На правах рукописи

Чернова Ольга Викторовна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород – 2019

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, заслуженный деятель науки РФ,
Солдатов Александр Павлович

Официальные оппоненты: *Расулов Абдурауф Бабаджанович*
доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
доцент кафедры высшей математики

Жура Николай Андреевич
кандидат физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук,
старший научный сотрудник сектора теоретической радиофизики

Защита состоится 18 июня 2019 г. в 16 ч. 00 мин.
на заседании диссертационного совета БелГУ.01.01 при ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
по адресу: 308015 г. Белгород, ул. Победы 85, корп. 17, ауд. 331.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» и на сайте *library.bsu.edu.ru*.

Автореферат разослан «____»__________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Полунин Виктор Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы исследования. Краевые задачи для эллиптических уравнений и систем составляют один из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными. Самой первой по праву работой по изучению эллиптических задач в областях с угловыми точками считается работа И. Радона [1]. Для случая плоской области с угловыми точками на границе им был применен метод решения уравнений с частными производными путем сведения краевой задачи (Неймана и Дирихле) для оператора Лапласа к интегральным уравнениям на границе области. Впоследствии предложенный метод нашел широкое применение в различных направлениях: в краевых задачах теории функций [2], плоской теории упругости [3], а также общей теории эллиптических задач [4].

Одной из основных краевых задач аналитических функций является задача Римана–Гильберта. Первая постановка этой задачи для аналитических функций исторически принадлежит Б. Риману, который в 1857 г. сформулировал ее следующим образом: найти аналитическую в области D функцию по известному соотношению между действительной и мнимой частями на границе области, но не указал способов ее решения. В 1904 г. Д. Гильберт свел задачу Римана к интегральным уравнениям, дав тем самым, первое доказательство существования ее решения. [5] В связи с этим данную задачу стали называть задачей Римана–Гильберта. Впервые в 1907 г. И. Племель [6] применил к краевой задаче Римана–Гильберта интеграл типа Коши. Такой подход оказался настолько удачным, что и в настоящее время интеграл типа Коши является основным средством для исследования и решения краевых задач. Уже к концу 50-х годов в работах выдающихся математиков И. Н. Векуа [7], Ф. Д. Гахова [8], Н. И. Мусхелешвили [9] изучение этой задачи было завершено. Задача Римана–Гильберта тесно связана с задачей линейного сопряжения, постановка которой также восходит к Б. Риману.

[1] Радон И. О краевых задачах для логарифмического потенциала / И. Радон // УМН. — 1946. — Т. 1, вып. 3–4(13–4). — С. 96–124.

[2] Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости / И. И. Данилюк. — М.: Наука, 1975. — 296 с.

[3] Магнарадзе Л. Г. Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками / Л. Г. Магнадзе // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 16, № 3. — С. 157–161.

[4] Лопатинский Я. Б. Теория общих граничных задач / Я. Б. Лопатинский. — К: Наукова думка, 1984. — 316 с.

[5] Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

[6] Plemelj J. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe /J. Plemelj // Monatshefte für Mathematik und Physik. – 1908. – V. 19. – P. 211–246.

[7] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. — 512 с.

[8] Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

[9] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1968. — 513 с.

В современной теории эллиптических краевых задач важное место занимает проблема постановки фредгольмовых краевых задач для общих эллиптических систем. Эта проблема была поставлена в монографии А. В. Бицадзе [10]. Отметим, что в представлении А. В. Бицадзе решений эллиптических систем наряду с аналитическими функциями участвуют и ее производные до некоторого порядка. А. П. Солдатову [11] удалось существенно упростить это представление, заменив аналитические функции решениями канонических эллиптических систем первого порядка. Как показано А. Дуглисом [12], все элементы теории аналитических функций распространяются и на решения этой системы.

Степень разработанности вопроса. Во второй половине прошлого века теория краевых задач для эллиптических уравнений была изучена в работах многих математиков. Перечислим некоторых из них: S. Agmon, F. Browder, L. Bers, J. L. Buchanan, A. Douglis, R. P. Gilbert, L. Hormander, A. John, L. Nirenberg, M. Schechter, М. С. Агранович, И. А. Бикчантаев, В. С. Виноградов, М. И. Вишик, Л. Р. Волевич, А. И. Вольперт, С. А. Назаров, И. Г. Петровский, Б. А. Пламеневский, Я. А. Ройтберг, Р.С. Сакс, В. А. Солонников, З. Г. Шефтель. Разумеется, этот список не полон и может быть существенно расширен.

В последние годы XX-го века усилился интерес к решению эллиптических краевых задач путем редукции их к сингулярным уравнениям на границе [13].

Известны два классических способа: метод потенциала и теоретико–функциональный метод. В работах [14, 15] были получены фундаментальные результаты по решению общих эллиптических задач методом потенциала. Отметим работу Я. Б. Лопатинского [16] как одну из первых работ, посвященных краевым задачам для эллиптических систем в двумерной области с угловой точкой. В дальнейшем метод потенциала для эллиптических систем высокого порядка на плоскости был развит в работах S. Agmon [17] и G. Fichera [18], а для эллип-

[10] Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1966.— 203 с.

[11] Солдатов А. П. Эллиптические системы высокого порядка / А. П. Солдатов // Дифференц. уравнения. — 1989. —Т. 25, № 1. — С. 136–144.

[12] Douglis A. A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables / A. Douglis // Comm. on Pure and Appl. Math. — 1953. — V. 6. — P. 259–289.

[13] Мазья В. Г. Граничные интегральные уравнения / В. Г. Мазья // Анализ – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНИТИ, М. — 1988. — С. 131–228.

[14] Giraud G. Nouvelles méthode pour traiter certaines problèmes relatifs aux équations du type elliptique //J. de Math. — 1939. —V. 18. — P. 111–143.

[15] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. — М.: ИЛ, 1957. — 256 с.

[16] Лопатинский Я. Б. Теория общих граничных задач / Я. Б. Лопатинский. — К: Наукова думка, 1984. — 316 с.

[17] Agmon S. Milteple layer potentials and Dirichlet problem for higher order elliptic equation in the plane. I / S. Agmon // Comm. on Pure and Appl. Math. — 1957. — V. 10. — P. 179–239.

[18] Fichera G. Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral

тических систем с постоянными старшими коэффициентами в работе [19]. Классический теоретико–функциональный метод восходит к трудам А. Пуанкаре, Л. Гильберта, Т. Карлемана, И. И. Привалова. Основываясь на представлении решений эллиптических уравнений через аналитические функции, он позволяет свести исследование исходной задачи к исследованию краевых задач теории функций. Так И. Н. Векуа в своей работе [20] развил теоретико–функциональный метод для эллиптических уравнений на плоскости с вещественно аналитическими коэффициентами, а для эллиптических систем с постоянными старшими коэффициентами данный метод получил развитие в работах А. В. Бицадзе [21], а также в работах Р. С. Сакса [22] и Н. Е. Товмасяна [23].

Отметим, что теоремы фредгольмовости в классах W_p^1 были изучены в 60-х гг. прошлого века Б. Боярским [24]. Другие подходы для эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами были получены в работе R. P. Gilbert, J. L. Buchanan [25].

В настоящей диссертации развивается подход к исследованию краевых задач для эллиптических систем первого порядка на плоскости, основанный на новых интегральных представлений функций обобщенными интегралами типа Коши с вещественной плотностью и интегралами типа потенциала с комплексной плотностью.

Цели и задачи диссертационной работы. Установление новых интегральных представлений и доказательство фредгольмовой разрешимости краевых задач для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами.

Тема диссертации находится в соответствии с п. 1 паспорта специальности «Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений».

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты дис-

---

equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity /G. Fichera // Part. Diff. Equations and Contin. Mech. (langer, cd). Univ. of Wisconsin Press, Madison. — 1961. — P. 55–80.

[19] Fichera G., Ricci P. E. The single layer potential approach in the theory of boundary value problems for elliptic equations /G. Fichera, P. E. Ricci // Lecture Notes in Math. — 1976. — V. 561. — P. 39–50.

[20] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И. Н. Векуа. — М.: ОГИЗ, Государственное издание технико-технической литературы, 1948. — 296 с.

[21] Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1966.— 203 с.

[22] Сакс Р. С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений, спецкурс для студентов–математиков вузов / Р. С. Сакс. — Новосибирск, НГУ. — 1975. — 165 с.

[23] Товмасян Н. Е. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. II / Н. Е. Товмасян // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 2, № 2. — С. 163–171.

[24] Боярский Б. В. Теория обобщенного аналитического вектора // Annales Polonici Mathematici. — 1966. — V. 17, № 3. — P. 281–320.

[25] Gilbert R. P. First order elliptic systems /R. P. Gilbert, J. L. Buchanan. — Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1983. — 296 pp.

сертации имеют теоретический характер. Они могут быть использованы для последующего развития общей теории краевых задач для эллиптических систем первого порядка на плоскости.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории функций, комплексного анализа, функционального анализа и линейной алгебры, а так же методы теории сингулярных интегральных уравнений.

Положения, выносимые на защиту.

1. Установлена ограниченность обобщенного оператора Векуа–Помпейю в весовом пространстве Гельдера на всей плоскости.

2. Доказан критерий фредгольмовости задачи Римана–Гильберта для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами в конечной и бесконечных многосвязных областях и получена формула для индекса.

3. Эти результаты распространены на вещественные эллиптические системы первого порядка.

4. Доказан критерий фредгольмовости наиболее общей задачи линейного сопряжения на гладком простом контуре для эллиптической системы первого порядка и найдена формула индекса задачи.

Степень достоверности и апробации результатов. Результаты представленной диссертации по мере их получения докладывались автором и обсуждались на научно–исследовательском семинаре «Комплексный анализ и дифференциальные уравнения» под руководством А. П. Солдатова и В. Б. Васильева при Белгородском государственном национальном исследовательском университете (2008–2018 гг.) и на математическом семинаре НИУ «БелГУ» (рук. Васильев В. Б., Мейрманов А. М., Ситник С. М.) в 2019 г.

Наиболее значимые результаты диссертационной работы докладывались на III и V Школах молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Нальчик-Эльбрус), которые проводились, соответственно, в 2005 и 2007 гг., в ходе Воронежской зимней математической школы «Современные методы теорий функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2005), на VII и VIII школах молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики», которые проводились, соответственно, в рамках Российско-Абхазского (Нальчик-Эльбрус, 2009) и Российско-Болгарского (Нальчик-Хабез, 2010) симпозиумов; на международной заочной научно-практической конференции «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика» (Воронеж, 2015); на VI Международной научно–практической заочной конференции «Актуальные проблемы и перспективы преподавания математики» (Курск, 2016). Также результаты диссертации были представлены на III Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук» (Орел, 2017), Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна ВЗМШ – 2018» (Воронеж, 2018), IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик, Приэльбрусье, п. Терскол, 2018), VII Международной научно-технической конференции «Информационные технологии в науке, образовании и производстве» (Белгород, 2018), Международной молодежной научно-практической конференции «Школа молодых ученых: достижения в области науки и техники» (Воронеж, 2018), IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (Орел, 2018), XVII Всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения–2018» (Казань, 2018) и на V-ой международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2018).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [1]–[23], список которых приведен в конце автореферата. Из них первые 6 выполнены в изданиях из перечня ведущих периодических изданий, рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов. В совместных работах [1]–[3], [5], [7]–[9], [12], [14], [16] постановка задач и рекомендации общего характера, связанные с применяемыми методами исследования, принадлежат научному руководителю А. П. Солдатову.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы и списка литературы, содержащего 120 наименований. Общий объем диссертации составляет 103 страницы.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А. П. Солдатову за постановку задач, за помощь на всех этапах выполнения диссертации, за ценные советы, поддержку и внимание к работе.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит краткий исторический обзор по теме диссертации, актуальность выбранной темы исследования, цель диссертационной работы, апробацию работы, публикации по теме диссертации. Описывается структура диссертации и кратко излагается содержание основных результатов.

Первая глава диссертации состоит из четырех параграфов и содержит предварительные сведения, касающиеся эллиптических систем первого порядка, функций, аналитических по Дуглису, одномерных сингулярных интегралов и обобщенного оператора Векуа–Помпейю.

В **первом параграфе** в произвольной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной $z = x + iy$ рассматривается система l линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_1 \frac{\partial U(z)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U(z)}{\partial y} + a_1(z)U(z) + a_2(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D,$$

где коэффициенты при старших членах – постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l \times l}$, а $l \times l-$матричные коэффициенты $a_1, a_2 \in C(D)$. В покомпонентной записи система состоит из l скалярных уравнений. Под решением этой системы понимается комплексная $l-$вектор–функция $U = (U_1, ..., U_\ell)$ класса $C^1(D)$, удовлетворяющая этой системе тождественно.

По определению система эллиптическая, если для каждого ненулевого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, выполнено условие $\det(\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2) \neq 0$, тогда матрица $A = -A_2^{-1} A_1$ не имеет вещественных собственных значений и предыдущую систему, с учетом переобозначения правой части, всегда можно представить в эквивалентном виде

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} + aU + b\overline{U} = F. \tag{1}$$

Система (1) – общая эллиптическая система, коэффициенты при производных которой постоянны и матрица A не имеет вещественных собственных значений.

Пусть l_1 и l_2 число собственных значений матрицы A системы (1) (с учетом кратности), лежащих, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, при этом $l = l_1 + l_2$. Множество всех собственных значений можно записать в виде $\widetilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \overline{\sigma_2}$, $\sigma_i \subseteq \{\lambda, \ \operatorname{Im} \lambda > 0\}$, где черта означает комплексное сопряжение.

С помощью подходящей обратимой линейной подстановки систему (1) всегда можно преобразовать к каноническому виду, т.е. к аналогичной системе, в которой все собственные значения матрицы системы лежат в верхней полуплоскости. В основе этого преобразования лежит следующее предложение

Лемма 1.1. (a) *Существуют такие обратимые $l \times l$ матрицы B, J блочной структуры*

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j}$, $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}$, $i, j = 1, 2$, что

$$B^{-1} A B = \widetilde{J}, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J}_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

причем матрица J_i записана в жордановой форме и ее диагональные элементы составляют множество σ_i.

(b) *Если матрица A вещественна, то $l_1 = l_2$ и, следовательно, число $l-$четно. Множества σ_1 и σ_2 совпадают, так как с каждым комплексным корнем есть комплексно сопряженный той же кратности, а матрицы B и J можно подчинить условиям $J_1 = J_2$, $B_{i1} = B_{i2}$.*

Опираясь на второе утверждение этой леммы, в случае вещественной матрицы A общая эллиптическая система (1) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x} + aU = F, \tag{4}$$

с вещественными $2l \times 2l$ матричными коэффициентами A, a и $2l-$компонентными вещественными векторами U и F.

Основным результатом этого параграфа является доказательство двух теорем о сведении общей эллиптической системы (1) и общей вещественной эллиптической системы (4) к каноническому виду эллиптической системы с треугольной матрицей J.

Свяжем с $l-$вектор–функцией $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, где ϕ_1 означают первые l_1 компонент, а ϕ_2 следующие l_2 компонент, $l-$вектор–функцию $\widetilde{\phi} = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$. Аналогично положим

$$\widetilde{F}_0 = B^{-1}F = (F_1, \overline{F}_2), \quad F_0 = (F_1, F_2),$$

и введем блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} \end{pmatrix} = B^{-1}aB, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \widetilde{d}_{21} & \widetilde{d}_{22} \end{pmatrix} = B^{-1}b\overline{B}.$$

Теорема 1.1. *В обозначениях (2) подстановка $B^{-1}U = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$, или в блочной записи, подстановка*

$$U_i = B_{i1}\phi_1 + \overline{B_{i2}\phi_2}, \quad i = 1, 2,$$

преобразует систему (1) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial y} - J\frac{\partial \phi(z)}{\partial x} + c(z)\phi(z) + d(z)\overline{\phi(z)} = F_0(z), \tag{5}$$

где $l \times l-$матричные коэффициенты имеют вид

$$c = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{d}_{12} \\ \overline{\widetilde{d}_{21}} & \overline{\widetilde{c}_{22}} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \overline{\widetilde{c}_{21}} & \overline{\widetilde{d}_{22}} \end{pmatrix}.$$

Обратимся к вещественной системе (4). Удобно $2l-$компонентный вектор U представить в следующем виде $U = (U_1, U_2)$, с $l-$компонентными векторами

$U_i, i = 1, 2$. При этом, согласно лемме 1.(b) в соотношениях (2), (3) можно положить

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & \overline{B}_1 \\ B_2 & \overline{B}_2 \end{pmatrix} = (B, \overline{B}), \quad \text{где} \quad B \in \mathbb{C}^{2l\times l},$$
$$\widetilde{B}^{-1} A \widetilde{B} = \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \overline{J} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{F}_0 = \widetilde{B}^{-1} 2F = (2F, 2\overline{F}). \tag{6}$$

Теорема 1.2. *В обозначениях (6) подстановка* $\widetilde{\phi} = 2\widetilde{B}^{-1}U = (\phi, \overline{\phi})$, *или в блочной записи, подстановка*

$$U_i = \mathrm{Re} B_i \phi, \quad i = 1, 2,$$

преобразует систему (4) к эквивалентной системе (5) с $l \times l-$ *матричными коэффициентами*

$$c = \widetilde{a}_{11}, \quad d = \widetilde{a}_{12},$$

где

$$\widetilde{a} = \widetilde{B}^{-1} a \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

есть $2l \times 2l-$*комплекснозначная матрица.*

Второй параграф носит вспомогательный характер. Здесь рассматриваются основные сведения, касающиеся системы Дуглиса

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

с треугольной матрицей $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$, собственные значения λ которой лежат в верхней полуплоскости. Заметим, что это простейшая эллиптическая система первого порядка получена из (5) при $c = d = F_0 = 0$.

В предположении что матрица $J-$тёплицева [26], эта система впервые в 1953 г. была изучена А. Дуглисом [27] в рамках так называемых гиперкомплексных чисел. Она играет важную роль [28] при исследовании эллиптических систем второго и более высоких порядков.

В случае скалярной матрицы $J = \lambda$ имеем систему

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

[26] Иохвидов И. С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы : Алгебраич. теория. / И. С. Иохвидов. — М.: Наука, 1974. — 263 с.

[27] Douglis A. A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables / A. Douglis // Comm. on Pure and Appl. Math. — 1953. — V. 6. — P. 259–289.

[28] Солдатов А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай / А. П. Солдатов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 5. — С. 1070–1100.

которая при $\lambda = i$ составляет условие Коши–Римана, определяющее обычные аналитические функции комплексной переменной z. Можно сказать, что система (7) есть аналог системы Коши–Римана, когда роль мнимой единицы играет матрица J, собственные значения которой расположены в верхней полуплоскости.

Как и в случае обычных аналитических функций, легко устанавливается, что функция $\phi \in C^1(D)$ удовлетворяет системе (7) тогда и только тогда, когда в каждой точке z_0 области D существует предел

$$\phi'(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)_J^{-1} [\phi(z) - \phi(z_0)],$$

который в точке z_0 совпадает с частной производной $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$.

По этой причине, $l-$вектор–функция $\phi \in C^1(D)$ называется аналитической по Дуглису, если она удовлетворяет уравнению (7). Иногда, чтобы подчеркнуть зависимость от матрицы J, решения системы Дуглиса (7) называем также $J-$аналитическими функциями. Основные сведения, касающиеся этой системы подробно изложены в работе А. П. Солдатова [29]. Напомним некоторые из них, основанные на аналогах формулы Коши для решений системы (7).

Для этого с каждым комплексным числом $x + iy$ свяжем $l \times l-$матрицу

$$z_J = x \cdot 1 + y \cdot J, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

собственными значениями которой служат числа $x + \lambda y$, где $\lambda \in \sigma(J)$, а 1 есть единичная матрица. В частности, при $z \neq 0$ эта матрица обратима.

В соответствии с обобщенной формулой Коши, которая является аналогом интегральной формулы Коши введем обобщенный интеграл типа Коши

$$(I_J^1 \varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (t - z)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad z \in D, \tag{8}$$

с произвольной $l-$вектор–функцией $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_l(t)) \in C(\Gamma)$ и матричным дифференциалом $dt_J = dt_1 + J dt_2$, который действует на $l-$вектор–функцию $\varphi(t)$ обычным образом и поэтому поставлен впереди. Этот интеграл определяет функцию, $J-$аналитическую вне кривой Γ. С ним также связан обобщенный сингулярный интеграл

$$(S_J \varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma (t - t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{9}$$

который понимается обычным образом в смысле главного значения по Коши.

---

[29] Солдатов А. П. Гипераналитические функции и их приложения: учебное пособие / А. П. Солдатов. Федер. агенство по образованию, Белгор. гос. ун-т. — Белгород: БелГУ, 2006. — 108 с.

Для интегралов (8)–(9) справедлив результат [30], аналогичный классическому случаю. Единственное отличие состоит в том, что на контур Γ необходимо наложить дополнительное условие гладкости. Обозначим $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ единичный касательный вектор к Γ в точек t, направление которого согласовано с ориентацией контура. Его можно рассматривать как непрерывную функцию на Γ. По определению Γ называют ляпуновским контуром, если эта функция удовлетворяет условию Гельдера. Более точно, этот контур принадлежит классу $C^{1,\nu}$, если функция $e(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$, $0 < \nu < 1$.

Теорема 2.1. *Пусть область $D \subset \mathbb{C}$ ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, который ориентирован положительно по отношению к D. Тогда для вектор–функции $\varphi(t)$ из класса $C^{\mu}(\Gamma)$, функция $(I^1_J\varphi)(z)$, аналитическая по Дуглису, непрерывно продолжима на границу $\Gamma = \partial D$ области D, и оператор I^1_J ограничен $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\overline{D})$. При этом для граничных значений $(I^1_J\varphi)^+$ этой функции справедливы формулы Сохоцкого–Племеля*

$$2(I^1_J\varphi)^+(t_0) = \varphi(t_0) + S_J\varphi(t_0) \quad t_0 \in \Gamma.$$

Если контур Γ, ориентирован отрицательно по отношению к D, то в первом слагаемом выше указанного равенства следует поставить знак минус.

Хорошо известна теорема Н. И. Мусхелишвили [31] о представлении аналитических функций, удовлетворяющих условию Гельдера в замкнутой области, интегралами типа Коши с вещественной плотностью

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in D.$$

В завершение второго параграфа приведена теорема о представлении функций, аналитических по Дуглису обобщенными интегралами типа Коши с вещественной плотностью, которая является аналогом теоремы Н.И. Мусхелишвили.

Теорема 2.2. (a) *Пусть область D конечна и контур Γ состоит из простых контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, где для определенности последний контур охватывает все остальные. Тогда любая $J-$аналитическая в D функция $\phi^0 \in C^{\mu}(\overline{D})$ единственным образом представима в виде*

$$\phi^0(z) = (I^1_J\varphi)(z) + i\xi,$$

с вещественным $l-$вектором $\xi \in \mathbb{R}^l$ и некоторой вещественной $l-$вектор–

[30] Солдатов А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай / А. П. Солдатов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 5. — С. 1070–1100.

[31] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1968. — 513 с.

функцией $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$*, удовлетворяющей условиям*

$$\int\limits_{\Gamma_i} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \le i \le m-1,$$

где $d_1 t-$*элемент длины дуги.*

(b) *Пусть область* D *бесконечна и контур* Γ *состоит из простых контуров* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$*. Тогда любая* $J-$*аналитическая в* D *функция* $\phi^0 \in C^\mu(\overline{D})$*, исчезающая на бесконечности, единственным образом представима в виде*

$$\phi^0(z) = (I_J^1 \varphi)(z),$$

с некоторой вещественной $l-$*вектор–функцией* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$*, удовлетворяющей условиям*

$$\int\limits_{\Gamma_i} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \le i \le m.$$

Третий параграф первой главы посвящен одномерным сингулярным операторам. Простейшим сингулярным оператором на ориентированном гладком контуре Γ является оператор Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

который понимается в смысле главного значения по Коши.

Исходя из $l \times l-$матриц–функций $a, b \in C^\mu(\Gamma)$, рассмотрим сингулярный оператор

$$2N = a(1+S) + b(1-S) + 2N_0, \tag{10}$$

где a и b понимаются как операторы умножения $\varphi \to a\varphi$, оператор N_0 компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ и 1 означает единичный оператор. Оператор N принадлежит к нормальному типу, если матрицы–функции a и b обратимы, т. е. $\det a(t) \ne 0$ для всех $t \in \Gamma$ и аналогичным свойством обладает b.

Напомним [32], что оператор N, ограниченный в банаховых пространствах $X \to Y$, фредгольмов, если подпространство $\{x \in X, \ Nx = 0\}$, называемое его ядром $\ker N$, конечномерно, образ $\operatorname{im} N = N(X)$ замкнут в Y и фактор–пространство $Y/\operatorname{im} N$, называемое его коядром $\operatorname{coker} N$, также конечномерно. Удобно для краткости размерности $\dim(\ker N)$ и $\dim(\operatorname{coker} N)$ обозначать, соответственно, $\dim N$ и $\operatorname{codim} N$.

Целое число $\operatorname{ind} N = \dim N - \operatorname{codim} N$ называется индексом оператора N. Коядро $\operatorname{coker} N = Y/\operatorname{im} N$ часто отождествляется с ядром $\ker N^*$ сопряженного оператора N^*.

[32] Пале Р. Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе / Р. Пале. — М.: Мир, 1970. — 360 с.

Классический результат [33] для сингулярных операторов (10) нормального типа состоит в том, что они фредгольмовы и их индекс выражается через индекс Коши матрицы–функции $G = ba^{-1}$.

Теорема 3.2. *Пусть матрицы–функции $a, b \in C^\nu(\Gamma)$ и оператор N_0 компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. Тогда оператор (10) фредгольмов в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда матрицы a, b обратимы и его индекс дается формулой*

$$\text{ind } N = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det b}{\det a}\right]_\Gamma,$$

где $[\quad]_\Gamma$ означает приращение непрерывной ветви логарифма на контуре Γ в соответствии с заданной его ориентацией.

Примером компактного оператора в $C^\mu(\Gamma)$ служит интегральный оператор вида

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt, \quad t_0 \in \Gamma,$$

где функция $k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$ с некоторым $\nu > \mu$ и обращается в нуль при $t = t_0$. Очевидно, ядро $k(t_0,t)(t-t_0)^{-1}$ этого оператора имеет слабую особенность и потому интеграл понимается в обычном смысле. Следующая лемма дает критерий компактности оператора этого вида.

Лемма 3.2. *Пусть функция $k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$, $0 < \mu < \nu < 1$, и выполнено условие $k(t,t) = 0$, $t \in \Gamma$. Тогда оператор K ограничен $C(\Gamma) \to C^\mu(\Gamma)$ и, в частности, компактен в $C^\mu(\Gamma)$.*

Обозначим $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ соответствующее пространство вещественных $l-$ вектор–

функций. Если ограниченный в $C^\mu(\Gamma)$ оператор N обладает свойством

$$\overline{N} = N,$$

то он действует как $\mathbb{R}-$линейный оператор $N_{\mathbb{R}}$ в пространстве $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ вещественных функций. В случае его фредгольмовости индекс этого оператора понимается, конечно, по отношению к размерностям над полем $\mathbb{R}$.

Лемма 3.5. *Операторы N и $N_{\mathbb{R}}$ свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы совпадают.*

Примером оператора, действующего в пространстве $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, служит оператор

$$R\varphi = \mathrm{Re}[G(\varphi + S\varphi)] + N_0\varphi,$$

где $l \times l-$ матрица–функция $G \in C^\nu(\Gamma)$ и оператор N_0 компактен в пространстве $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$. Следующий результат, который дает теорема 3.2 совместно с леммой 3.5 завершает третий параграф.

[33] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1968. — 513 с.

Теорема 3.3. *Пусть контур* $\Gamma \in C^{1,\nu}$*, матрица–функции* $G \in C^{\nu}(\Gamma)$ *и оператор* N_0 *компактен в пространстве* $C^{\mu}(\Gamma)$*. Тогда оператор*

$$R\varphi = \mathrm{Re}[G(\varphi + S\varphi)] + N_0\varphi$$

фредгольмов в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда матрица* G *обратима, и его индекс дается формулой*

$$\mathrm{ind}\, R = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma},$$

где приращение $[\ ]_{\Gamma}$ *вдоль* Γ *берется в направлении, оставляющем область* D *слева.*

В **четвертом параграфе** вводится весовой класс Гельдера $C^{\mu}_{\delta}(E,\infty)$ и рассматривается обобщенный оператор Векуа–Помпейю. По аналогии с (8) введем обобщенный интеграл Векуа–Помпейю по формуле

$$(T_J f)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}}(\zeta - z)^{-1}_J f(\zeta) d_2\zeta, \tag{11}$$

где $d_2\zeta$ означает элемент площади и $l-$вектор–функция f удовлетворяет оценке

$$|f(z)| = O(|z|^{\delta}), \quad \text{при} \quad z \to \infty, \quad \delta < -1. \tag{12}$$

По отношению к дифференциальному оператору

$$L_J = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x} \tag{13}$$

справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть* $l-$*вектор–функция* $f(z)$ *непрерывно дифференцируема как функция двух вещественных переменных* x, y *и удовлетворяет оценке (12) с некоторым* $\delta < -1$*. Тогда* $l-$*вектор–функция* $\phi = T_J f$ *также непрерывно дифференцируема и является решением уравнения* $L_J\phi = f$*.*

Эту лемму распространим на функции, которые принадлежат классу $C^{\mu}(K)$ на любом компакте $K \subseteq \mathbb{C}$ и имеют поведение (12) на бесконечности с фиксированным $\delta \in \mathbb{R}$. С этой целью для неограниченного множества E на плоскости обозначим $C^{\mu}_{\mu}(E,\infty)$ класс функций, удовлетворяющих на этом множестве условию Гельдера с показателем μ, т.е. функций φ с конечной полунормой

$$[\varphi]_{\mu} = \sup_{z_1 \neq z_2}\frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\mu}}.$$

Нетрудно видеть, что эти функции удовлетворяют (12) с $\delta = \mu$. Обозначим через $C^{\mu}_0(E,\infty)$ класс всех ограниченных функций $\varphi(z)$, для которых функция

$\psi(z) = (1+|z|)^\mu \varphi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ, то есть выполнена оценка $|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \le C|z_1 - z_2|^\mu$.

Исходя из произвольного δ, обозначим через $C^\mu_\delta(E, \infty)$ класс функций φ, для которых $\psi(z) = (1+|z|)^{-\delta+\mu}\varphi(z) \in C^\mu_\mu(E, \infty)$. Очевидно, функция ψ имеет поведение (12) на бесконечности и относительно нормы

$$|\psi| = \sup_{z\in E} |(1+|z|)^{-\delta}\varphi(z)| + [\psi]_\mu$$

введенное пространство банахово [34]. Если множество E является замкнутой областью $\overline{D}$, то под $C^{1,\mu}_\delta(\overline{D}, \infty)$ понимается класс непрерывно дифференцируемых в D функций φ, для которых

$$\varphi \in C^\mu_\delta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \in C^\mu_{\delta-1}. \tag{14}$$

Семейство пространств C^μ_δ монотонно убывают по μ и возрастают по δ относительно вложения. Отметим, что по определению (13), (14) дифференциальный оператор L_J ограничен $C^{1,\mu}_\delta(\mathbb{C}, \infty) \to C^\mu_{\delta-1}(\mathbb{C}, \infty)$. Основной результат для операторов (11), (13) формулирует следующая теорема.

Теорема 4.1. *При* $-1 < \delta < 0$ *интегральный оператор* T_J *ограничен* $C^\mu_{\delta-1}(\mathbb{C}, \infty) \to C^{1,\mu}_\delta(\mathbb{C}, \infty)$, *обратим и обратным к нему служит* L_J.

Интегральный оператор (11) можно ввести и для областей D на плоскости, ограниченных гладким контуром Г. Однако вопрос об его ограниченности в пространствах C^μ и C^μ_δ требует определенной гладкости Г. Чтобы обойти этот вопрос, воспользуемся оператором P продолжения функций $\varphi \in C(\overline{D})$ на всю плоскость.

Лемма 4.3. (a) *Пусть замкнутая область* D *конечна и содержится внутри круга* $|z| < R$. *Тогда существует такой ограниченный оператор продолжения* $P : C^\mu(\overline{D}) \to C^\mu(\mathbb{C})$, *что* $(P\varphi)(z) = 0$ *при* $|z| \ge R$.

(b) *Пусть область* D *бесконечна. Тогда для любого* $\delta \in \mathbb{R}$ *существует ограниченный оператор продолжения* $P : C^\mu_\delta(\overline{D}, \infty) \to C^\mu_\delta(\mathbb{C}, \infty)$.

Исходя из оператора продолжения P, определим обобщенный оператор Векуа–Помпейю I^2_J, действующий на функциях $\varphi(z),\ z \in D$, по формуле

$$I^2_J\varphi = (T_J P\varphi)\big|_D.$$

В случае бесконечной области D этот оператор будем рассматривать для функций $\psi(z) \in C^\mu_{\delta-1}(\overline{D}, \infty)$. В соответствии с этим обозначим его $I^2_{J,\delta}$. В завершение параграфа из этого определения совместно с теоремой 4.1 и леммой 4.3 приходим к следующему результату.

[34] Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I / А. П. Солдатов // СМФН. — 2017. — Т. 63, № 1. — С. 1–189.

Теорема 4.2. (a) *Пусть область D конечна, тогда оператор I_J^2 ограничен $C^\mu(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$ и справедлива формула*

$$L_J I_J^2 \psi = \psi.$$

(b) *В случае бесконечной области D, оператор $I_{J,\delta}^2$ ограничен $C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}, \infty) \to C_\delta^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$ и справедлива формула*

$$L_J I_{J,\delta}^2 \psi = \psi.$$

Сведения, изложенные в первой главе, представляют собой аналитический аппарат, позволивший рассматривать теорему фредгольмовости для общего случая.

Вторая глава посвящена краевым задачам для эллиптических систем первого порядка на плоскости.

В **пятом параграфе** рассмотрена задача Римана–Гильберта для общей эллиптической системы (1) и общей вещественной эллиптической системы (4) в конечной области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}, 0 < \nu < 1$, составленным из простых контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, где для определенности Γ_m охватывает остальные контуры.

Пусть дифференциальный оператор L_A определяется матрицей A и имеет смысл (13). Тогда систему (1) можно записать в следующем виде

$$L_A U(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D. \tag{15}$$

Пусть $C-$комплекснозначная $l \times l$ матрица–функция блочной структуры

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где матрицы C_{ij} имеют порядок $l_i \times l_j, i, j = 1, 2$. В предположении что матрица–функция $C(t) \in C^\nu(\Gamma)$ рассмотрим задачу Римана–Гильберта, заданную следующим краевым условием

$$\operatorname{Re} C(t)U(t)^+|_\Gamma = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{16}$$

Если матричные коэффициенты $a(z), b(z) \in C^\mu(\overline{D})$, $\mu < \nu$, а правые части $F \in C^\mu(\overline{D})$, $f \in C^\mu(\Gamma)$, то задачу (15)–(16) естественно рассматривать в классе

$$C_A^\mu(\overline{D}) = \{U \in C^1(D) \cap C^\mu(\overline{D}), L_A U \in C^\mu(\overline{D})\}.$$

В диссертационной работе показано, что пространство $C_A^\mu(\overline{D})$ банахово относительно нормы $|U| = |U|_{C^\mu(\overline{D})} + |L_A U|_{C^\mu(\overline{D})}$. Как обычно, задача (15)–(16) называется фредгольмовой, если фредгольмов ее оператор, действующий $C_A^\mu(\overline{D}) \to C^\mu(\overline{D}) \times C^\mu(\Gamma)$.

Рассмотрим $l \times l-$матрицу–функцию $G(t)$ с блочными элементами вида

$$G_{i1} = C_{i1}B_{11} + C_{i2}B_{21} \quad G_{i2} = \overline{C}_{i1}B_{12} + \overline{C}_{i2}B_{22} \quad i, = 1, 2, \tag{17}$$

где B_{ij}, $i, j = 1, 2$ определяются в (2).

Теорема 5.1. *Пусть область D конечна, ограничена гладким контуром $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m$ класса $C^{1,\nu}$, где для определенности Γ_m охватывает остальные контуры и $C(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$. Пусть $l \times l-$матричные коэффициенты $a(z)$, $b(z) \in C^{\mu}(\overline{D})$, а правые части системы (1) и краевого условия (16) принадлежат соответственно $F(z) \in C^{\mu}(\overline{D})$, $f(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu < 1$. Тогда условие*

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{18}$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (15)–(16) в классе $C^{\mu}_A(\overline{D})$ и ее индекс дается формулой

$$æ = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma_i} + (2-m)l, \tag{19}$$

где приращение $[\ ]_{\Gamma_i}$ вдоль Γ_i берется в направлении, оставляющем область D слева.

Обратимся к вещественной эллиптической системы (4), которую запишем в следующем виде

$$L_A U + aU = F. \tag{20}$$

Здесь аналогом (15) является следующее краевое условие

$$C(t)U(t)^{+}|_{\Gamma} = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{21}$$

с $l \times 2l-$матрицей $C = (C_j) \in C^{\nu}(\Gamma)$, составленной из $l \times l$ матриц C_j, $j = 1, 2$.

Теорема 5.2. *Пусть область D конечна, контур Γ состоит из объединения простых контуров Γ_i, $1 \leq i \leq m$ и принадлежит классу $C^{1,\nu}$. Предполагая, что $a, \in C^{\mu}(\overline{D}), \in C^{\mu}(\Gamma)$, условие обратимости $l \times l-$матрицы–функции*

$$G(t) = C_1(t)B_1 + C_2(t)B_2$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (20)–(21) в классе $C^{\mu}_A(\overline{D})$ и ее индекс дается формулой (19).

В **шестом параграфе** полученные выше результаты распространяются на случай, когда область D бесконечна. Все рассмотрения проводились в весовом пространстве Гельдера $C^{\mu}_{\delta}(\overline{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$. Предполагая, что

$$\begin{gathered} a, b \in C^{\mu}_{\delta_0}(\overline{D}, \infty),\ \delta_0 < -1, \\ f \in C^{\mu}(\Gamma),\ F \in C^{\mu}_{\delta-1}(\overline{D}, \infty),\ -1 < \delta < 0, \end{gathered} \tag{22}$$

задачу (15)–(16) будем рассматривать в классе

$$C^{\mu}_{A,\delta}(\overline{D},\infty)=\{U\in C^1(D)\cap C^{\mu}_{\delta}(\overline{D},\infty), L_AU\in C^{\mu}_{\delta-1}(\overline{D},\infty)\},$$

который зависит от δ. В параграфе установлено, что это пространство банахово относительно нормы $|U|=|U|_{C^{\mu}_{\delta}(\overline{D},\infty)}+|L_AU|_{C^{\mu}_{\delta-1}(\overline{D},\infty)}$. Аналогично случаю конечной области задачу (15)–(16) будем называть фредгольмовой, если фредгольмов ее оператор $C^{\mu}_{A,\delta}(\overline{D},\infty)\to C^{\mu}_{\delta-1}(\overline{D},\infty)\times C^{\mu}(\Gamma)$. Отметим, что $l\times l-$матрица-функция $G(t)\in C^{\nu}(\Gamma)$ и ее блочные элементы имеют вид (17).

Основным результатом этого параграфа является доказательство теорем о фредгольмовой разрешимости задачи Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка в бесконечной области.

Теорема 6.1. *Пусть область D бесконечна и ограничена гладким контуром $\Gamma\in C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$, который состоит из простых равноправных контуров Γ_i, $i=1,\dots,m$. Тогда в предположении (22) условие (18) обратимости матрицы–функции $G(t)$ необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (15)–(16) в классе $C^{\mu}_{A,\delta}(\overline{D},\infty)$ и ее индекс дается формулой*

$$æ=-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma_i}-ml. \qquad (23)$$

где приращение $[\;]_{\Gamma_i}$ вдоль Γ_i берется в направлении, оставляющем область D слева.

Теорема 6.2. *Пусть D бесконечна, контур Γ класса $C^{1,\nu}$ состоит из объединения простых контуров Γ_i, $1\le i\le m$. Тогда условие обратимости $l\times l-$матрицы–функции $G(t)=C(t)B$, где $l\times 2l-$матрица–функция $C(t)\in C^{\nu}(\Gamma)$, а комплекснозначная матрица $B\in\mathbb{C}^{2l\times l}$ имеет вид (6) необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (20)–(21) в классе $C^{\mu}_{A,\delta}(\overline{D},\infty)$ и ее индекс дается формулой (23).*

В заключительном **седьмом параграфе** для эллиптической системы первого порядка (1) рассматривается общая задача линейного сопряжения, которая задана краевым условием

$$C_{11}U^+(t)-C_{12}U^-(t)+\overline{C_{21}U^+(t)}-\overline{C_{22}U^-(t)}=f(t),\quad t\in\Gamma, \qquad (24)$$

где коэффициенты $C_{ij}\in C^{\nu}(\Gamma)$ и черта означает комплексное сопряжение. Пусть $\Gamma\in C^{1,\nu}$ простой гладкий ориентируемый контур и открытое множество $D=\mathbb{C}\setminus\Gamma$ есть объединение двух областей – конечной D_1 и бесконечной D_2. Вводится класс $C^{\mu}_{\delta}(\widehat{D},\infty)$, $-1<\delta<0$, заданных в D функций, который определяется условием принадлежности их пространству $C^{\mu}(\overline{D}_1)$ и весовому пространству Гельдера $C^{\mu}_{\delta}(\overline{D}_2,\infty)$, $-1<\delta<0$. Предполагая, что выполнены следующие условия

$$
\begin{aligned}
&a,\, b \in C^{\mu}_{\delta_0}(\widehat{D}, \infty),\ \delta_0 < -1,\\
&f(t) \in C^{\mu}(\Gamma), \quad F \in C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty), \quad -1 < \delta < 0,
\end{aligned} \tag{25}
$$

решения $U = (U_1, \ldots, U_l)$ задачи (15)–(24) ищутся в классе $C^{\mu}_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$, который явно определяется условиями

$$
U \in C^{\mu}_{\delta}(\widehat{D}, \infty), \quad L_A U \in C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty). \tag{26}
$$

Как и выше, фредгольмовость задачи (15)–(24) понимается в смысле фредгольмовости оператора задачи, который действует $C^{\mu}_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ в прямое произведение $C^{\mu}_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty) \times C^{\mu}(\Gamma)$.

Рассмотрим блочную $2l \times 2l$ матрицу

$$
G = \begin{pmatrix} G_{11} & \overline{G}_{22} \\ G_{21} & \overline{G}_{12} \end{pmatrix},
$$

где $l \times l-$матрицы–функции $G_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, в обозначениях (2) имеют явный вид

$$
G_{11} = (C_{11}B_1, \overline{C}_{21}B_2), \quad G_{12} = (C_{12}B_1, \overline{C}_{22}B_2),
$$

$$
G_{21} = (C_{21}B_1, \overline{C}_{11}B_2), \quad G_{22} = (C_{22}B_1, \overline{C}_{12}B_2).
$$

Теорема 7.1. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, открытое множество D есть объединение конечной области D_1 и бесконечной области D_2 , $l \times l-$матрицы–функции $C_{ij}(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$, $i, j = 1, 2$ и для матричных коэффициентов $a(z), b(z)$ и правых частей $f(t)$, $F(z)$ выполнено (25). Тогда условие*

$$
\det\, G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma,
$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (15)–(24) в классе (26) и ее индекс дается формулой

$$
æ = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma},
$$

где приращение $[\ ]_{\Gamma}$ вдоль Γ берется в направлении, оставляющем область D_1 слева.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Ващенко О. В. (**Чернова О. В.**), Солдатов А. П. Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами / О. В. Ващенко, А. П. Солдатов // Научные ведомости БелГУ. Серия «Информатика и прикладная математика». – 2006. – вып. 2, № 1(21). — С. 3–6.

[2] Ващенко О. В. (**Чернова О. В.**), Солдатов А. П. Пространство Харди решений обобщенной системы Бельтрами / О. В. Ващенко, А. П. Солдатов // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 4. — С. 488–491.

[3] Солдатов А. П., **Чернова О. В.** Задача Римана–Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера / А. П. Солдатов, О. В. Чернова // Научные ведомости БелГУ. — 2009. — Т. 13(68), вып. 17/2. — С. 115–120.

[4] **Чернова О. В.** Обобщенный оператор Векуа–Помпейю / О. В. Чернова // Научные ведомости БелГУ. — 2018. — Т 50, № 1. — С. 40–46.

[5] Солдатов А. П., **Чернова О. В.** Задача Римана-Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами / А. П. Солдатов, О. В. Чернова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. — 2018. — Т. 149. – С. 95–102.

[6] **Чернова О. В.** Фредгольмова разрешимость задачи линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами / О. В. Чернова // Динамические системы. — 2018. — Т. 8(36), № 4. — С. 357–371.

[7] Ващенко О. В. **Чернова О. В.**, Солдатов А. П. Об одном интегральном представлении // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (ВГУ, 26-30 января) — г. Воронеж, 2005. — С. 52–53.

[8] Ващенко О.В. (**Чернова О. В.**) Интегральное представление решений эллиптических систем первого порядка в классах Гельдера // Материалы III Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Эльбрус, 10–15 мая) — Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, 2005. — С. 11–14.

[9] Ващенко О.В. (**Чернова О. В.**) Обобщенное пространство Харди // Материалы Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамГУ, 27 июня–2 июля) — г. Самара, 2005. — С. 24.

[10] **Чернова О. В.** Задача Римана–Гильберта для эллиптической системы первого порядка // Материалы V Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Эльбрусский учебно-научный комплекс КБГУ, 26–30 сентября) — Кабардино-Балкар-

ская Республика, г. Нальчик, 2007. — С. 143–146.

[11] **Чернова О. В.** Гладкость решения задачи Римана–Гильберта для неоднородной системы Дуглиса // Материалы Международного Российско–Азербайджанского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Эльбрус, 12–17 мая) — Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, 2008. — С. 243–244.

[12] Солдатов А. П., **Чернова О. В.** К теории эллиптических систем первого порядка / А. П. Солдатов, О. В. Чернова // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2009. — Т.11, № 1. — С. 79–83.

[13] **Чернова О. В.** Задача Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка в многосвязной области. // Материалы Международного Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» VII Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Эльбрус, 17–22 мая) — Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, 2009. — С. 320–321.

[14] Солдатов А. П., **Чернова О. В.** Эллиптическая система первого порядка в бесконечной области // Всероссийская конференция молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». (Приэльбрусье, п. Терскол, 6–9 декабря) — Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, 2010. — С. 145–147.

[15] Абаполова Е. А, **Чернова О. В.** О гладкости решений сингулярных интегральных уравнений. // Материалы международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Приэльбрусье, 26-30 июня) — Кабардино-Балкарская Республика, г. Хабез, 2010. — С. 11.

[16] Солдатов А. П., **Чернова О. В.** Интегралы типа потенциалов в весовых пространствах на плоскости / А. П. Солдатов, О. В. Чернова // Известия Юго–Западного государственного университета. Серия Техника и Технологии. — 2016. — №1(18). — С. 100–103.

[17] **Чернова О. В.** Эллиптические системы первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // Материалы III Международной научно–практической конференции «Современные проблемы физико–математических наук» (ОГУ, 23-26 ноября) — г. Орел, 2017. — С. 109–112.

[18] **Чернова О. В.** О задаче Римана-Гильберта для эллиптических систем // Материалы международной конференции «ВЗМШ С. Г. Крейна–2018» (ВГУ, 26-31 января) — г. Воронеж, 2018. — С. 360–361.

[19] **Чернова О. В.** Об одной краевой задаче для эллиптической системы.// Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики» (Приэльбрусье, п. Терскол, 22 мая – 26

мая) — Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, 2018. — С. 271.

[20] **Чернова О. В.** Краевая задача для вещественной эллиптической системы // Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (ОГУ, 22–25 ноября) — г. Орел, 2018. — С. 86–89.

[21] **Чернова О. В.** Задача линейного сопряжения для эллиптической системы первого порядка на плоскости // Материалы XVII-ой всероссийской молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения-2018» (КФУ, 23–28 ноября) — г. Казань, 2018. — С. 311–315.

[22] **Чернова О. В.** Задача линейного сопряжения для эллиптической системы // Материалы V-ой международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Институт прикладной математики и автоматизации, 4–7 декабря). — Кабардино–Балкарская Республика, г. Нальчик, 2018. — С. 209.

[23] **Чернова О. В.** О фредгольмовости одной краевой задачи для эллиптической системы // Материалы Международной молодежной научно-практической конференции «Школа молодых ученых: достижения в области науки и техники» (ВГЛУ, 10–12 декабря) — г. Воронеж, 2018. — С. 86–90.