашова Н.Т., Николаева О.А., Пашкин А.Д.* Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — № 5. — С. 12–16.

4. *Левашова Н.Т., Мухартова Ю.В., Ольчев А.В.* Трехмерное моделирование турбулентного переноса в приземном слое атмосферы с применением теории контрастных структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 2. — С. 355–367.

5. Модель структурообразования урбоэкосистем как процесс автоволновой самоорганизации в активных средах / А. Э. Сидорова, Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова, А. Е. Семина // Математическая биология и биоинформатика. — 2017. — Т. 12, № 1. — С. 186–197.

6. *Давыдова М.А., Захарова С.А., Левашова Н.Т.* Об одной модельной задаче для уравнения реакция-диффузия-адвекция // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 9. — С. 1548–1559.

7. *Н.Е. Грачев, А.В. Дмитриев, Д.С. Сенин, В.Т. Волков, Н.Н. Нефедов*, “Моделирование динамики фронта внутрипластового горения”, Выч. мет. программирование, 11:4 (2010), 306–312.

8. *В.Т. Волков, Н.Н. Нефедов, Н.Е. Грачев, Д.С. Сенин*, "Оценка параметров фронта внутрипластового горения при закачке воздуха в нефтяной пласт", Нефтяное хозяйство, 2010, № 4, 93–96.

9. *В.Т. Волков, Н.Н. Нефедов, Н.Е. Грачев*, "Численно-асимптотическое исследование модели движения фронтов в задачах нефтедобычи", Материалы международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», ТГПУ им. Л.Н.Толстого, Тула, 2011, 115–116.

10. *М.П. Белянин, А.Б. Васильева*, "О внутреннем переходном слое в одной задаче теории полупроводниковых плёнок", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 28:2 (1988), 224–236; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 28:1 (1988), 145–153.

11. *М.П. Белянин, А.Б. Васильева, А.В. Воронов, А.В.* Тихонравов, "Об асимптотическом подходе к задаче синтеза полупроводникового прибора", Матем. моделирование, 1:9 (1989), 43–63.

12. *В.Т. Волков, С.В. Крючков, И.А. Обухов, С.В. Румянцев*, "Численноасимптотический анализ переходных процессов в полупроводниках", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 29:8 (1989), 1159–1167; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 29:4 (1989), 132–138.

13. *Л.В. Калачев, И.А. Обухов*, "Приближенное решение уравнения Пуассона в модели двумерной полупроводниковой структуры", Вестник Московского Университета, 30:3 (1989), 63–68.

14. *Л.В. Калачев, С.В. Крючков, И.А. Обухов*, "Асимптотический анализ решения уравнения Пуассона в полупроводниках", Матем. моделирование, 1:9 (1989), 129–140.

15. *Michael A Liberman, Mikhail F Ivanov, Oleg E Peil1, Damir M Valiev and Lars-Erik Eriksson.* Numerical studies of curved stationary flames in wide tubes. Combust. Theory Modelling 7 (2003) 653–676

16. *Rudenko O.V.* Inhomogeneous burgers equation with modular nonlinearity: Excitation and evolution of high-intensity waves // Doklady Mathematics. — 2017. — Vol. 95, no. 3. — P. 291–294.

17. *Руденко О.В.* Неоднородное уравнение бюргерса с модульной нелинейностью: возбуждение и эволюция интенсивных волн // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 474, № 6. — С. 671–674.

18. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.

19. *Nefedov N.N.* An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability // Differential Equations. — 2000. — Vol. 36, no. 2. — P. 298–305.

20. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Шнайдер К.Р.* О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2005. — № 1. — С. 9–13.

21. *Nefedov N.N.* Spike-type contrast structures in reaction-diffusion systems // Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 150, no. 6. — P. 2540–2549.

22. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического института им.В.А.Стеклова РАН. — 2010. — № 268. — С. 268–283.

23. *Нефедов Н.Н., Давыдова М.А.* Периодические контрастные структуры в системах типа реакция-диффузия-адвекция // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 2010, № 46. — С. 1300–1312.

24. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внут-

ренними слоями. //Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. N7. С. 1132—1139.

25. *В.Т. Волков, Н.Н. Нефедов*, "Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:4 (2006), 615–623; Comput. Math. Math. Phys., 46:4 (2006), 585–593.

26. *Н.Н. Нефедов, Ю. В. Божевольнов.* Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия. *Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ.*, 2010, том 50, N2, сс. 276–285; Comput. Math. Math. Phys., 50:2 (2010), 264–273.

27. *Volkov V.T., Lukyanenko D.V., Nefedov N.N.* Asymptotic-numerical method for the location and dynamics of internal layers in singular perturbed parabolic problems // Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — Vol. 10187. — P. 721–729.

28. *Lukyanenko D.V., Nefedov N.N., Nikulin E., Volkov V.T.* Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction-diffusion-advection equations // Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — Vol. 10187. — P. 107–118.

29. *Lukyanenko D.V., Volkov V.T., Nefedov N.N. et al.* Analytic-numerical approach to solving singularly perturbed parabolic equations with the use of dynamic adapted meshes // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Vol. 23, no. 3. — P. 334–341.

30. *Lukyanenko D.V., Volkov V.T., Nefedov N.N.* Dynamically adapted mesh construction for the efficient numerical solution of a singular perturbed reaction-diffusion-advection equation // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Vol. 24, no. 3. — P. 322–338.

31. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M. A., Volkov V.T.* Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2018. — Vol. 54. — P. 233–247.

32. *Nefedov N.N., Yagremtsev A.* On extension of asymptotic comparison principle for time periodic reaction-diffusion-advection systems with boundary and internal layers // Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9045. — P. 62–72.