

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Факультет инноваций и высоких технологий
Кафедра дискретной математики



На правах рукописи

УДК 519.175.4

Пядеркин Михаил Михайлович

ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ И ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА
СЛУЧАЙНЫХ ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФОВ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2019

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
профессор
Андрей Михайлович Райгородский

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Защита состоится «08» апреля 2019 в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.05.002 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (государственного университета):
<https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php>

Работа представлена «10» января 2019 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Рассмотрение дистанционных графов мотивировано знаменитой задачей комбинаторной геометрии — задачей Нельсона-Эрдеша-Хадвигера^{1 2} о хроматическом числе пространства $\mathbb{R}^n$: минимальном числе цветов, в которые можно раскрасить n -мерное евклидово пространство так, чтобы не было одноцветных точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1. С точки зрения теории графов, рассматривается задача о хроматическом числе бесконечного графа, вершинами которого являются все точки пространства $\mathbb{R}^n$, а ребро проводится между точками на расстоянии 1. Теорема Эрдеша-де Брейна утверждает, что бесконечный граф можно раскрасить в k цветов тогда и только тогда, когда в k цветов можно раскрасить каждый его конечный подграф³. Тем самым, достаточно изучить хроматические числа конечных дистанционных графов — вершины дистанционного графа представляют собой конечное множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, а ребро проводится в том случае, если точки находятся на некотором фиксированном расстоянии друг от друга.

Одно из первых продвижений в задаче Нельсона-Эрдеша-Хадвигера было наблюдение Лармана и Роджерса⁴. В своей работе они рассматривали дистанционный граф $G(n, r, s)$, вершины которого суть вершины булева куба $\{0, 1\}^n$, которые содержат ровно r единиц, а ребро проводится в том случае, если скалярное произведение соответствующих вершин равно s . Ларман и Роджерс заметили, что хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$, которое мы будем обозначать $\chi(\mathbb{R}^n)$, уж никак не меньше хроматического числа графа $G(n, 3, 1)$, что давало рекордную на тот момент оценку $\chi(\mathbb{R}^n) \geq c \cdot n^2$. Впоследствии именно с помощью дистанционных графов Франкл и Уилсон установили⁵, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$ — таким образом, они показали, что хроматическое число пространства растет экспоненциально с ростом n . Для этого им понадобились графы $G(n, r, s)$ с $r \sim \frac{2-\sqrt{2}}{2}n$ и $s \sim \frac{r}{2}$. В 1991 году Дж. Кан и Г. Калаи использовали результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное неодноточечное множество в $\mathbb{R}^n$ может быть разбито на $n + 1$ часть

¹А.М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств*, Успехи Матем. Наук, 2001, 56(1): 107–146.

²V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Math. Association of America, 1991.

³P. Erdős, N.G. de Bruijn, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Indag. Math. 13 (1951) 371–373

⁴D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1 - 24.

⁵P. Frankl, R. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica, 1 (1981), 357 - 368.

меньшего диаметра⁶. Неудивительно, что с исследованием дистанционных графов связаны одни из самых широко изучаемых разделов комбинаторной геометрии⁷.

Впервые же дистанционные графы были упомянуты в работе Надя⁸, где граф $G(n, 3, 1)$ был использован для построения графа с маленьким размером максимальной клики и маленьким размером максимального независимого множества — классической задачи теории Рамсея. Числом Рамсея $r(n)$ называется минимальное натуральное число такое, что в любом графе из $r(n)$ вершин найдется либо клика размера n , либо независимое множество размера n . Надя показал, что в графе $G(n, 3, 1)$ порядка n^3 вершин, а размер максимальной клики и максимального независимого множества не превосходят n . Таким образом, была получена на тот момент наилучшая конструктивная оценка $r(n) > c \cdot n^3$. Позже Франкл и Уилсон привели сверхполиномиальную оценку, также полученную с помощью дистанционных графов⁹.

Следует также упомянуть, что дистанционные графы связаны с исследованием равновесных кодов с запрещенными расстояниями¹⁰, а при n , делящемся на 4, клики в графе $G(n, n/2, n/4)$ фактически являются строками матрицы Адамара.

Изучение же случайных графов началось после того, как П. Эрдеш установил, что «вероятностный метод» помогает решать многие задачи экстремальной теории графов¹¹. С использованием этого метода Эрдеш доказал, что для любых натуральных чисел $g \geq 3$ и $k \geq 3$ существует граф с хроматическим числом k и обхватом g , где обхватом графа называется длина наименьшего цикла. Другим классическим примером использования вероятностного метода является построение нижних оценок для чисел Рамсея. Наблюдение, что детерминированные утверждения могут быть доказаны с помощью теории вероятностей, позволило доказать или опровергнуть и многие другие замечательные утверждения из комбинаторики, теории чисел и теории информации.

Случайный граф в модели Эрдеша–Реньи — это случайный элемент со значениями во множестве всех неориентированных графов на n вершинах $V_n = \{1, \dots, n\}$ без петель и кратных ребер, имеющий биномиальное распределение, то есть

$$\mathbb{P}(G_p(n) = (V_n, E)) = p^{|E|}(1 - p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Таким образом, каждое ребро включается в случайный подграф с вероятностью p , независимо от остальных ребер. Отметим, что p — вероятность ребра — может,

⁶A.M. Raigorodskii, *Three lectures on the Borsuk partition problem*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 347 (2007), 202 - 248.

⁷V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997.

⁸Z. Nagy, *A certain constructive estimate of the Ramsey number*, Matematikai Lapok, 23 (1972), N 301-302, 26.

⁹L.A. Székely, *Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems*, Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11 (2002), 649 - 666.

¹⁰Ф.Дж. Мак-Вильямс, Н.Дж.А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, М.: Радио и связь, 1979.

¹¹Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

вообще говоря, зависит от n .

Случайным графам посвящено множество работ. Хорошо изучены классические для графов свойства, такие как, например, связность¹² (П. Эрдеш, А. Реньи, Б. Боллобаш и др.) или гамильтоновость¹³ (Дж. Комлош, Дж. Мун, Е. Райт и др.). Изучены также многие экстремальные характеристики случайного графа, в том числе длина максимального пути (М. Айтаи, Е. Семереди и др.), распределение диаметра (Ф. Чанг, О. Риордан и др.) или размер максимальной клики (Т. Лучак, Б. Боллобаш и др.). Случайные бинарные деревья находят свое применение, в частности, для построения эффективных структур данных¹⁴.

Одно из естественных обобщений модели Эрдеша–Реньи устроено следующим образом. Пусть дана некоторая последовательность графов $H_n = (V_n, E_n)$, в которой $|V_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (здесь n не обязано быть числом вершин). Определим случайный граф $\mathcal{G}(H_n, p)$ как случайный элемент со значениями во множестве всех остовных подграфов $G = (V_n, E)$ графа H_n и с биномиальным распределением, т.е.

$$\mathbb{P}[\mathcal{G}(H_n, p) = (V_n, E)] = p^{|E|}(1 - p)^{|E_n| - |E|}.$$

Таким образом, в случайный подграф включается каждое ребро *исходного графа* с вероятностью p , независимо от остальных ребер. Данная модель является обобщением классической модели Эрдеша–Реньи, в том смысле, что $G_p(n) = \mathcal{G}(K_n, p)$, где K_n — полный граф на n вершинах. Данная модель хорошо изучена для многих классов графов. К примеру, подробно изучен случай $H_n = Q^n$, где Q^n — это n -мерный куб, т.е. граф, вершины которого суть все $(0, 1)$ -векторы, а ребра — это пары вершин, различающихся ровно в одной координате (образующих ребро куба). В частности, исследовался¹⁵ размер максимального независимого подмножества случайного подграфа куба $\alpha(\mathcal{G}(Q^n, p))$: доказано, что если p — любая функция от n , с которой $pn \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то с асимптотической вероятностью 1 выполнено $\alpha(\mathcal{G}(Q^n, p)) \sim 2^{n-1}$. В работе мы будем рассматривать случайные подграфы дистанционного графа $G(n, r, s)$, уже упомянутого выше. Для удобства мы будем обозначать случайный подграф этого графа как $G_p(n, r, s) = \mathcal{G}(G(n, r, s), p)$.

Другим естественным обобщением модели Эрдеша–Реньи является случайный *регулярный* граф. А именно, если $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ и rn четно, то пусть $\Omega_r(n)$ обозначает множество всех r -регулярных графов на множестве вершин V_n . Тогда случайным регулярным графом называется случайный элемент с равномерным распределением на множестве $\Omega_r(n)$. Для данной модели получено множество результатов, в том числе для свойств связности и двусвязности, а также различные

¹²Erdős P., Renyi A., *On the evolution of random graphs*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., 5 (1960), 17 - 61.

¹³J. Komlós, E. Szemerédi, *Hamilton cycles in random graphs*. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 10 (1975), 1003 - 1011.

¹⁴Seidel, Raimund, Aragon, Cecilia R. *Randomized Search Trees*, Algorithmica, 16 (1996), 464 - 497.

¹⁵K. Weber, *On the independence number of random subgraphs of the n -cube*, Annals of Discrete Math., 33 (1987), 333 - 337.

оценки, к примеру, на диаметр случайного регулярного графа. Однако, данная модель менее изучена, чем $G_p(n)$, так как уже оценка количества регулярных графов является трудной задачей. Изучением случайных регулярных графов занимались, в частности, Н. Вормальд¹⁶, А. Фриз.

Цель работы

Цель работы состоит в изучении структуры независимых множеств в дистанционных графах $G(n, r, s)$ и их случайных подграфах, а также установления асимптотического поведения числа независимости и хроматического числа данных графов; исследование устойчивости и асимптотической устойчивости независимых множеств и, где возможно, нахождение пороговой вероятности для устойчивости.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты дают возможность рассчитывать значения экстремальных характеристик случайного графа. Кроме того, изучение случайных дистанционных графов представляет ценность для задач комбинаторной геометрии.

Методология и методы исследования

Для доказательства основных результатов диссертации мы использовали разнообразную технику. Мы воспользовались классическими результатами из теории случайных графов, такими как теорема о хроматическом числе и числе независимости случайного графа¹⁷. Также были использованы классические комбинаторные результаты о задаче Эрдеша-Ко-Радо и структуре t -пересекающихся совокупностей^{18 19}. В работе мы воспользовались различными неравенствами для биномиальных коэффициентов, а также методом моментов. Для доказательства оценки хроматического числа мы воспользовались жадным алгоритмом раскраски, для которого были доказаны оценки вероятности.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации получены новые результаты, которые состоят в следующем:

¹⁶N.C. Wormald, *Models of random regular graphs.*, Surveys in Combinatorics 1999, LMS Lecture Note Series 267 (1999), 239 - 298.

¹⁷B. Bollobás, *Random Graphs*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2001.

¹⁸P. Frankl, Z. Füredi, *Forbidding just one intersection*, Journal Combin. Theory A, 39 (1985), 160 - 176.

¹⁹Rudolf Ahlswede and Levon H. Khachatrian, *The Complete Nontrivial-Intersection Theorem for Systems of Finite Sets*, J. Comb. Th. Ser. A 76 (1996), 121 - 138.

1. Найдена асимптотика числа независимости и хроматического числа случайного графа $G_{1/2}(n, 3, 1)$.
2. Найден порядок роста числа независимости и хроматического числа для случайного графа $G_{1/2}(n, r, s)$.
3. Доказана асимптотическая устойчивость независимого множества в случайном графе $G_{1/2}(n, r, s)$ при $r > 2s + 1$.
4. Найдена пороговая вероятность для асимптотической устойчивости независимого множества в случайном графе $G_p(n, r, s)$ при $r > 2s + 1$.
5. Описано устройство больших независимых множеств графа $G(n, r, 1)$ при $r \geq 4$.
6. Доказана устойчивость независимого множества в случайном графе $G_{1/2}(n, r, 1)$ при $r \geq 4$.
7. Доказана устойчивость независимого множества в случайном графе $G_{1/2}(n, r, < s)$.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты строго доказаны.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных семинарах:

- Научный семинар «Вероятностные методы в комбинаторике» на кафедре математической статистики механико-математического факультета МГУ, под руководством профессора А.М. Райгородского (2014–2015 гг., неоднократно).
- Научный семинар «Дискретная геометрия» в МГУ, под руководством д.ф.м.н. Мощевитина Н.Г. (2015г.).

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- «Random Structures and Algorithms 2013» (Познань, Польша, 2013)
- «Ломоносов-2015» (Москва, 2015)
- «Random Structures and Algorithms 2015» (Питтсбург, США, 2015)
- «Workshop on extremal graph theory» (Москва, 2016)

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 8 работах автора, список которых приведен в конце диссертации. Все журналы входят в перечень ВАК. Все результаты, приведенные в данной диссертации, были получены автором диссертации самостоятельно, включая результаты, опубликованные в совместных работах.

Благодарности

Автор признателен профессору Андрею Михайловичу Райгородскому за постановку задачи и неоценимую помощь в работе.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 60 ссылок. Общий объем диссертации составляет 79 страниц.

Основное содержание работы

Во введении представлен обзор исследований, посвященных дистанционным графам, случайным графам Эрдеша–Реньи и другим моделям случайных графов. Также во введение описывается структура диссертации.

В первой главе рассматривается граф $G(n, 3, 1)$ с множеством вершин $V(n, 3)$ и множеством ребер $E(n, 3, 1)$, где

$$V(n, 3) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 3\},$$

$$E(n, 3, 1) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\},$$

и $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве. Иными словами, вершины графа $G(n, 3, 1)$ — $(0,1)$ -векторы с ровно тремя единицами, а ребра — пары вершин, имеющих в точности одну общую единицу.

Определим случайный граф $G_p(n, 3, 1)$ как случайный элемент со значениями во множестве всех остовных подграфов $G = (V(n, 3), E)$ графа $G(n, 3, 1)$ ($E \subseteq E(n, 3, 1)$) и с биномиальным распределением, т.е.

$$\mathbb{P}[G_p(n, 3, 1) = (V(n, 3), E)] = p^{|E|}(1 - p)^{|E(n, 3, 1)| - |E|}.$$

Числом независимости $\alpha(G)$ графа G называется размер максимального независимого множества вершин в этом графе: множества вершин, которые попарно не соединены ребрами, то есть

$$\alpha(G) = \max\{|W| : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \notin E\}.$$

Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа таким образом, что никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.

Результатами первой главы являются две теоремы. Во-первых, справедлива

Теорема 1.3.1. *С асимптотической вероятностью 1 справедливо равенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1)) = (1 + o(1))2n \log_2 n.$$

Таким образом, теорема 1.3.1 утверждает, что асимптотической вероятностью 1 в случайном подграфе графа $G(n, 3, 1)$ найдется независимое множество размера порядка $2n \log_2 n$. Отметим, что данную оценку можно записать в виде

$$\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1)) = \Theta(\alpha(G(n, 3, 1)) \cdot \log_2(|V(n, 3)|)),$$

где символ Θ означает, что равенство выполнено с точностью до положительных констант в верхней и нижней оценке, что согласуется с аналогичным результатом для случайного подграфа полного графа.

Вторая теорема касается хроматического числа случайного подграфа:

Теорема 1.3.2. *С асимптотической вероятностью 1 справедливо неравенство*

$$\chi(G_{1/2}(n, 3, 1)) = (1 + o(1)) \frac{n^2}{12 \log_2 n}.$$

Данная теорема утверждает, что с асимптотической вероятностью 1 вершины графа можно правильно раскрасить в $\sim \frac{n^2}{12 \log_2 n}$ цветов, что равносильно тому, что все $\sim \frac{n^3}{6}$ вершин можно разбить на $\sim \frac{n^2}{12 \log_2 n}$ независимых множеств. Это является более сильным результатом, чем существование одного независимого множества размера $\sim 2n \log_2 n$, а также улучшает ранее известный результат²⁰.

Во второй главе рассматривается дистанционный граф $G(n, r, s)$, который является естественным обобщением графа $G(n, 3, 1)$. Пусть r и s — два натуральных числа, тогда граф определяется как $G(n, r, s) = (V(n, r), E(n, r, s))$, где

$$V(n, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + x_2 + \dots + x_n = r\},$$

$$E(n, r, s) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s\},$$

а $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обозначает обычное евклидово скалярное произведение. Другими словами, вершины графа можно отождествить с r -элементными подмножествами множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а ребро проводится между двумя вершинами в том случае, если соответствующие множества пересекаются ровно по s элементам.

Так же, как и в предыдущей главе, в работе изучены характеристики случайных подграфов графа $G(n, r, s)$ в модели Эрдеша–Реньи. А именно, пусть $p \in [0, 1]$, тогда случайный подграф $G_p(n, r, s)$ имеет то же множество вершин $V(n, r)$, а каждое ребро графа $G(n, r, s)$ включается в подграф с вероятностью p независимо от остальных. Первый результат является прямым обобщением теоремы 1.3.1.

Теорема 2.1.3. *С асимптотической вероятностью 1 выполнено неравенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, r, s)) \leq (1 + o(1)) 2r \alpha(G(n, r, s)) \log_2 n.$$

Таким образом, число независимости случайного подграфа не может вырасти более, чем в $O(\log_2 n)$ раз, что согласуется с теоремой 1.3.1. Как мы знаем из той же теоремы, константа $2r$ не является оптимальной — при $r = 3$ имеем $2r = 6$, что в три раза хуже оптимальной константы. Интересно то, что константа может быть улучшена и при $r = 2$. А именно, в работе доказана

Теорема 2.1.4. *С асимптотической вероятностью 1 справедливо неравенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, 2, 1)) \leq (1 + o(1)) \frac{1}{2} n \log_2 n.$$

²⁰ А.С. Гусев, Новая верхняя оценка хроматического числа случайного подграфа дистанционного графа, Матем. заметки, 97 (2015), N3, 342 - 349.

Более того, константа $1/2$, полученная в настоящей работе, является оптимальной: в дальнейшем было показано²¹, что с асимптотической вероятностью 1 выполнено равенство $\alpha(G_{1/2}(n, 2, 1)) = (1 + o(1))\frac{1}{2}n \log_2 n$.

Другим важным частным случаем является $s = 0$: ребро проводится между двумя вершинами, если соответствующие r -элементные подмножества не пересекаются. Такие графы называются *кнезеровскими*. Для кнезеровских графов в работе доказана

Теорема 2.1.5. *Пусть $r > 1$. С асимптотической вероятностью 1 справедливо равенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, r, 0)) = (1 + o(1))\alpha(G(n, r, 0)).$$

Другими словами, для кнезеровских графов наблюдается исключительная *устойчивость* независимых множеств: даже если из графа $G(n, r, 0)$ выкинуть каждое ребро с вероятностью $\frac{1}{2}$, размер максимального независимого множества с высокой вероятностью не изменится. Похожая картина наблюдается всегда, когда $r > 2s + 1$, а именно, в работе доказана

Теорема 2.1.6. *Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Существует такая константа $\delta = \delta(\varepsilon, r, s)$, что с асимптотической вероятностью 1 при $n \rightarrow \infty$ выполнено*

$$\alpha(G_p(n, r, s)) \leq (1 + \varepsilon)\alpha(G(n, r, s)) + \delta C_n^s \log_{1/(1-p)} n.$$

Следствие. *В случае $r \leq 2s + 1$ существует такая константа δ' , что с асимптотической вероятностью 1 выполнено*

$$\alpha(G_{1/2}(n, r, s)) \leq \delta' C_n^s \log_2 n.$$

В случае $r > 2s + 1$ для любого $\varepsilon > 0$ также с асимптотической вероятностью 1 выполнено

$$\alpha(G_{1/2}(n, r, s)) \leq (1 + \varepsilon)C_{n-s-1}^{r-s-1}.$$

Для нижней оценки на размер независимого множества в работе доказана

Теорема 2.1.7. *С асимптотической вероятностью 1 выполнено неравенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, r, s)) \geq (1 + o(1)) \frac{C_n^r(r-s)}{C_r^s C_{n-r}^{r-s}} \log_2 n.$$

В работе показано, что из этого факта напрямую следует

²¹Н.М. Деревянко, С.Г. Киселев, Числа независимости случайных подграфов некоторых дистанционных графов, Проблемы передачи информации, 53 (2017), N4, 307 - 318.

Теорема 2.1.8. *С асимптотической вероятностью 1 выполнено равенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, r, s)) = \begin{cases} (1 + o(1))\alpha(G(n, r, s)) & \text{при } r > 2s + 1, \\ \Theta(\log_2 n)\alpha(G(n, r, s)) & \text{при } r \leq 2s + 1. \end{cases}$$

В итоге имеем очень интересное «переключение»: при $r > 2s + 1$ число независимости с высокой вероятностью асимптотически не меняется; при $r \leq 2s + 1$ оно меняется с высокой вероятностью в $\Theta(\log_2 n)$ раз.

В третьей главе речь идет о вероятностной версии классической задачи экстремальной комбинаторики, изучение которой было инициировано более полувека назад П. Эрдешем, Ч. Ко и Р. Радо. Рассмотрим граф $G(n, r, < s) = (V(n, r), E(n, r, < s))$:

$$V(n, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + x_2 + \dots + x_n = r\},$$

$$E(n, r, < s) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) < s\},$$

где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обозначает обычное евклидово скалярное произведение.

Пусть теперь $p = p(n) \in [0, 1]$ и $G_p(n, r, < s)$ — это случайный элемент со значениями во множестве всех остовных подграфов $G = (V(n, r), E)$ графа $G(n, r, < s)$ и с биномиальным распределением:

$$\mathbb{P}(G_p(n, r, < s) = G) = p^{|E|}(1 - p)^{|E(n, r, < s)| - |E|}.$$

При $s = 1$ мы снова получаем кнезеровский граф, а для него уже была доказана теорема 2.1.5. Она утверждала, что с высокой вероятностью размер максимального независимого множества графа $G(n, r, 0) = G(n, r, < 1)$ асимптотически не меняется, т.е. при случайном удалении даже большей части исходных ребер максимальное по мощности независимое множество почти не вырастает. То же верно и для других значений s . В работе доказана

Теорема 3.1.3. *При любых r, s выполнено*

$$\mathbb{P}[\alpha(G_{1/2}(n, r, < s)) = C_{n-s}^{r-s}] \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в графе $G_{1/2}(n, r, < s)$ независимое множество не просто асимптотически не больше, а ни на 1 не больше независимого множества в исходном графе $G(n, r, < s)$. Для случайных подграфов графа $G(n, r, s)$, уже упомянутого во второй главе, в работе доказана

Теорема 3.1.6. *Пусть $p_0(n, r, s) = \frac{\ln n}{n^{r-2s-1}}$, где r и s — некоторые целые постоянные, $s \geq 0$ и $r > 2s + 1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеем*

$$\mathbb{P}[\alpha(G_p(n, r, s)) = \Theta(\alpha(G(n, r, s)))] \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{при } p/p_0 \geq 1, \\ 0, & \text{при } p/p_0 \rightarrow 0. \end{cases}$$

Это в точности означает, что функция $p_0(n, r, s)$ является (нестрогой) пороговой вероятностью для асимптотической устойчивости числа независимости при $r > 2s + 1$. В случае $s = 1$, однако, можно заменить асимптотическое равенство на строгое при $p = 1/2$. А именно, доказана

Теорема 3.1.7. *Пусть $r \geq 4$ — некоторое фиксированное число. Тогда с асимптотической вероятностью 1 имеет место равенство*

$$\alpha(G_{1/2}(n, r, 1)) = \alpha(G(n, r, 1)).$$

Таким образом, так же, как и в случае кнезеровских графов, наблюдается устойчивость независимых множеств при $p = 1/2$: даже если мы удалим каждое ребро графа с вероятностью $1/2$, независимо от остальных ребер, размер максимального независимого множества с высокой вероятностью не изменится.

Для доказательства устойчивости в теореме 3.1.7 в работе детально изучена структура независимых множеств в графе $G(n, r, 1)$. А именно, доказано, что каждое достаточно большое независимое множество в $G(n, r, 1)$ устроено определенным образом.

Семейство S_{xy} всех r -элементных подмножеств множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, содержащих два фиксированных элемента x и y ($x \neq y$) будем называть *звездой с центром в x и y над множеством $[n]$* . Пусть $d(A)$ обозначает максимальный размер подмножества A , которое является частью некоторой звезды: $d(A) = \max_{x \neq y} |S_{xy} \cap A|$. Оказывается, что можно оценить размер множества A , если мы знаем значение $d(A)$. В работе доказана

Теорема 3.1.8. *Пусть $r \geq 5$ и $r = r(n) = o(n^{1/8})$. Если A является независимым множеством в $G(n, r, 1)$ с $d(A) \leq C_{tn-2}^{r-2}$ для некоторого $t \in (0, 1)$, то тогда $|A| \leq \frac{1}{t} C_{tn-2}^{r-2} + o(C_{n-2}^{r-2})$, где C_a^b определяется как $\frac{a(a-1)\dots(a-b+1)}{b!}$ для нецелых a .*

Правая часть неравенства состоит из двух слагаемых, и для нас не имеет значения, какое же из них больше. Для нас более важно то, что теорема утверждает, что если величина $d(A)$ не слишком велика, то и размер A не может быть большим. Инвертируя импликацию, мы получаем, что если множество A является достаточно большим, то и значение $d(A)$ должно быть большим, а значит, A содержит значительную часть какой-то звезды.

Для постоянных r оценка в каком-то смысле неулучшаема. Действительно, пусть $\frac{1}{t} = k$ для некоторого целого числа k , которое также делит n . Разделим множество $[n]$ на k одинаковых по размеру частей $p_1 = \{1, 2, \dots, tn\}$, $p_2 = \{tn + 1, tn + 2, \dots, 2tn\}$, $\dots$. Для каждого из множеств p_i рассмотрим звезду A_i над множеством p_i с центром в любых двух элементах этого множества. Пусть A — объединение этих звезд, которое, конечно, является независимым множеством.

Ясно, что $|p_i| = tn$, таким образом, $d(A) = |A_i| = C_{tn-2}^{r-2}$, а размер множества равен $|A| = \sum_{i=1}^k |A_i| = \frac{1}{t} C_{tn-2}^{r-2}$, что асимптотически совпадает с правой частью неравенства из теоремы.

В случае $r = 4$ в работе доказана аналогичная оценка, а именно, доказана

Теорема 3.1.9. *Пусть $r = 4$. Если A является независимым множеством в графе $G(n, 4, 1)$ и $d(A) \leq \frac{(tn)^2}{2}$ для некоторого $t \in (0, 1)$, то $|A| \leq (1 + o(1)) \max\left(\frac{n^2}{8}, \frac{tn^2}{2}\right)$.*

Необычное (по сравнению с предыдущей теоремой) слагаемое в правой части, $\frac{n^2}{8}$, появляется из следующей интересной конструкции. Пусть n является четным, тогда мы можем разбить множество $[n]$ на $\frac{n}{2}$ непересекающихся пар элементов. Выбрав любые две такие пары, мы можем получить четверку элементов, рассмотрев объединение элементов из пар. Пусть A — множество всех таких четверок. Легко убедиться, что размер множества $|A| = C_{n/2}^2 = (1 + o(1)) \frac{n^2}{8}$, а $d(A) = O(n)$, то есть, построенное множество является асимптотически большим, несмотря на то, что не содержит ни одной достаточно большой части звезды.

В **заключении** приведены основные результаты и перспективы дальнейшего развития работы.

Основные результаты диссертации

В диссертации получены следующие результаты:

1. Найдена асимптотика числа независимости и хроматического числа случайного графа $G_{1/2}(n, 3, 1)$.
2. Найден порядок роста числа независимости и хроматического числа для случайного графа $G_{1/2}(n, r, s)$.
3. Доказана асимптотическая устойчивость независимого множества в случайном графе $G_{1/2}(n, r, s)$ при $r > 2s + 1$.
4. Найдена пороговая вероятность для асимптотической устойчивости независимого множества в случайном графе $G_p(n, r, s)$ при $r > 2s + 1$.
5. Описано устройство больших независимых множеств графа $G(n, r, 1)$ при $r \geq 4$.
6. Доказана устойчивость независимого множества в случайном графе $G_{1/2}(n, r, 1)$ при $r \geq 4$.
7. Доказана устойчивость независимого множества в случайном графе $G_{1/2}(n, r, < s)$.

Список публикаций автора по теме диссертации

- [1] Л.И. Боголюбский, А.С. Гусев, М.М. Пядёркин, А.М. Райгородский, *Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов*, Доклады РАН, 457 (2014), N4, 383 - 387.
- [2] Л.И. Боголюбский, А.С. Гусев, М.М. Пядёркин, А.М. Райгородский, *Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов*, Матем. сборник, 206 (2015), N10, 3 - 36.
- [3] М.М. Пядеркин, *Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа*, Матем. заметки, 99 (2016), N2, 288 - 297.
- [4] М.М. Пядеркин, *Об устойчивости в теореме Эрдеша–Ко–Радó*, Доклады РАН, 462 (2015), N2, 144 - 147.
- [5] М.М. Пядеркин, *Числа независимости случайных подграфов дистанционных графов*, Матем. заметки, 99 (2016), N4, 564 – 573.
- [6] М.М. Пядеркин, А.М. Райгородский, *О случайных подграфах кнезеровского графа и его обобщений*, Доклады РАН, 470 (2016), N4, 384 - 386.
- [7] M. Pyaderkin, *On the stability of some Erdős–Ko–Rado type results*, Discret. Math., 340 (2017), N4, 822 - 831.
- [8] М.М. Пядеркин, А.М. Райгородский, *О хроматическом числе случайного подграфа некоторого дистанционного графа*, Труды МФТИ. Т. 10 (2018), N4. 5 - 13.