На правах рукописи

Подойницын Михаил Александрович

Спиновые проекционные операторы в квантовой теории поля и представления алгебры Брауэра

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Дубна — 2022

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф.
Исаев Алексей Петрович

С электронной версией диссертации можно ознакомится на официальном сайте Объединенного института ядерных исследований в информационно-телекомуникационной сети "Интернет" по адресу: https://dissertations.jinr.ru. С печатной версией диссертации можно ознакомится в Научно-технической библиотеке ОИЯИ (г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-Кюри, д. 6).

Ученый секретарь диссертационного совета (технический секретарь)
канд. физико-математических наук — Ю.М. Быстрицкий

Общая характеристика работы

Актуальность темы. На сегодняшний день только три из четырех фундаментальных взаимодействий (электромагнитное, слабое и сильное) объединены в единую квантовую теорию, которая называется Стандартной Моделью. В связи с этим одной из важных нерешенных задач теоретической физики является задача построения квантовой теории гравитации и объединения ее со Стандартной Моделью.

В частности теорией, претендующей на роль теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия, считается теория полей высших спинов (теория высших спинов), которая является следующим логичным этапом развития калибровочных теории поля. Предполагается, что из-за наличия большой группы симметрии теория высших спинов будет иметь более мягкое ультрафиолетовое поведение после квантования.

Базовая идея теории высших спинов - это введение дополнительных полей, на пространстве которых действуют произвольные унитарные неприводимые представления группы симметрий пространства-времени. Следовательно, первым важным этапом построения теории высших спинов в конкретном пространстве-времени является анализ свойств соответствующей группы симметрии и в частности, классификация ее унитарных неприводимых представлений.

Целью данной диссертационной работы является разработка методов построения спиновых проекционных операторов в любой размерности D пространства-времени и построение двухспинорного описания четырехмерных массивных частиц.

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

1. Построение спин-тензорных полей, описывающих свободные четырехмерные релятивистские массивные частицы с произвольным спином и вывод уравнений, которым эти поля удовлетворяют. Построение и анализ свойств всех операторов Казимира алгебры Пуанкаре в D-мерном пространстве-времени.
2. Разложение построенных спин-тензорных полей по спин-тензорам поляризаций и предъявление явных выражений для спин-тензоров поляризаций в терминах двух вейлевских спиноров.
3. Обобщение полностью симметричного спинового проекционного оператора Берендса-Фронсдала для произвольного полуцелого спина на случай любой размерности D пространства-времени.
4. Разработка методов вычисления D-мерных спиновых проекционных операторов с произвольным типом симметрии тензорных индексов.

Научная новизна:

1. Впервые были найдены явные формулы (в терминах двух вейлевских спиноров), описывающие спин-тензора поляризаций четырехмерных свободных массивных частиц с произвольным спином.
2. Найдено новое представление для оператора Казимира (шестого порядка) алгебры Ли шестимерной группы Пуанкаре в координатах светового конуса. Данное представление оказалось полезным при анализе неприводимых безмассовых представлений шестимерной группы Пуанкаре, включая случай представлений с непрерывным (бесконечным) спином.
3. Впервые было найдено выражение D-мерного оператора Берендса-Фронсдала для всех полуцелых спинов.
4. Разработан новый метод построения D-мерных спиновых проекционных операторов на основе использования новых тензорных представлений алгебры Брауэра.
5. С помощью этого метода были построены D-мерные спиновые проекционные операторы для полей симметриями, соответствующими диаграммам Юнга типа $[1^j]$ и [2,1].

Практическая значимость. Полученные результаты могут быть использованы в теоретической физике - для вычислений амплитуд рассеяния полей с высшими спинами, а так же для конструировании D-мерных теорий высших спинов.

Методология и методы исследования. Все основные результаты настоящей диссертации получены методами теории представлений алгебры Брауэра, а также методами теории унитарных представлений некомпактных групп.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Было показано, что все спин-тензора поляризаций четырехмерных свободных массивных частиц с произвольными спинами могут быть явно описаны в терминах двух вейлевских спиноров, таким образом был построен спирально-спинорный формализм для четырехмерных массивных частиц произвольного спина.
2. Проведен анализ операторов Казимира в базисе светового конуса для алгебры Ли шестимерной группы Пуанкаре в случае безмассовых представлений.
3. Построен D-мерный симметричный спиновый проекционный оператор (обобщение оператора Берендса-Фронсдала) для всех полей произвольного полуцелого спина.
4. Найден новый класс тензорных представлений алгебры Брауэра, что позволило применить технику примитивных ортогональных идемпотентов алгебры Брауэра, к построению D-мерных спиновых проекционных операторов с произвольным типом симметрии тензорных индексов.

5. Найдены некоторые новые явные формулы D-мерных спиновых проекционных операторов с типами симметрии тензорных индексов, соответствующими диаграммам Юнга $[1^j]$ и [2,1]. Найдены новые нетривиальные рекуррентные тождества для D-мерных полностью симметричных спиновых проекционных операторов в случае целых спинов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается тем, что при некоторых ограничениях, например по спину или по размерности, результаты диссертации совпадают результатами известными в литературе, таким образом результаты диссертации находятся в согласии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинарах отдела Современной Математической Физики (ЛТФ, ОИЯИ) и на трех международных конференциях:

1. Supersymmetry in Integrable Systems - SIS'18 International Workshop, 13 - 16 August, 2018 Dubna, Russia.
2. RDP Online Workshop on Mathematical Physics, Uni. Bonn-TSU-YerPhI, Bonn-Tbilisi-Yerevan, Germany-Georgia-Armenia, 5-6 December 2020.
3. Workshop on Geometry, Integrability and Supersymmetry, 22-27 August 2021, Yerevan, Armenia.

Личный вклад. Автор принимал непосредственное участие в решении задач, поставленных в настоящей диссертации, разработке методов, подготовке и написании статей.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах в рецензируемых журналах, включённых в список ВАК и/или международных баз данных Web of Science и/или Scopus [1—7] и в 2 трудах конференций [8; 9].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 2-х глав, заключения и 3-х Приложений (**A,B,C**). Полный объём диссертации составляет 111 страниц, включая 2 рисунка. Список литературы содержит 118 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава диссертации основана на работах [1—3; 6—9] и посвящена двух-спинорному описанию спин-тензоров поляризаций спин-тензорных полей четырехмерных свободных массивных частиц с произвольным спином и построению D-мерных полностью симметричных спиновых проекционных операторов. Кроме того в этой главе проведен анализ операторов Казимира для шестимерной группы Пуанкаре в случае безмассовых представлений в базисе светового конуса (в частности проанализирован спектр этих операторов).

Согласно Вигнеру четырехмерная свободная массивная частица с произвольным спином j, в импульсном представлении описывается полностью симметричной $SU(2)$-тензорной волновой функцией ϕ с компонентами $\phi_{\alpha_1,\dots,\alpha_{2j}}(k)$, здесь k - четырехмерный импульс. Функции ϕ называются вигнеровскими волновыми функциями. Унитарное неприводимое представление Вигнера U универсальной накрывающей $ISL(2,\mathbb{C})$ группы Пуанкаре, которое индексируется спином j, строится как индуцированное представление с неприводимого конечномерного представления $T^{(j)}$ малой группы $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$. Представление Вигнера U со спином j определяется формулой для действия элемента $(A,a) \in ISL(2,\mathbb{C})$ на вигнеровские волновые функции $\phi_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{2j})}(k)$:

$$[U(A,a)\cdot\phi]_\mu(k) \equiv \phi'_\mu(k) = e^{ia^m k_m}\, T^{(j)}_{\mu\mu'}(h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k})\, \phi_{\mu'}(\Lambda^{-1}\cdot k)\,, \qquad (1)$$

где использованы краткие обозначения

$$\phi_\mu(k) \equiv \phi_{(\alpha_1\dots\alpha_{2j})}(k)\,, \qquad (2)$$

здесь индексы μ и μ' необходимо воспринимать как мультииндексы $(\alpha_1\dots\alpha_{2j})$ и $(\alpha'_1\dots\alpha'_{2j})$, матрица $\Lambda \in SO^\uparrow(1,3)$ связана с $A \in SL(2,\mathbb{C})$ стандартным соотношением: $\Lambda_{nm} = \frac{1}{2}Tr(\tilde{\sigma}_m A \sigma_n A^\dagger)$, где $||\sigma_n|| = (I_2,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, I_2 - единичная матрица размера 2×2, $\sigma_i (i=1,2,3)$ - матрицы Паули и $||\tilde{\sigma}_m|| = (I_2,-\sigma_1,-\sigma_2,-\sigma_3)$. Элемент $h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k}$ принадлежит малой группе $SU(2)$ и равен

$$h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k} = A^{-1}_{(k)}\cdot A\cdot A_{(\Lambda^{-1}\cdot k)} \;\; \in \;\; SU(2)\,. \qquad (3)$$

Матрица $A_{(k)} \in SL(2,\mathbb{C})$, входящая в выражение (3), называется оператором Вигнера и определяется как решение следующего соотношения

$$(k\sigma) = A_{(k)}\,(q\sigma)\,A^\dagger_{(k)}\,, \qquad (4)$$

здесь $(q\sigma) = q^n\sigma_n$ - эрмитова матрица, соответствующая массивному тестовому импульсу q. От вигнеровской волновой функции ϕ спина j можно перейти к набору из $2j+1$ спин-тензорных полей $\psi^{(r)}$ $(r=0,1,\dots,2j)$ с помощью следующих формул

$$\psi^{(r)(\dot\beta_1\dots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\dots\alpha_p)}(k) = \frac{1}{\mathsf{m}^r}(A_{(k)})_{\alpha_1\dots\alpha_p}^{\;\;\delta_1\dots\delta_p}\cdot\left(A^{-1\dagger}_{(k)}\cdot(q\tilde{\sigma})\right)^{\dot\beta_{p+1}\dots\dot\beta_{p+r};\delta_{p+1}\dots\delta_{p+r}}\cdot$$
$$\cdot\phi_{(\delta_1\dots\delta_p\delta_{p+1}\dots\delta_{p+r})}(k)\,. \qquad (5)$$

Спин-тензорные поля ψ, определенные в (5), представляются более удобными, по сравнению с вигнеровскими волновыми функциями ϕ, потому что в координатном представлении эти спин-тензорные поля имеют локальный закон преобразования относительно группы $ISL(2,\mathbb{C})$. Координатные же вигнеровские волновые функции, полученные с помощью преобразования Фурье, изменяются при действии группы $ISL(2,\mathbb{C})$ нелокально.

Для спин-тензорных полей $\psi(k)$ доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть тестовый импульс равен* $q = (\mathsf{m},0,0,0)$. *Тогда волновые функции* $\psi^{(r)\,(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)}(k)$, *заданные в* (5), *удовлетворяют уравнениям Дирака-Паули-Фирца:*

$$\begin{aligned}
&k^m(\tilde\sigma_m)^{\dot\gamma_1\alpha_1}\psi^{(r)\,(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)}(k) = \mathsf{m}\,\psi^{(r+1)\,(\dot\gamma_1\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_2\ldots\alpha_p)}(k)\ , \quad (r=0,\ldots,2j-1)\ ,\\
&k^m(\sigma_m)_{\gamma_1\dot\beta_1}\psi^{(r)\,(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)}(k) = \mathsf{m}\,\psi^{(r-1)\,(\dot\beta_2\ldots\dot\beta_r)}_{(\gamma_1\alpha_1\ldots\alpha_p)}(k)\ , \quad (r=1,\ldots,2j)\ ,
\end{aligned} \tag{6}$$

которые описывают динамику массивной частицы со спином $j = (p+r)/2$. *Условиями совместности этих уравнений являются соотношения* $(k^n k_n - m^2)\,\psi^{(r)}(k) = 0$.

Вернемся теперь к обсуждению матриц $A_{(k)} \in SL(2,\mathbb{C})$, которые переводят тестовый импульс q в произвольный импульс k. Из формулы (4) следует, что элементы $A_{(k)}$ нумеруют точки пространства $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$. Действительно при выборе $q = (\mathsf{m},0,0,0)$, из (4) видно, что оператор $A_{(k)}$ определен с точностью до умножения справа на произвольную матрицу $U \in SU(2)$; т.е. элементу $A_{(k)}$ соответствует весь класс сопряженности $A_{(k)}U$.

Левое действие группы $SL(2,\mathbb{C})$ на однородное пространство $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ определяется следующим образом

$$A\cdot A_{(k)} = A_{(\Lambda\cdot k)}\cdot U_{A,k}\ , \tag{7}$$

где матрицы $A \in SL(2,\mathbb{C})$ и $\Lambda \in SO^{\uparrow}(1,3)$ связаны стандартными соотношениями и элемент $U_{A,k} \in SU(2)$ зависит от матрицы A и импульса k. При таком действии точка $A_{(k)} \in SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ переходит в точку $A_{(\Lambda\cdot k)} \in SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$. Формула (7) есть не что иное как перезапись формулы (3) для элемента малой группы в определении представления Вигнера.

Заметим теперь, что при левом действии (7) группы $SL(2,\mathbb{C})$ на матрицу $A_{(k)}$ столбцы матрицы $A_{(k)}$ преобразуются как двумерные спиноры. Поэтому удобно представить матрицу $A_{(k)}$ поэлементно с помощью двух вейлевских спиноров μ, λ, (соответственно, матрица $A^{\dagger}_{(k)}$ будет выражаться в терминах сопряженных спиноров $\overline{\mu}$ и $\overline{\lambda}$) следующим образом:

$$(A_{(k)})_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{z}\begin{pmatrix}\mu_1 & \lambda_1\\ \mu_2 & \lambda_2\end{pmatrix}\ ,\ (A^{\dagger-1}_{(k)})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{z^*}\begin{pmatrix}\overline{\lambda}_{\dot{2}} & -\overline{\mu}_{\dot{2}}\\ -\overline{\lambda}_{\dot{1}} & \overline{\mu}_{\dot{1}}\end{pmatrix},\quad z^2 = \mu^{\rho}\,\lambda_{\rho}\,, \tag{8}$$

$$\mu = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}\ ,\ \lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\ ,\ \overline{\mu} = \begin{pmatrix}\overline{\mu}_{\dot{1}}\\ \overline{\mu}_{\dot{2}}\end{pmatrix}\ ,\ \overline{\lambda} = \begin{pmatrix}\overline{\lambda}_{\dot{1}}\\ \overline{\lambda}_{\dot{2}}\end{pmatrix}\,, \tag{9}$$

$$\mu^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\mu_{\beta}\ ,\ \mu_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\mu^{\beta}\ ,\ \overline{\mu}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\mu}_{\dot{\beta}}\ ,\ \overline{\mu}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\mu}^{\dot{\beta}}\ , \tag{10}$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}(\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}})$ - антисимметричные $SL(2,\mathbb{C})\big(SL^*(2,\mathbb{C})\big)$-тензоры второго ранга, $\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} = (\lambda_{\alpha})^*$ и $\overline{\mu}_{\dot{\alpha}} = (\mu_{\alpha})^*$ и нормировка z, z^* матриц $A_{(k)}, A^{\dagger-1}_{(k)} \in SL(2,\mathbb{C})$ в (8) выбрана так, чтобы $\det(A_{(k)}) = 1 = \det(A^{\dagger-1}_{(k)})$. Зафиксируем тестовый импульс q, как в Утверждении 1, тогда из формулы (4) следует, что импульс k выражается через спиноры $\mu_{\alpha}, \lambda_{\beta}, \overline{\mu}_{\dot{\beta}}, \overline{\mu}^{\dot{\beta}}$ следующим образом

$$\frac{\mathsf{m}}{|\mu^{\rho}\lambda_{\rho}|}(\mu_{\alpha}\overline{\mu}_{\dot{\beta}} + \lambda_{\alpha}\overline{\lambda}_{\dot{\beta}}) = (k^n\sigma_n)_{\alpha\dot{\beta}}\ , \tag{11}$$

где $|\mu^{\rho}\lambda_{\rho}| = z\,z^*$. Таким образом, волновые функции массивных частиц, зависящие от импульса k, можно представить в виде функций, зависящих не от k, а от двух спиноров λ и μ. Двух-спинорное представление (11) времениподобного 4-вектора k с компонентами k_n, $k^2 = \mathsf{m}^2 > 0$ и $k_0 > 0$, является обобщением на массивный случай известного твисторного представления $k^n\sigma_n = \lambda_{\alpha}\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ для изотропного 4-импульса k_n, $k^2 = 0$.

В диссертации приведено доказательство того, что неприводимые безмассовые представления шестимерной группы Пуанкаре можно получить как индуцированные представления с представлений подгруппы стабильности безмассового тестового импульса. А именно, было показано, что операторы Казимира, ограниченные на пространство состояний с некоторым стандартным шестимерным безмассовым тестовым импульсом, записываются исключительно в терминах генераторов алгебры Ли группы $ISO(4)$, которая является подгруппой стабильности безмассового тестового импульса в шестимерном пространстве-времени $\mathbb{R}^{1,5}$.

Алгебра Ли $iso(1,5)$ шестимерной группы Пуанкаре имеет три оператора Казимира C_2, C_4, C_6, которые могут быть выражены в следующем виде

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \mathcal{P}^m \mathcal{P}_m \,, & (12)\\
C_4 &= \Pi^m \Pi_m \;-\; \frac{1}{2}\,\mathcal{M}^{mn}\mathcal{M}_{mn}\,C_2\,, & (13)\\
C_6 &= -\,\Pi^k \mathcal{M}_{km}\,\Pi_l \mathcal{M}^{lm} \;+\; \frac{1}{2}\Big(\mathcal{M}^{mn}\mathcal{M}_{mn}-8\Big)\,C_4 + & (14)\\
&\quad + \frac{1}{8}\Big[\mathcal{M}^{kl}\mathcal{M}_{kl}\Big(\mathcal{M}^{mn}\mathcal{M}_{mn}-8\Big)+2\mathcal{M}^{mn}\mathcal{M}_{nk}\mathcal{M}^{kl}\mathcal{M}_{lm}\Big]\,C_2\,,
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{M}_{mn} = -\mathcal{M}_{nm}$ являются генераторами алгебры $iso(1{,}5)$ $(m,n = 0,1,\ldots,5)$ и мы использовали обозначение

$$
\Pi_m := \mathcal{P}^k\,\mathcal{M}_{km} = \mathcal{M}_{km}\,\mathcal{P}^k - 5i\,\mathcal{P}_m\;. \tag{15}
$$

Отметим, что формула (14) была получена в работе [6]. Ограничив операторы Казимира C_2, C_4, C_6 на подпространство состояний $|\psi\rangle$ со стандартным шестимерным безмассовым импульсом $\mathcal{P}^m|\psi\rangle = k^m|\psi\rangle$, где $||k^m|| = (E{,}0{,}0{,}0{,}0{,}E)$, мы получаем выражения

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_2 &= 0\,, & (16)\\
\hat{C}_4 &= -\hat{\Pi}_a\hat{\Pi}_a\,, & (17)\\
\hat{C}_6 &= \hat{\Pi}_b\mathcal{M}_{ba}\,\hat{\Pi}_c\mathcal{M}_{ca} \;-\; \frac{1}{2}\,\mathcal{M}_{bc}\mathcal{M}_{bc}\,\hat{\Pi}_a\hat{\Pi}_a\,, & (18)
\end{aligned}
$$

где $a,b,c = 1\,,2\,,3\,,4$, а оператор $\hat{\Pi}_a$ выражается через компоненты генераторов $\mathcal{M}_{nm}$.

Из коммутационных соотношений для алгебры $iso(1{,}5)$ следует, что операторы $\hat{\Pi}_a$ и $\mathcal{M}_{ab}$, присутствующие в выражениях (17) и (18), образуют алгебру Ли группы $ISO(4)$ и операторы Казимира $\hat{C}_4$, $\hat{C}_6$ являются стандартными операторами Казимира алгебры $\mathfrak{iso}(4)$. Поэтому можно сделать вывод о том, что унитарные неприводимые безмассовые представления шестимерной группы Пуанкаре индексируются собственными значениями операторов Казимира (17) и (18) алгебры $\mathfrak{iso}(4)$, то есть алгебры Ли некомпактной подгруппы стабильности безмассового шестимерного тестового импульса. Для этой некомпактной группы существует два различных типа унитарных неприводимых представлений, определяемых оператором Казимира (17):

- Представления конечного спина (спиральные представления) соответствуют условию нулевой нормы для $SO(4)$ вектора $\hat{\Pi}_a$:

$$
\hat{\Pi}_a\hat{\Pi}_a = 0\,. \tag{19}
$$

- Представления бесконечного (непрерывного) спина соответствуют условию ненулевой нормы для $SO(4)$ вектора $\hat{\Pi}_a$:

$$\hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_a = \zeta^2 \neq 0\,. \tag{20}$$

Вернемся к обсуждению двух-спинорного описания спин-тензоров поляризаций спин-тензорных полей, определенных в (5). Фиксируя тестовый импульс как в Утверждении 1 и раскладывая вигнеровскую волновую функцию $\phi(k)$ по естественному базису, можно получить следующее представление для спин-тензорных полей $\psi^{(r)}(k)$

$$\psi^{(r)(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)}(k) = \frac{1}{\sqrt{(2j)!}} \sum_{m=-j}^{j} \phi_m(k) \overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)}(k)\,, \tag{21}$$

где введены обозначения

$$\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)}(k) = \frac{1}{\sqrt{(2j)!}} \prod_{i=1}^{p} (A_{(k)})_{\alpha_i}{}^{\rho_i} \prod_{\ell=1}^{r} \left(A^{-1\dagger}_{(k)}\,\tilde\sigma_0\right)^{\dot\beta_\ell \rho_{p+\ell}} \epsilon^{(m)}_{\rho_1\cdots\rho_{2j}}\,, \tag{22}$$

$$\epsilon^{(m)}_{\rho_1\cdots\rho_{2j}} = \partial^{(v)}_{\rho_1}\cdots\partial^{(v)}_{\rho_{2j}} \frac{(v^1)^{j+m}(v^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}},\quad m=-j,\cdots,j\,, \tag{23}$$

здесь $||v^\rho|| = (v^1, v^2)$ компоненты вспомогательного $SU(2)$-спинора v, а $\partial^{(v)}_\rho = \frac{\partial}{\partial v^\rho}$.

Элементы $\overset{(m)}{e}(k)$, определенные в (22) называются спин-тензорами поляризаций. В диссертации доказано утверждение, которое может быть использовано для рекуррентного построения спин-тензоров поляризаций $\overset{(m)}{e}(k)$, выраженных через спиноры Вейля.

Утверждение 2. *Спин-тензоры* $\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)}$, *определенные в (22), удовлетворяют соотношениям:*

$$\Big(\mu_\gamma \frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma} - \overline{\lambda}^{\dot\gamma}\frac{\partial}{\partial\overline{\mu}^{\dot\gamma}}\Big)\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)} = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\cdot \overset{(m+1)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)} \tag{24}$$

$$\Big(\lambda_\gamma \frac{\partial}{\partial\mu_\gamma} - \overline{\mu}^{\dot\gamma}\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}^{\dot\gamma}}\Big)\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)} = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\cdot \overset{(m-1)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)} \tag{25}$$

$$\frac{1}{2}\Big(\mu_\gamma \frac{\partial}{\partial\mu_\gamma} - \lambda_\gamma\frac{\partial}{\partial\lambda_\gamma} + \overline{\lambda}^{\dot\gamma}\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}^{\dot\gamma}} - \overline{\mu}^{\dot\gamma}\frac{\partial}{\partial\overline{\mu}^{\dot\gamma}}\Big)\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)} = m\cdot \overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_p)} \tag{26}$$

где μ_γ, λ_γ, $\overline{\mu}^{\dot\gamma}$, $\overline{\lambda}^{\dot\gamma}$ *- спиноры Вейля, определенные в (9) и (10).*

Рассмотрим теперь более подробно некоторый объект, построенный из спин-тензоров поляризаций для целого спина j. Зафиксируем целый спин j и перейдем от спин-тензоров поляризаций типа $\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_j)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_j)}$ к вектор-тензорам $\mathsf{e}^{(m)}_{n_1\cdots n_j}$ по следующей стандартной формуле

$$\mathsf{e}^{(m)}_{n_1\cdots n_j}(k) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}(\sigma_{n_1})_{\alpha_1\dot\beta_1}\cdots(\sigma_{n_j})_{\alpha_j\dot\beta_j}\,\varepsilon^{\alpha_1\gamma_1}\ldots\varepsilon^{\alpha_j\gamma_j}\,\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_j)}_{(\gamma_1\ldots\gamma_j)}(k)\,,$$
$$m=-j,-j+1,\ldots,j-1,j\,. \tag{27}$$

Из набора $(2j+1)$ вектор-тензоров поляризаций, определенных в (27), можно построить оператор $\Theta^{(j)}(k)$ в виде суммы произведений векторов $\mathsf{e}^{(m)}(k)$ и $\bar{\mathsf{e}}^{(m)}(k)$ по поляризациям m :

$$(\Theta^{(j)})^{n_1\cdots n_j}_{r_1\cdots r_j}(k) := (-1)^j\sum_{m=-j}^{j}\mathsf{e}^{(m)}_{r_1\cdots r_j}(k)\bar{\mathsf{e}}^{(m)\,n_1\cdots n_j}(k)\,, \tag{28}$$

здесь $\bar e = e^*$. Оператор $\Theta^{(j)}$ называется спиновым проекционным оператором или оператором Берендса-Фронсдала. Известно, что в квантовой теории поля операторы (28) определяют тензорную структуру двухточечной функции Грина. Для малых спинов операторы $\Theta^{(j)}(k)$ могут быть вычислены напрямую, если имеются явные выражения для поляризаций. В случае произвольного спина прямое вычисление $\Theta^{(j)}(k)$ представляется затруднительным. Оказывается, что оператор $\Theta^{(j)}(k)$ удобнее определить, как оператор, удовлетворяющий некоторым свойствам. Перечислим их в следующем известном утверждении.

Утверждение 3. *Оператор $\Theta^{(j)}(k)$, заданный в (28), удовлетворяет следующим свойствам:*

1) $(\Theta^{(j)})^2 = \Theta^{(j)}$, $(\Theta^{(j)})^\dagger = (\Theta^{(j)})$ *(проекторное свойство и вещественность)*

2) $(\Theta^{(j)})^{n_1\cdots n_j}_{\cdots r_i\cdots r_l\cdots} = (\Theta^{(j)})^{n_1\cdots n_j}_{\cdots r_l\cdots r_i\cdots}$, $(\Theta^{(j)})^{\cdots n_i\cdots n_l\cdots}_{r_1\cdots r_j} = (\Theta^{(j)})^{\cdots n_l\cdots n_i\cdots}_{r_1\cdots r_j}$ *(симметричность)*

3) $k^{r_1}(\Theta^{(j)})^{n_1\cdots n_j}_{r_1\cdots r_j} = 0$ *(поперечность)*

4) $\eta^{r_1r_2}(\Theta^{(j)})^{n_1\cdots n_j}_{r_1r_2\cdots r_j} = 0$ *(бесследовость)*

здесь $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ - метрика четырехмерного пространства Минковского.

Свойства из утверждения (3) легко обобщаются на случай плоского псевдоевклидова пространства произвольной размерности и могут быть использованы для построения операторов (в виде суммы ковариантных комбинации импульса и метрического тензора), подобных оператору Берендса-Фронсдала $\Theta^{(j)}(k)$ из (28) (см. ниже Утверждение 4). Для этого вместо тензора $(\Theta^{(j)})^{n_1\dots n_j}_{r_1\dots r_j}(k)$, симметризованного по верхним и нижним индексам, удобно рассматривать производящую функцию

$$\Theta^{(j)}(x,y) = x^{r_1}\cdots x^{r_j}\,(\Theta^{(j)})^{n_1\dots n_j}_{r_1\dots r_j}(k)\,y_{n_1}\cdots y_{n_j}\,. \tag{29}$$

Для общности будем считать, что тензор с компонентами $(\Theta^{(j)})^{n_1\dots n_j}_{r_1\dots r_j}(k)$ задан в псевдо-евклидовом D-мерном пространстве $\mathbb{R}^{s,t}$ $(s+t=D)$ с произвольной метрикой $\eta = ||\eta_{mn}||$, имеющей сигнатуру (s,t). Индексы n_ℓ и r_ℓ в (29) пробегают значения $0,1,\dots,D-1$ и $(x_0,\dots,x_{D-1})$, $(y_0,\dots,y_{D-1}) \in \mathbb{R}^{s,t}$. В диссертации доказано следующее утверждение.

Утверждение 4. *Производящая функция (29) ковариантного проекционного оператора $(\Theta^{(j)})^{n_1\dots n_j}_{r_1\dots r_j}$ (в D-мерном пространстве-времени), удовлетворяющего свойствам 1)-4), перечисленным в Утверждении 3, имеет вид*

$$\Theta^{(j)}(x,y) = \sum_{A=0}^{[\frac{j}{2}]} a_A^{(j)}\,\left(\Theta^{(y)}_{(y)}\,\Theta^{(x)}_{(x)}\right)^A\,\left(\Theta^{(y)}_{(x)}\right)^{j-2A}\,, \tag{30}$$

где $[\frac{j}{2}]$ - целая часть $j/2$,

$$a_A^{(j)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^A \frac{j!}{(j-2A)!\,A!\,(2j+D-5)(2j+D-7)\cdots(2j+D-2A-3)}\,, \tag{31}$$

$(A\geq 1)$, $a_0^{(j)}=1$, а $\Theta^{(y)}_{(x)}$ определяется следующим образом (η_{rn} - метрика пространства $\mathbb{R}^{s,t}$):

$$\Theta^{(y)}_{(x)} \equiv \Theta^{(1)}(x,y) = x^r\,y_n\,\Theta^n_r\,, \quad \Theta^n_r = \eta^n_r - \frac{k_r k^n}{k^2}\,. \tag{32}$$

Также для производящей функции (30), (31) имеет место полезное тождество

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial y_r}\Theta^{(j)}(x,y) = \frac{j(j+D-4)(2j+D-3)}{(2j+D-5)}\,\Theta^{(j-1)}(x,y)\,. \tag{33}$$

Следует отметить, что в несколько иной форме соотношение (30) присутствует в работе [D. Ponomarev, A. A. Tseytlin, On quantum corrections in higher-spin theory in flat space, Journal of High Energy Physics 2016.5 (2016) 184], кроме того аналог формулы (30) возникает при свертке двух однородных полиномов $X^{n_1\dots n_j}$ и $Y_{n_1\dots n_j}$, построенных из векторов x^n и y_n соответственно [1].

[1] $Z^{n_1\dots n_j} = z^{\{n_1}z^{n_2}\cdots z^{n_j\}}$, здесь фигурные скобки обозначают операцию "обесследживания".

Перейдем к случаю D-мерных спиновых проекционных операторов для полуцелого спина. Зафиксируем спин j полуцелым и рассмотрим следующие тензора поляризации

$$(e^{(m)}_{n_1\cdots n_{j-1/2}}) = \begin{pmatrix} (e^{(m)}_{n_1\cdots n_{j-1/2}})_{\gamma_{j+1/2}} \\ (e^{(m)}_{n_1\cdots n_{j-1/2}})^{\dot\beta_{j+1/2}} \end{pmatrix} . \tag{34}$$

То есть компоненты $e^{(m)}_{n_1\cdots n_{j-1/2}}$ являются вейлевскими спинорами. Тензора $(e^{(m)}_{n_1\cdots n_{j-1/2}})_{\gamma_{j+1/2}}$ и $(e^{(m)}_{n_1\cdots n_{j-1/2}})^{\dot\beta_{j+1/2}}$, входящие в правую часть выражения (34), получаются из соответствующих спин-тензоров $\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_{j-1/2})}_{(\gamma_1\ldots\gamma_{j+1/2})}$ и $\overset{(m)}{e}{}^{(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_{j+1/2})}_{(\gamma_1\ldots\gamma_{j-1/2})}$ преобразованием аналогичным (27), но при этом не все спинорные индексы сворачиваются с σ-матрицами.

Используя тензора из (34) можно подобно случаю целого спина определить сумму по поляризациям для полуцелого спина то есть рассмотреть объект вида:

$$\left((\Theta^{(j)})^{n_2\ldots n_{j+1/2}}_{r_2\ldots r_{j+1/2}}\right)_A^{\;B} = \frac{(-1)^{j-1/2}}{2}\sum_{m=-j}^{j}(e^{(m)}_{r_2\cdots r_{j+1/2}})_A(\bar e^{(m)\,n_2\cdots n_{j+1/2}})^B \;, \tag{35}$$

где $A,B = 1,2,3,4$.

Оператор, построенный в (35), по всем своим векторным индексам будет удовлетворять свойствам, перечисленным в Утверждении 3, а так же некоторым дополнительным спинорном условиям (суть которых мы расшифруем ниже на примере более общего случая). Следовательно, можно как и в случае целого спина обобщить оператор $\left((\Theta^{(j)})^{n_2\ldots n_{j+1/2}}_{r_2\ldots r_{j+1/2}}\right)_A^{\;B}$ на случай плоского псевдоевклидова пространства произвольной размерности. В работе [1] по этому поводу было доказано следующее утверждение

Утверждение 5. *Для произвольной размерности пространства-времени $D > 2$ и произвольного полуцелого спина j проекционный оператор $\Theta^{(j)}$, удовлетворяющий условиям 1)–4) Утверждения **3** и дополнительным спинорным условиям*

$$(\Theta^{(j)})^{n_1\ldots n_{j-1/2}}_{r_1\ldots r_{j-1/2}}\cdot\gamma_{n_1} = 0 = \gamma^{r_1}\cdot(\Theta^{(j)})^{n_1\ldots n_{j-1/2}}_{r_1\ldots r_{j-1/2}} \;, \tag{36}$$

имеет вид

$$((\Theta^{(j)})^{n_1\ldots n_{j-1/2}}_{r_1\ldots r_{j-1/2}})_A^{\;B} = c^{(j)}\;(\Theta^{(1/2)})_A^{\;G}\,(\gamma^r)_G^{\;C}(\gamma_n)_C^{\;B}(\Theta^{(j+\frac12)})^{n\,n_1\ldots n_{j-1/2}}_{r\,r_1\ldots r_{j-1/2}}\;, \tag{37}$$

где $\Theta^{(j+\frac12)}$ - это D-мерный оператор Берендса-Фронсдала для целого спина $(j+\frac12)$, фактор $c^{(j)} = \frac{j+1/2}{(2j+D-2)}$ и $(\Theta^{(1/2)}) = \frac{1}{2\mathsf{m}}(\gamma^n k_n + \mathsf{m}\,I)$ (здесь оператор I - это $2^{[D/2]}\otimes 2^{[D/2]}$ единичная матрица и $[a]$ обозначает целую часть от a), матрицы γ^n $(n = 0,1,\cdots,D-1)$ являются представлениями образующих алгебры Клиффорда в размерности D.

Вторая глава диссертации основана на работах [4; 5] и посвящена массивным неприводимым представлениям D-мерных групп Пуанкаре $ISO(1,D-1)$. Подход к исследованию представлений многомерных групп Пуанкаре, изложенный здесь, базируется на построении обобщенных проекторов Берендса-Фронсдала или другими словами D-мерных спиновых проекционных операторов с произвольным типом симметрии тензорных индексов.

Согласно обобщенной схеме Вигнера массивные неприводимые представления группы $ISO(1,D-1)$ будут индуцированы с неприводимых представлений группы $SO(D-1)$ (малой группы D-мерного массивного тестового импульса). Известно, что неприводимые представления $SO(D-1)$ реализованы на бесследовых тензорах с различными типами симметрии тензорных индексов. Типы симметрий тензорных индексов неприводимых представлений групп $SO(D-1)$ классифицируются диаграммами Юнга. С каждой из таких диаграмм может быть ассоциирован примитивный ортогональный идемпотент в алгебре Брауэра (расширении групповой алгебры группы перестановок). Данные идемпотенты, взятые в некотором *стандартном* тензорном представлении алгебры Брауэра, действующем на пространстве тензорных произведений определяющих представлений групп $SO(D-1)$ будут проекторами на искомые неприводимые тензорные представления $SO(D-1)$. Минусом такого подхода к построению массивных неприводимых представлений $ISO(1,D-1)$ является то, что представления, построенные как индуцированные с представлений $SO(D-1)$ не будут явно лоренц-ковариантными.

В работах [4; 5] был предложен метод построения явно лоренц-ковариантных массивных неприводимых представлений групп $ISO(1,D-1)$. Его суть заключается в следующем: оказывается, если продеформировать особым образом *стандартное* тензорное представление алгебры Брауэра, действующее в пространстве тензорного произведения определяющих представлений $SO(1,D-1)$, то технику примитивных ортогональных идемпотентов можно использовать для построения явно лоренц-ковариантных массивных неприводимых представлений многомерных групп Пуанкаре.

Чтобы зафиксировать обозначения, напомним определение алгебры Брауэра. Ассоциативная алгебра с единицей $\mathcal{B}r_j(\omega)$ над полем комплексных чисел с генераторами [2] σ_i и κ_i $(i=1,\dots,j-1)$ и определяющими соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\sigma_i^2 = e, \quad \kappa_i^2 = \omega\kappa_i, \quad \sigma_i\kappa_i = \kappa_i\sigma_i = \kappa_i, \quad i=1,\dots,j-1,\\
&\sigma_i\sigma_\ell = \sigma_\ell\sigma_i, \quad \kappa_i\kappa_\ell = \kappa_\ell\kappa_i, \quad \sigma_i\kappa_\ell = \kappa_\ell\sigma_i, \quad |i-\ell|>1,\\
&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \quad \kappa_i\kappa_{i+1}\kappa_i = \kappa_i \quad \kappa_{i+1}\kappa_i\kappa_{i+1} = \kappa_{i+1},\\
&\sigma_i\kappa_{i+1}\kappa_i = \sigma_{i+1}\kappa_i, \quad \kappa_{i+1}\kappa_i\sigma_{i+1} = \kappa_{i+1}\sigma_i, \quad i=1,\dots,j-2,
\end{aligned}
$$

[2]Здесь и до конца автореферата символы σ_i применяются исключительно для обозначений генераторов алгебры Брауэра.

называется **алгеброй Брауэра**. Здесь e - единичный элемент, а ω является вещественным параметром, характеризующим алгебру.

Набор специальных элементов $e_\alpha \in \mathcal{B}r_j$, удовлетворяющих уравнениям

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \qquad \sum_\alpha e_\alpha = 1. \tag{38}$$

называется полной системой примитивных ортогональных идемпотентов алгебры Брауэра $\mathcal{B}r_j$. Каждый такой идемпотент связан с некоторой диаграммой Юнга. Известно[A.P. Isaev, V.A. Rubakov, Theory of Groups and Symmetries II. Representations of Groups and Lie Algebras, Applications. World Scientific, 2021, 600 pp.], что примитивные ортогональные идемпотенты $e_\alpha \in \mathcal{B}r_j$ могут быть построены как функции от элементов Юциуса-Мерфи $y_i \in \mathcal{B}r_j$, $(i = 1, 2, \ldots, j)$, определяемых как

$$y_1 = 0, \quad y_{n+1} = \sigma_n - \kappa_n + \sigma_n y_n \sigma_n\, . \tag{39}$$

Рассмотрим сейчас идемпотент $E_{T_{\{[j];j\}}}$ в алгебре Брауэра $\mathcal{B}r_j$, соответствующий диаграмме Юнга типа строка длины j. Такой идемпотент называется симметризатором и выражается через элементы Юциуса-Мерфи y_i по следующей формуле

$$E_{T_{\{[j];j\}}} = \frac{(y_2+1)\cdots(y_j+1)}{j!} \cdot \frac{(y_2+\omega-1)\cdot(y_3+\omega)\cdots(y_j+\omega+j-3)}{\omega\cdot(2+\omega)\cdots(2j-4+\omega)}\, . \tag{40}$$

Можно проверить, что идемпотент $E_{T_{\{[j];j\}}}$, определенный в (40), подчиняется тождествам $(\forall r = 1, ..., j-1)$

$$\sigma_r \cdot E_{T_{\{[j];j\}}} = E_{T_{\{[j];j\}}} \cdot \sigma_r = E_{T_{\{[j];j\}}}\ , \quad \kappa_r \cdot E_{T_{\{[j];j\}}} = 0 = E_{T_{\{[j];j\}}} \cdot \kappa_r\, . \tag{41}$$

Перейдем к описанию тензорных представлений алгебры Брауэра, необходимых для построения D-мерных спиновых проекционных операторов. В работе [5] было построено новое семейство тензорных представлений алгебры Брауэра в пространстве $(\mathbb{R}^{p,D-p})^{\otimes j}$. *Стандартное* тензорное представление алгебры Брауэра, которое мы упоминали, принадлежит этому семейству. Другое специальное представление этого семейства будет использовано для построения D-мерных спиновых проекционных операторов с произвольным типом симметрии тензорных индексов.

Чтобы построить новые представления алгебры Брауэра введем тройку $(\theta,\hat{\theta},\check{\theta})$ квадратных $D \times D$ вещественных матриц $\hat{\theta} = ||\hat{\theta}_{nm}||$, $\check{\theta} = ||\check{\theta}^{nm}||$ и $\theta = ||\theta^n{}_m|| = ||\theta_m{}^n||$ таких что

$$\check{\theta}^{nm}\, \hat{\theta}_{m\ell} = \theta^n{}_\ell\ , \quad \hat{\theta}_{\ell m}\, \check{\theta}^{mn} = \theta_\ell{}^n\ , \quad \check{\theta}^{m\ell} \cdot \theta_\ell{}^n = \check{\theta}^{mn}\ , \quad \hat{\theta}_{m\ell} \cdot \theta^\ell{}_n = \hat{\theta}_{mn}\, . \tag{42}$$

Утверждение 6. *Тройка $(\theta, \hat{\theta}, \check{\theta})$ с соотношениями (42) удовлетворяет формулам*

$$\theta_\ell{}^m \hat{\theta}_{mn} = \hat{\theta}_{\ell n}\ , \quad \theta^\ell{}_m \check{\theta}^{mn} = \check{\theta}^{\ell n}\ , \quad \theta^n{}_r \theta^r{}_\ell = \theta^n{}_\ell\ , \tag{43}$$

$$Tr(\theta) = \theta_\ell{}^\ell = \hat{\theta}_{\ell m}\, \check{\theta}^{m\ell} = \omega \;, \tag{44}$$

где ω - целое число: $0 \leq \omega \leq D$.

Рассмотрим операторы $P_r^{(\theta)}$ и $K_r^{(\theta)}$ $(r = 1,\dots,j-1)$, действующие в пространстве $(\mathbb{R}^D)^{\otimes j}$ согласно следующим формулам:

$$P_r^{(\theta)} \cdot (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{i_{r+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_j}) =$$

$$(e_{\ell_1} \otimes \dots \otimes e_{\ell_r} \otimes e_{\ell_{r+1}} \otimes \dots \otimes e_{\ell_j}) \theta^{\ell_1}_{i_1} \cdots \theta^{\ell_{r-1}}_{i_{r-1}} \theta^{\ell_r}_{i_{r+1}} \theta^{\ell_{r+1}}_{i_r} \theta^{\ell_{r+2}}_{i_{r+2}} \cdots \theta^{\ell_j}_{i_j} \;,$$

$$K_r^{(\theta)} \cdot (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{i_{r+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_j}) =$$

$$(e_{\ell_1} \otimes \dots \otimes e_{\ell_r} \otimes e_{\ell_{r+1}} \otimes \dots \otimes e_{\ell_j}) \theta^{\ell_1}_{i_1} \cdots \theta^{\ell_{r-1}}_{i_{r-1}} \check{\theta}^{\,\ell_r \ell_{r+1}} \hat{\theta}_{i_r i_{r+1}} \theta^{\ell_{r+2}}_{i_{r+2}} \cdots \theta^{\ell_j}_{i_j} \;, \tag{45}$$

где $i_\ell = 1,...,D$ и e_i базисные вектора в пространстве $\mathbb{R}^D$.

Утверждение 7. *Если тройка $(\theta,\hat{\theta},\check{\theta})$ удовлетворяет (42), (43) и (44), то отображение S_θ: $\mathcal{B}r_j(\omega) \to End(\mathbb{R}^D)^{\otimes j}$, определенное на генераторах $\sigma_r,\kappa_r \in \mathcal{B}r_j(\omega)$:*

$$S_\theta(\sigma_r) = P_r^{(\theta)} \;, \quad S_\theta(\kappa_r) = K_r^{(\theta)} \;, \tag{46}$$

распространяется на всю алгебру $\mathcal{B}r_j(\omega)$ как гомоморфизм (то есть S_θ - это представление $\mathcal{B}r_j(\omega)$).

Давайте тройкой матриц $(\theta,\, \hat{\theta}\,, \check{\theta})$ будет

$$\theta^m_n = \Theta^m_n(k) \;, \quad \check{\theta}^{\,nm} = \Theta^n_\ell(k)\, \eta^{\ell m} \;, \quad \hat{\theta}_{mn} = \Theta^\ell_m(k)\, \eta_{\ell n} \;, \tag{47}$$

где метрика $||\eta_{rn}|| = diag(\underbrace{1,...,1}_{p}, \underbrace{-1,...-1}_{q})$ $\;(p+q = D)$, матрица $\Theta^m_n(k)$ определена в (32) и таким образом зависит от импульса $k \equiv \vec{k} \in \mathbb{R}^{p,q}$. Тройка (47) удовлетворяет (42), (43) и (44) с $\omega = (D-1)$. Поэтому, согласно Утверждению **7**, операторы (45), в качестве составляющих которых взята тройка (47), определяют представление $S_{(\vec{k})} \equiv S_{\Theta(k)}$ алгебры $\mathcal{B}r_j(D-1)$. Данное представление понадобится нам для построения D-мерных спиновых проекционных операторов.

Рассмотрим образ полного симметризатора (40) алгебры Брауэра в представлении $S_{(\vec{k})}$

$$\Theta_{\{[j];j\}} \equiv S_{(\vec{k})}(E_{T_{\{[j];j\}}}) \;. \tag{48}$$

Оператор $\Theta_{\{[j];j\}}$ действует на пространстве $(\mathbb{R}^{p,q})^{\otimes j}$ и согласно (41) удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\Theta_{\{[j];j\}} \cdot S_{(\vec{k})}(\sigma_{i,\ell}) = S_{(\vec{k})}(\sigma_{i,\ell}) \cdot \Theta_{\{[j];j\}} = \Theta_{\{[j];j\}} \;, \\ \Theta_{\{[j];j\}} \cdot S_{(\vec{k})}(\kappa_{i,\ell}) = S_{(\vec{k})}(\kappa_{i,\ell}) \cdot \Theta_{\{[j];j\}} = 0 \,, \end{gathered} \tag{49}$$

где элементы $\sigma_{i,\ell}, \kappa_{i,\ell} \in \mathcal{B}r_j$ определяются через генераторы алгебры Брауэра по следующим формулам

$$\begin{gathered}\sigma_{k,m} = \sigma_{m-1} \cdots \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \cdots \sigma_{m-1} \;, \\ \\ \kappa_{k,m} = \sigma_{m-1} \cdots \sigma_{k+1} \kappa_k \sigma_{k+1} \cdots \sigma_{m-1} \;. \end{gathered} \tag{50}$$

Тогда из формул (49) следует утверждение.

Утверждение 8. *Симметризатор $\Theta_{\{[j];j\}}$, заданный в (48), равен D-мерному спиновому проекционному оператору $\Theta^{(j)}(k)$ (см. Утверждение 4)*

$$\Theta_{\{[j];j\}} = \Theta^{(j)}(k) \;. \tag{51}$$

Теперь опишем альтернативный подход к построению полностью симметричных проекторов $\Theta_{\{[j];j\}}$ в пространстве $(\mathbb{R}^{p,q})^{\otimes j}$. Этот подход основан на другой известной конструкции полного симметризатора (40) в алгебре Брауэра $\mathcal{B}r_j$. Рассмотрим рациональную функцию $\hat{R}_i(w)$ со значениями в алгебре $\mathcal{B}r_j$

$$\hat{R}_i(w) = \sigma_i \big(1 - \frac{\sigma_i}{w} + \frac{\kappa_i}{w - \varkappa}\big), \quad \varkappa = \frac{\omega}{2} - 1 \,, \tag{52}$$

где аргумент w обычно называют **спектральным параметром**. Эта функция является решением уравнения Янга-Бакстера.

$$\hat{R}_i(w)\hat{R}_{i+1}(w+v)\hat{R}_i(v) = \hat{R}_{i+1}(v)\hat{R}_i(w+v)\hat{R}_{i+1}(w) \,. \tag{53}$$

Определим элемент $\Xi_j \in \mathcal{B}r_j$ с помощью следующего рекуррентного соотношения

$$\Xi_j = \Xi_{j-1} \left(\prod_{i=j-1}^{1} \hat{R}_i(-i) \right) = \left(\prod_{i=1}^{j-1} \hat{R}_i(-i) \right) \Xi_{j-1} \,, \tag{54}$$

где $\Xi_1 = 1$.

Известно, что элемент Ξ_j, определенный в (54), удовлетворяет условиям (ср. с (41))

$$\sigma_r \cdot \Xi_j = \Xi_j \cdot \sigma_r = \Xi_j \;, \quad \kappa_r \cdot \Xi_j = 0 = \Xi_j \cdot \kappa_r \quad (r = 1,\ldots,j-1) \;, \tag{55}$$

поэтому мы имеем тождество

$$E_{T_{\{[j];j\}}} = \frac{1}{j!}\,\Xi_j\ , \tag{56}$$

где идемпотент $E_{T_{\{[j];j\}}}$ задан в (40), а нормировочный коэффициент $1/j!$ определяется из свойства проекторности для $E_{T_{\{[j];j\}}}$.

Ввиду тождества (56) элемент $(j!)^{-1}\,\Xi_j$ в представлении $S_{(\vec{k})}$ совпадает с D-мерным симметризатором Берендса-Фронсдала (48)

$$\frac{1}{j!} S_{(\vec{k})}(\Xi_j) = \Theta^{(j)} \equiv \Theta_{\{[j];j\}} \tag{57}$$

где производящая функция для матрицы $\Theta^{(j)}$ задана в (30). Введем производящую функцию для тензора $(j!)^{-1} S_{(\vec{k})}(\Xi_j)$

$$\Xi^{(j)}(x,u) = \frac{1}{j!}\,u_{n_1}\cdots u_{n_j}\,(S_{(\vec{k})}(\Xi_j))^{n_1\dots n_j}_{r_1\dots r_j}\,x^{r_1}\cdots x^{r_j}\ , \tag{58}$$

где представление $S_{(\vec{k})}$ определено в (45), (47).

Утверждение 9. *Для производящей функции (58) выполняется следующее рекуррентное соотношение:*

$$\Xi^{(j)}(x,u) = \tfrac{1}{(j-1)!}\Big(\Theta^{(x)}_{(u)} - \tfrac{1}{(\omega+2(j-2))}\,\Theta^{(x)}_{(x)}\,(u_k\,\partial_{x_k})\Big)\big(\Theta^{(\,x\,)}_{(\partial_z)}\big)^{j-1}\,\Xi^{(j-1)}(z,u)\,, \tag{59}$$

где $\partial_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}$*, функция* $\Theta^{(x)}_{(u)}$ *определена в (32) и* $\omega = (D-1)$.

Формула (59) является следствием последнего равенства в (54). Таким образом, имея в виду (57), формула (59) приводит к новому рекуррентному соотношению на D-мерный симметризатор Берендса-Фронсдала, которое было впервые получено в работах [4; 5].

Приведем теперь два явных примера D-мерных спиновых проекционных операторов, соответствующих диаграммам Юнга с более чем одной строкой. Идемпотент $E_{T_{\{[1^j];j\}}}$, который соответствует диаграмме $\lambda = [1^j]$, состоящей из одного столбца высотой j, называется антисимметризатором и имеет следующий вид

$$E_{T_{\{[1^j];j\}}} = \frac{(1-y_2)(1-y_3)\dots(1-y_j)\cdot(y_2+\omega-1)(y_3+\omega-2)\dots(y_j+\omega-j+1)}{j!(\omega-2)(\omega-4)\dots(\omega-2(j-1)\,)}\ . \tag{60}$$

Обратите внимание, что для антисимметризатора $E_{T_{\{[1^j];j\}}} \in \mathcal{B}r_j$, можно написать более простую формулу, чем (60). Чтобы вывести эту формулу, запишем условия для $E_{T_{\{[1^j];j\}}}$, которые являются аналогами (41):

$$\sigma_r\cdot E_{T_{\{[1^j];j\}}} = -E_{T_{\{[1^j];j\}}} = E_{T_{\{[1^j];j\}}}\cdot\sigma_r\ , \tag{61}$$

$$\kappa_r \cdot E_{T_{\{[1^j];j\}}} = 0 = E_{T_{\{[1^j];j\}}} \cdot \kappa_r\,, \quad \forall r = 1,\ldots,j-1\,. \tag{62}$$

Ясно, что соотношения (62) следуют из условий (61). Действительно, имеем

$$\kappa_r \cdot E_{T_{\{[1^j];j\}}} = \kappa_r \cdot \sigma_r \cdot E_{T_{\{[1^j];j\}}} = -\kappa_r \cdot E_{T_{\{[1^j];j\}}} \quad \Rightarrow \quad \kappa_r \cdot E_{T_{\{[1^j];j\}}} = 0\,, \tag{63}$$

где использованы соотношения $\kappa_r = \kappa_r \sigma_r$ и (61). Второе равенство доказывается аналогично. Следовательно, условия (61) полностью определяют антисимметризатор $E_{T_{\{[1^j];j\}}}$ в алгебре Брауэра. Заметим, что эти же условия определяют антисимметризатор в групповой алгебре группы перестановок $\mathbb{C}[S_j]$. Это означает, что выражение для $E_{T_{\{[1^j];j\}}} \in \mathcal{B}r_j$ не включает элементы $\kappa_i \in \mathcal{B}r_j$ и имеет форму, характерную для $\mathbb{C}[S_j]$

$$E_{T_{\{[1^j];j\}}} = \frac{1}{j!}(1-\sigma_{1,2}) \cdot (1-\sigma_{1,3}-\sigma_{2,3}) \cdots (1-\sigma_{1,j}-\cdots-\sigma_{j-1,j})\,. \tag{64}$$

Раскроем скобки в правой части уравнения (64) и возьмем его в представлении $S_{(\vec{k})}$. В результате получаем явное выражение для **полностью антисимметричного** D-мерного спинового проекционного оператора (антисимметричного аналога проектора Берендса-Фронсдала)

$$\big(S_{(\vec{k})}(E_{T_{\{[1^j];j\}}})\big)^{d_1\ldots d_j}_{n_1\ldots n_j} = \frac{1}{j!}\sum_{\sigma\in S_j}(-1)^{p(\sigma)}\Theta^{d_1}_{n_{\sigma(1)}}\Theta^{d_2}_{n_{\sigma(2)}}\cdots\Theta^{d_j}_{n_{\sigma(j)}}\,, \tag{65}$$

где сумма пробегает все элементы σ группы перестановок S_j и $p(\sigma)$ - четность перестановки σ. Обратите внимание, что антисимметричный проектор (65) является (по построению) D-мерным спиновым проекционным оператором и ортогонален полностью симметричному проектору Берендса-Фронсдала (30).

В заключение рассмотрим пример идемпотента $E_{T_{\{[2,1];3\}}}$, соответствующего диаграмме Юнга $\lambda = [2,1]$ типа "крюк". Идемпотент $E_{T_{\{[2,1];3\}}}$ имеет следующее представление в терминах элементов Юциуса-Мерфи

$$\begin{gathered}E_{T_{\{[2,1];3\}}} = \tfrac{1}{6(\omega-1)(\omega-2)}\big(2(\omega(\omega-3)+2) + 2(\omega(4-\omega)-4)y_2 + \omega(\omega-1)y_3 + \\ +\omega(2-\omega)y_2y_3 + 2(2-\omega)y_2^2 + (\omega-1)y_3^2 - \omega y_2^2 y_3 + (2-\omega)y_2y_3^2 - y_2^2y_3^2\big).\end{gathered} \tag{66}$$

Используя определение (39) элементов Юциуса-Мерфи, мы получаем формулу для $E_{T_{\{[2,1];3\}}}$ в терминах генераторов алгебры Брауэра

$$\begin{gathered}E_{T_{\{[2,1];3\}}} = \tfrac{1}{6}\Big(2 - (\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1) + \sigma_1\sigma_2\sigma_1 - 2\sigma_1 + \sigma_2 + \\ + \tfrac{1}{(\omega-1)}\big(3(\kappa_2\sigma_1+\sigma_1\kappa_2) - 3\kappa_2 - 3\sigma_1\kappa_2\sigma_1\big)\Big).\end{gathered} \tag{67}$$

Образ идемпотента $E_{T_{\{[2,1];3\}}}$ в представлении $S_{(\vec{k})}$ имеет вид

$$\left(S_{(\vec{k})}(E_{T_{\{[2,1];3\}}})\right)^{d_1 d_2 d_3}_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{6}\Big(2\,\Theta^{d_1}_{n_1}\Theta^{d_2}_{n_2}\Theta^{d_3}_{n_3} - (\Theta^{d_1}_{n_2}\Theta^{d_2}_{n_3}\Theta^{d_3}_{n_1} +$$

$$+\Theta^{d_1}_{n_3}\Theta^{d_2}_{n_1}\Theta^{d_3}_{n_2}) + \Theta^{d_1}_{n_3}\Theta^{d_2}_{n_2}\Theta^{d_3}_{n_1} - 2\Theta^{d_1}_{n_2}\Theta^{d_2}_{n_1}\Theta^{d_3}_{n_3} + \Theta^{d_1}_{n_1}\Theta^{d_2}_{n_3}\Theta^{d_3}_{n_2} - \frac{3}{(\omega-1)}\cdot$$

$$\cdot\big(\Theta^{d_1}_{n_1}\Theta^{d_2 d_3}\Theta_{n_2 n_3} + +\Theta^{d_2}_{n_2}\Theta^{d_1 d_3}\Theta_{n_1 n_3} - \Theta^{d_2}_{n_1}\Theta^{d_1 d_3}\Theta_{n_2 n_3} - \Theta^{d_1}_{n_2}\Theta^{d_2 d_3}\Theta_{n_1 n_3})\Big)\,. \tag{68}$$

Оператор $S_{(\vec{k})}(E_{T_{\{[2,1];3\}}})$, заданный в (68), бесследов и поперечен. Это означает, что этот оператор является проектором на неприводимое представление группы $ISO(1, D-1)$, действующее в пространстве тензоров 3-го ранга.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

В настоящей диссертационной работе на основе унитарных представлений накрывающей группы Пуанкаре $ISL(2,\mathbb{C})$ были построены явные решения (спин-тензорные поля) волновых уравнений для свободных массивных частиц произвольного целого и полуцелого спина, выраженные через два вейлевских спинора. Предложен метод разложения данных решений на независимые компоненты, соответствующие разным поляризациям. Найдена явная формула для D-мерной матрицы плотности (проектора Берендса-Фронсдала) для частиц с любым полуцелым спином. Подробно рассмотрены примеры отвечающие спинам $j = \frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$. Проанализированы свойства операторов Казимира алгебры Ли шестимерной группы Пуанкаре в базисе светового конуса в случае безмассовых представлений.

В данной диссертационной работе найден новый класс представлений алгебры Брауэра. Это позволило применить метод построения неприводимых конечномерных представлений ортогональных и симплектических групп Ли (основанный на использовании идемпотентов алгебры Брауэра) для построения неприводимых представлений D-мерной группы Пуанкаре. Используя новое представления алгебры Брауэра, выводится новая рекуррентная формула для D-мерного полностью симметричного проектора Берендса-Фронсдала. Выведены формулы для D-мерных проекторов типа Берендса-Фронсдала, связанных с любыми симметриями, которые соответствуют диаграммам Юнга с двумя и более строками (в отличие от полностью симметричных проекторов БФ, которые соответствуют однострочным диаграммам Юнга). Для иллюстрации полученных результатов явно найдены образы некоторых специальных идемпотентов алгебры Брауэра в новых представлениях.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Isaev, A.* Two-spinor description of massive particles and relativistic spin projection operators / A. Isaev, M. Podoinitsyn // Nuclear Physics B. — 2018. — Т. 929. — С. 452—484.

2. *Isaev, A.* Unitary Representations of the Wigner Group ISL (2, C) and A Two-Spinor Description of Massive Particles With An Arbitrary Spin / A. Isaev, M. Podoinicin // Theoretical and Mathematical Physics. — 2018. — Т. 195, № 3. — С. 779—806.

3. *Isaev, A. P.* Polarization Tensors for Massive Arbitrary-Spin Particles and the Behrends–Fronsdal Projection Operator. / A. P. Isaev, M. Podoinitsyn // Theoretical & Mathematical Physics. — 2019. — Т. 198, № 1.

4. *Podoinitsyn, M. A.* Polarization spin-tensors in two-spinor formalism and Behrends–Fronsdal spin projection operator for D-dimensional case / M. A. Podoinitsyn // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2019. — Т. 16, № 4. — С. 315—320.

5. *Isaev, A.* D-dimensional spin projection operators for arbitrary type of symmetry via Brauer algebra idempotents / A. Isaev, M. Podoinitsyn // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2020. — Т. 53, № 39. — С. 395202.

6. Massless finite and infinite spin representations of Poincaré group in six dimensions / I. Buchbinder [и др.] // Physics Letters B. — 2021. — Т. 813. — С. 136064.

7. Безмассовые представления группы ISO (1,5) / И. Бухбиндер [и др.] // Письма ЭЧАЯ. — 2021. — Т. 18, № 7.

8. *Isaev, A.* Behrends–Fronsdal Spin Projection Operator in Space-Time with Arbitrary Dimension / A. Isaev, M. Podoinitsyn // Quantum Theory And Symmetries. — Springer. 2017. — С. 137—148.

9. *Podoinitsyn, M.* Helicity and infinite spin representations of the Poincare group in 6D / M. Podoinitsyn // RDP online workshop"Recent Advances in Mathematical Physics. — 2021. — С. 14.

Подойницын Михаил Александрович

Спиновые проекционные операторы в квантовой теории поля и представления алгебры Брауэра

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________