

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Демченко Юрий Анатольевич

**Моды шепчущей галереи в неидеальных оптических
микрорезонаторах. Методы аппроксимации**

01.04.01 приборы и методы экспериментальной физики

АВТОРЕФЕРАТ диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2017 г.

Работа выполнена на кафедре физики колебаний Физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель

Городецкий Михаил Леонидович

Доктор физ-мат наук, профессор

Официальные оппоненты

Колачевский Николай Николаевич

Доктор физ-мат наук, член-корреспондент Российской академии наук,

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Директор

Булугин Федор Владиленович

Доктор технических наук,

Федеральное государственное унитарное предприятие
Всероссийский научно-исследовательский институт
метрологической службы, Первый заместитель директора

Кондратьев Никита Михайлович

Кандидат физ-мат наук,

Общество с ограниченной ответственностью "Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий", Старший научный сотрудник

Защита диссертации состоится "14" декабря 2017 г. в 15-30 на заседании диссертационного совета МГУ.01.12 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр.2, Физический факультет МГУ, ауд. СФА.

E-mail: igorkartashov@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

http://istina.msu.ru/dissertation_councils/councils/34133295/

Автореферат разослан "10" ноября 2017 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

к.ф.-м.н

И.Н.Карташов

1 Общая характеристика диссертационной работы

Диссертационная работа посвящена аналитическому изучению мод шепчущей галереи и взаимодействию с ними в неидеальных оптических резонаторах. Под неидеальностью в данном случае подразумевается изменение формы резонатора, поднесение к нему элемента связи, осаждение на его поверхности тонкого слоя диэлектрика или взаимодействие с лазером за счет рэлеевского рассеяния в материале резонатора, приводящее к образованию в резонаторе моды, распространяющейся в обратном направлении.

2 Актуальность работы

В решении современных задач коммуникации и спектроскопии важную роль играют оптические гребенки. Резонаторы с модами шепчущей галереи с керровской нелинейностью могут служить генераторами оптических гребенок, причем их размер на несколько порядков меньше традиционных систем на фемтосекундных лазерах. При подаче оптического сигнала гребенки на детектор также возможно создание стабильного СВЧ генератора, востребованного и для практических задач.

Задача детектирования химических веществ в жидкостях и газах очень важна в различных областях. Высокая добротность резонаторов с модами шепчущей галереи позволяет использовать их наравне с детекторами других типов в качестве детекторов, что требует аналитических оценок чувствительности собственных частот к изменению внешних параметров.

Высокая добротность резонаторов позволяет использовать их для стабилизации лазерного излучения. Среди различных активных и пассивных схем стабилизации схема с затягиванием частоты лазера на резонатор, основанная на обратном рассеянии в материале резонатора, отличается простотой и эффективностью.

На практике для эффективного использования резонаторов с модами шепчущей галереи необходима оптимизация их формы и величины связи. При этом в экспериментах часто требуется использовать не только сферические резонаторы, которые значительно проще в изготовлении по сравнению, например, с цилиндрическими, но и резонаторов других форм. Если для сферических резонаторов собственные частоты легко получить и численно и аналитически, то для остальных форм необходимы специальные методы.

Варьирование формы резонатора позволяет не только изменять собственные частоты мод, но также и дисперсии разных порядков, что играет важную роль для создания источника оптических гребенок [1].

Связь с резонатором с модами шепчущей галереи не является тривиальной задачей и требует дополнительных оптических элементов. Для большинства экспериментальных задач требуется максимизировать величину связи, что можно сделать и с помощью варьирования

формы резонатора.

3 Цели диссертационной работы

1. Разработка теоретических методов анализа мод шепчущей галереи в несферических микрорезонаторах
2. Теоретическое исследование влияния адсорбированного поверхностного слоя на моды шепчущей галереи
3. Разработка методов оптимального возбуждения оптическими микрорезонаторами
4. Теоретическое исследование стабилизации лазера высокодобротным резонатором с модами шепчущей галереи

4 Задачи

1. Проанализировать и применить методы расчета собственных частот мод шепчущей галереи для осесимметричных изотропных резонаторов с различными боковыми профилями для увеличения точности существующих приближений
2. Рассчитать и верифицировать поправки для собственных частот тонкого диэлектрического слоя на поверхности изотропного сферического диэлектрического резонатора
3. Получить оптимальные параметры для связи изотропных сфероидальных резонаторов с призмой
4. Проанализировать возможность построения упрощенной аналитической модели стабилизации лазера высокодобротным резонатором с модами шепчущей галереи, обеспечивающую затягивание частоты лазера и возможность аналитического получения основных параметров

5 Научная новизна

Построены наиболее точные приближения для собственных частот сфероидов и тороидов. Впервые получены аналитические приближения дисперсии второго порядка для поперечных мод. Получено распределение поля для сфероидальных резонаторов.

Впервые применены два различных метода для поиска сдвигов собственных частот сферических микрорезонаторов при наличии тонкого диэлектрического слоя на их поверхности. Также впервые проанализировано влияние поглощения в тонком слое на добротность мод.

Впервые проведена оптимизация связи сфероидальных микрорезонаторов с призмой. Получены выражения для оптимальных углов падения возбуждающего излучения в призме, добротности связи, оптимальной сплюснутости и сдвигов собственных частот резонатора при наличии призмы.

Исследована модель стабилизации лазера резонатором с модами шепчущей галереи, показано, что в ней возможна стабилизация и затягивание. Впервые получены аналитические выражения для стабильности частоты лазера и оценки ширины полосы затягивания.

6 Практическая ценность результатов

Полученные результаты могут использоваться для выбора оптимальных параметров для экспериментов с резонаторами с модами шепчущей галереи, а также дают возможность численно оценить эффекты, связанные с резонаторами.

7 Методология и методы исследования

В основе аналитических расчетов лежат методы теории возмущения, квазиклассические приближения эйконала и квантование Эйнштейна-Бриллюэна-Келлера в сопоставлении с численным моделированием краевой электродинамической задачи методом конечных элементов.

8 Основные положения, выносимые на защиту

1. Асимптотические ряды для расчета собственных частот и дисперсии групповой скорости, и выражения для распределения поля в осесимметричных диэлектрических резонаторах с модами шепчущей галереи, полученные в диссертационной работе, обеспечивают существенное (до порядка величины в практически важных случаях) улучшение точности по сравнению с предыдущими аналитическими результатами.
2. Аналитические приближения для изменения собственной частоты и добротности сферических диэлектрических изотропных резонаторов с модами шепчущей галереи при наличии тонкого изотропного поверхностного слоя, полученные двумя различными методами и верифицированные численным моделированием, устраняют имеющуюся в других работах неоднозначность.
3. Аналитическая теория связи призмного элемента со сфероидальными резонаторами с модами шепчущей галереи, разработанная в диссертационной работе, позволила рассчитать зависимости угловых спектров излучения от формы резонатора и оптимизировать геометрию резонатора для улучшения связи с осесимметричными гауссовыми пучками

и получить зависимость нагруженной добротности и сдвига собственных частот резонатора от формы резонатора при наличии призмы возбуждения.

4. Упрощенная модель стабилизации частоты диодного лазера резонатором с модами шепчущей галереи при наличии в нем обратного рэлеевского рассеяния, учитывающая затягивание частоты полупроводникового лазера модой микрорезонатора, позволяет получить аналитические приближения для величины стабилизации частоты лазера и ширины полосы затягивания, согласующиеся с численным моделированием.

9 Достоверность результатов

Достоверность результатов подтверждалась тщательным сравнением полученных аналитических приближений с численными расчетами. Все полученные приближения имеют непротиворечивый физический смысл и согласуются с ранее полученными результатами. Результаты оптимизации связи с призмой для сфероидальных резонаторов были использованы в экспериментах, проводимых в Российском Квантовом Центре.

10 Личный вклад автора

Все представленные в работе результаты получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Автором выполнены все численные и аналитические расчеты, обработаны и проанализированы полученные результаты. Также им проведено тщательное сравнение полученных аналитических приближений с результатами численных расчетов.

11 Публикации и апробация работы

Результаты исследования опубликованы в 4-х статьях в журналах, которые индексируются в базе данных Scopus и Web of Science, а также представлены на конференциях: Photonics West 2012 - Laser Resonators, Microresonators, and Beam Control XIV, San Francisco, CA, USA, 2012; ICONO/ LAT 2013, 2013; ЛОМОНОСОВ 2015. , Москва, Россия, 13-17 апреля 2015; Ломоносов 2017, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10-14 апреля 2017; XVI Всероссийская школа-семинар «Физика и применение микроволн» имени А.П. Сухорукова («Волны-2017»), Физический факультет МГУ, Дом отдыха «Красновидово», Россия, 4-9 июня 2017.

12 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации 115 страниц, включая 25 рисунков. Список литературы насчитывает 186 наименований.

13 Краткое содержание работы

13.1 Глава 1

Во Введении обоснована актуальность работы, сформулированы ее цели и задачи, и дано краткое описание работы.

13.2 Глава 2

Глава посвящена собственным частотам и распределению поля в несферических резонаторах. В обзоре литературы было показано, что несферические резонаторы с модами шепчущей галереи достаточно часто применяются в различных экспериментах. Кроме того варьирование формы резонатора также дает возможности более точно подбирать дисперсию мод в резонаторе с модами шепчущей галереи, что необходимо для эффективного возбуждения оптических гребенок [1] в резонаторах с модами шепчущей галереи. Поэтому в работе рассматривается, в том числе, поверхность четвертого порядка — квартика.

Для резонаторов с отличной от сферической и цилиндрической форм разрешить аналитически уравнения для распределения поля не удастся. Для получения аналитических выражений в качестве неидеальных резонаторов чаще всего рассматривают сфероид. Частоты сфероида можно найти, используя собственные функции сфероида, широко рассмотренные в литературе. Однако, на текущий момент подходящих приближений для случая резонаторов с модами шепчущей галереи нет. Поэтому применяются различные приближенные методы, дающие достаточно точные приближения для частот и пространственной дисперсии фундаментальной и поперечных моды сплюснутых и вытянутых сфероидов.

Так как уравнение Гельмгольца является уравнением второго порядка и при стандартной замене переменных его можно свести к виду, аналогичному стационарному уравнению Шредингера с диэлектрической поверхностью резонатора в роли потенциала, то наиболее простой метод — метод ВКБ, позволяющий найти собственные частоты в квазиклассическом приближении. Как было показано в обзоре литературы, метод ВКБ активно применяется для построения различных приближений для нахождения собственных частот сфероидов.

Также методом ВКБ можно пользоваться и для других уравнений второго порядка, если удастся сделать замены переменных, приводящие эти уравнения к виду уравнения Шредингера.

Первый из примененных в работе методов был предложен Сумецким [2] и основан на квазиклассическом квантовании поперечного волнового вектора β . Подобный метод был также применен в [3]. В адиабатическом приближении кривизна поверхности $\rho_s(z)$ слабо по сравне-

нию с длиной волны зависит от поперечной координаты z и $\beta \ll k_0$.

$$\Psi \propto e^{\pm i \int \beta(z) dz \pm i m \phi} R(\rho/\rho_s), \quad \beta(z) = \sqrt{k^2 - \frac{\tilde{y}_{mq}^2}{\rho_s^2(z)}}, \quad (1)$$

где $\tilde{y}_{mq}$ – собственные частоты характеристического уравнения для бесконечного цилиндра с соответствующими граничными условиями, $R(\rho/\rho_s(z))$ – радиальные функции. Для простого случая нулевых граничных условий $\sqrt{k^2 - \beta(z)^2} \rho_s = \tilde{y}_{mq} = ka = T_{mq}$, где T_{mq} q -тый корень функции Бесселя $J_m(T_{mq}) = 0$ и a радиус цилиндра. Применяя этот метод для квартики, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\ell pq} \simeq \ell - \alpha_q \left(\frac{\ell}{2}\right)^{1/3} + \frac{2p(a-b)+a}{2b} + \frac{3}{20} \alpha_q^2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-1/3} + \\ + \frac{\alpha_q p}{6} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3} + \left(\frac{\alpha_q^3 + 10}{1400} + \frac{(1+3\mu)(2p+1)^2 a^2}{32b^2}\right) \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-1} + O(\ell^{-4/3}). \end{aligned} \quad (2)$$

Для проверки воспользуемся аналитическим разложением корня характеристического уравнения $T_{\ell+1/2,q}$ для сферы (2). Легко заметить, что пятый член, пропорциональный $\ell^{-2/3}$, неверен, так как собственные частоты мод с одинаковыми ℓ и q должны быть вырождены и не должны зависеть от p . Однако, первая часть шестого члена не зависит от p , что верно, но во второй части коэффициента есть проблемы с зависимостью от p , аналогичные проблемам в пятом члене.

Второй метод, дающий требуемую точность — метод Эйконала. Это квазиклассический метод, позволяющий найти асимптотическое решение уравнения Гельмгольца в случае, если показатель преломления среды слабо меняется на масштабах длины волны. Решение уравнения Гельмгольца ищется в виде плоских волн с медленно меняющимися в пространстве амплитудами и фазами. Для того, чтобы получить собственные частоты методом эйконала, воспользуемся модифицированным условием квантования Бора-Зоммерфельда. В методе эйконала роль локального волнового вектора выполняет $\vec{k}^* = k_0 \vec{\nabla} S$, а при более точном рассмотрении, полученном Келлером в [4], правая часть модифицируется и получается

$$k_0 \oint \vec{\nabla} S d\vec{s} = 2\pi \left(q + \frac{q'}{2} + \frac{q''}{4} \right) \quad (3)$$

где q' - количество отражений от границы с нулевым граничным условием и q'' - количество касаний каустической поверхности.

Как было показано в более ранних работах, [5, 6] метод эйконала и квазиклассический метод Эйнштейна-Бриллюэна-Келлера (ЕБК) [4], могут давать достаточно хорошие асимптотические приближения для собственных частот сфероидов. В предыдущих работах 6-ой член, пропорциональный $(m/2)^{-1}$, не рассматривался, так как он отличается от точного разложения для собственных частот сферы на $\frac{\alpha_q^3 + 10}{1400} \left(\frac{m}{2}\right)^{-1}$. Предполагалось, что для получения членов

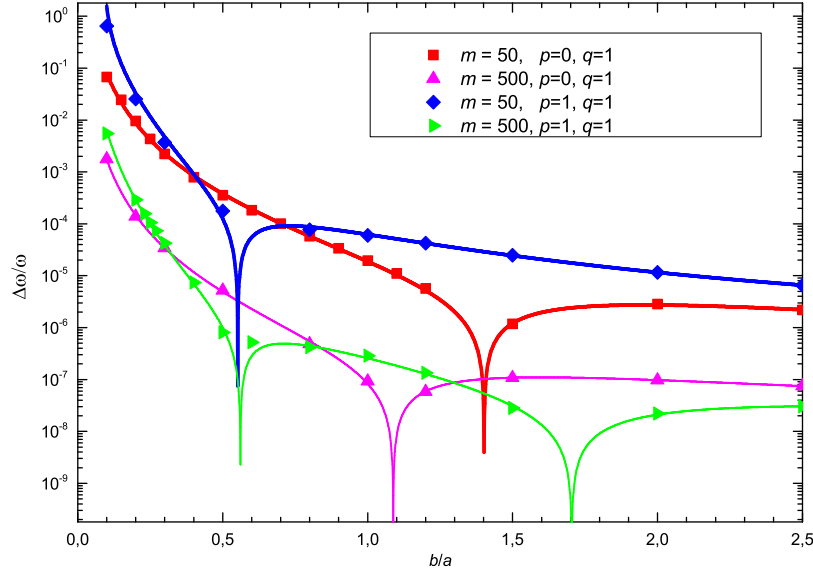


Рис. 1: Относительная точность приближения для собственных частот (4)

выше 5-ого, метод эйконала не пригоден. Однако, при $a \neq b$ отличие $\frac{1}{70m}$ незначительно, и другая часть шестого коэффициента играет большую роль. Кроме того, член, содержащий $(2p+1)^2$, является третьим в разложении η_c , а различие $\frac{1}{70m}$ появляется из четвертого члена разложения ζ_c , что косвенно подтверждает достоверность коэффициента при $(2p+1)^2$.

Применяя метод для квартик получим:

$$\begin{aligned} \tilde{y} = nk_0 a \simeq \ell - \beta_q \left(\frac{\ell}{2}\right)^{1/3} + \frac{2p(a-b)+a}{2b} + \frac{3\beta_q^2}{20} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-1/3} - \frac{\beta_q}{12} \frac{2p(a^3-b^3)+a^3}{b^3} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3} \\ + \left(\frac{\beta_q^3+10}{1400} + \frac{(2p+1)^2 a^2 (b^2(1+3\mu) - a^2)}{32b^4} \right) \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-1} + O(\ell^{-4/3}). \end{aligned} \quad (4)$$

Для данной аппроксимации в уравнении (4) нет проблем, появляющихся в (2). Пятый член корректно зависит от ℓ и p . Последний полученный шестой член может быть использован для расчета дисперсии поперечных мод, полученной ранее в [7] в приближении $b/a \rightarrow \infty$, но имеющий правильную форму для случая сферы.

Аналогичные вычисления методом ЕБК проводились для тороидального резонатора. В результате расчета выражение для собственной частоты получено в виде

$$\begin{aligned} nk_0 R = m - \frac{\beta_q b \sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{(2p+1)R}{2\sqrt{rR}} + \frac{3\beta_q^2}{102^{2/3} \sqrt[3]{m}} - \frac{5\beta_q(2p+1)R^{3/2}}{12\sqrt[3]{2} m^{2/3} r^{3/2}} \\ + \frac{175(2p+1)^2 R(r-R) + 16\beta_q^3 r^2}{11200mr^2} + O(m^{-4/3}) \end{aligned} \quad (5)$$

Амплитуда поля в резонаторе для сфероида в первом приближении может быть найдена

из уравнения переноса [4]. Если размер резонатора значительно больше длины волны, можно получить простое приближение:

$$\begin{aligned} E_\chi &\simeq E_0 \exp \left[-\frac{z^2 m}{2ab} \right] J_m \left(T_{mq} \frac{\rho}{a} \right) e^{im\phi}, & \rho < a \\ E_\chi &\simeq \frac{1}{P} E_0 \exp \left[-\frac{z^2 m}{2ab} \right] J_m \left(T_{m1} \frac{a}{a} \right) e^{-\sqrt{n^2-1}k_0(\rho-a)} e^{im\phi}, & \rho > a, \end{aligned} \quad (6)$$

Аналитические результаты для собственных частот (4) достаточно хорошо соответствуют результатам численного моделирования методом конечных элементов (1). Негладкость этих графиков вызвана в первую очередь переходом графиков через ноль и также недостаточной точностью численного моделирования. Как хорошо видно из графиков, приближение дает хорошие результаты для вытянутых сфероидов, а для сплюснутых сфероидов при $a/b > m^{1/3}$ становится мало пригодным. Причина этого в том, что для сильно сплюснутых сфероидов поле перестает быть сконцентрированным вблизи экватора. Как таковая каустическая поверхность распадается на две, выше и ниже экваториальной плоскости, что противоречит приближениям, сделанным при получении приближений.

Для улучшения точности приближения была аппроксимирована ошибка, возникающая при сравнении приближения (4) с рассчитанными значениями собственных частот с помощью программы *Comsol Multiphysics*. В результате было показано, что для фундаментальных мод удастся построить равномерную по l аппроксимацию, дающую прирост в точности около порядка. При этом для нефундаментальных мод равномерной аппроксимации найдено не было. Это косвенно означает, что рассмотренные методы не дадут дальнейшего увеличения точности при увеличении числа членов.

Эти результаты опубликованы в [A1], [A2].

13.3 Глава 3

В этой главе представлено сравнение методов расчета сдвига собственных частот и добротности микрорезонаторов с модами шепчущей галереи при наличии тонкого однородного изотропного слоя на поверхности резонатора. Толщина слоя адсорбированного вещества на поверхности обычно не превышает нанометра [8–10]. Измерение сдвига резонансной частоты играет ключевую роль в работе оптических сенсоров на резонаторах с модами шепчущей галереи и определяет их предельную чувствительность. Как было показано в обзоре литературы, оптические сенсоры и биосенсоры крайне востребованы в последние десятилетия. В отличие от химических методов, использование оптических сенсоров на основе микрорезонаторов позволяет при значительно меньших размерах устройств обеспечить меньшее время детектирования и большую чувствительность.

Для диэлектрических резонаторов на границе поле не обращается в 0, и необходимо учитывать различные граничные условия для компонент поля. Вследствие изменения граничных

условий поле частично «выпадает» из резонатора, что приводит к сдвигу собственной частоты. Так как сдвиг мал по сравнению с собственными частотами мод ШГ, то будем называть его поправкой.

С помощью численного анализа характеристического уравнения вблизи корней функции Бесселя с $q \geq 1$ было показано, что поправки очень слабо зависят от q . Существенные отклонения для мод с $q > 6$ при $m = 100$ обусловлены быстрым ухудшением локализации и, соответственно, излучательной добротности мод [11].

В работе рассматривается оптический сферический резонатор с тонким слоем пробного оптического материала на поверхности толщиной $d \ll \lambda$ (λ – длина волны) с другим показателем преломления n_p . Так как детектирование вещества может происходить не только в воздухе [12] но и, например, в растворах [13], то окружающая резонатор среда выбирается с показателем преломления, отличным от 1.

Для расчета поправки для собственной частоты воспользуемся условием сшивки для тангенциальных составляющих полей дважды: на границе между резонатором и слоем и между слоем и окружающий средой. Рассмотрим наиболее простой случай, допускающий аналитическое решение, когда резонатор имеет сферическую форму. Из граничных условий получим систему уравнений на границе резонатора и слоя:

$$\frac{1}{n\sqrt{P}}\psi_\ell(nk_0a) = \frac{1}{n_p\sqrt{P_p}}(\alpha\chi_\ell(n_pk_0a) + \beta\chi_\ell(n_pk_0a)), \quad (7)$$

$$\sqrt{P}\psi'_\ell(nk_0a) = \sqrt{P_p}(\alpha\psi'_\ell(n_pk_0a) + \beta\chi'_\ell(n_pk_0a)) \quad (8)$$

и аналогично на границе слоя и среды

$$\frac{1}{n_p\sqrt{P_p}}(\alpha\psi_\ell(n_pk_0(a+d)) + \beta\chi_\ell(n_pk_0(a+d))) = \frac{1}{n_e\sqrt{P_e}}\gamma\chi_\ell(n_ek_0(a+d)), \quad (9)$$

$$\sqrt{P_p}(\alpha\psi'_\ell(n_pk_0(a+d)) + \beta\chi'_\ell(n_pk_0(a+d))) = \sqrt{P_e}\gamma\chi'_\ell(n_ek_0(a+d)), \quad (10)$$

где α , β и γ определяют отношение амплитуд поля в средах и P_p равно 1 для ТЕ мод и $1/n_p^2$ для ТМ мод. В общем виде эта система относительно k_0 не разрешается, но ее удастся разрешить в допущении тонкого слоя, много меньшего радиуса резонатора и длины волны. Раскладывая члены в уравнениях, содержащие d , по малому параметру $\eta = d/a$ и предполагая, что влияние слоя мало, при $nk_0a = t_{m,q} + \Delta_0 + \Delta_p$, поправку Δ_p можно найти в виде:

$$\Delta_p = -nk_0d \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2} (1 + n_e^2(P_p - P)) \quad (11)$$

Это выражение согласуется с полученным в более ранних работах [14], но при этом имеет более простой вид. Так как в микрорезонаторных биосенсорах детектируемые величины крайне малы [15] и практически не зависят от членов $l^{-1/3}$, то для большинства приложений

выражение (11) хорошо описывает величину поправки.

Используя полученное выражение также можно рассчитать изменение добротности резонатора, вносимое тонким слоем при наличии в нем затухания. Если показатель преломления слоя можно записать в виде $n_p \rightarrow n_{pr} - in_p''$, где $n_p'' = -\alpha_p/2k_0$ (α_p – оптические потери в материале), то $Q_p = \frac{nk_0a}{2\text{Im}(\Delta_p)}$ и

$$\begin{aligned} Q_{p,TE}^{-1} &\approx \frac{d}{a} \frac{4n_r}{n^2 - n_e^2} n_p'', \\ Q_{p,TM}^{-1} &\approx Q_{p,TE}^{-1} \left(\frac{n^2 - n_e^2}{n^2} + \frac{n_e^4}{n_p^4} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы рассчитать поправки для тонкого слоя, воспользуемся еще одним методом электродинамики. При медленном адиабатическом изменении параметров системы величины, называемые адиабатическими инвариантами, не изменяются. В частности:

$$\frac{\Delta A}{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta\omega}{\omega}, \quad (13)$$

где ΔA — работа пондеромоторных сил давления света по перемещению границы адсорбированного слоя, $\mathcal{E}$ — энергия поля. Так как микрорезонатор с диэлектрической границей является открытой системой, то интеграл энергии во всем пространстве расходится. Существуют разные методы обхода этого ограничения [11]. В настоящей работе в качестве энергии поля выберется энергия, сосредоточенная внутри резонатора, что является хорошим приближением для высокодобротного микрорезонатора и обеспечивает сходимость интеграла.

Чтобы получить изменение собственных частот адиабатически увеличим толщину слоя на поверхности резонатора от 0 до d . Чтобы найти работу поля внутри слоя нужно получить разницу давления световой волны в слое и в окружающем слой пространстве. При этом воспользуемся тензором Максвелла σ_{ij} в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ [16]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(\epsilon E_i E_j + H_i H_j - \frac{\epsilon E^2 + H^2}{2} \delta_{ij} \right), \quad (14)$$

который необходимо использовать в сферических координатах. Разницу давлений на поверхности сред с показателями преломления ϵ_p и ϵ_e можно получить как

$$p = \sigma_{rr}|_{\text{in}} - \sigma_{rr}|_{\text{out}} = \frac{(\epsilon_p - \epsilon_e)}{8\pi} \left[\frac{\epsilon_p}{\epsilon_e} E_r^2 + [E_\phi^2 + E_\theta^2] \right]. \quad (15)$$

Для получения работы нужно проинтегрировать силу на всей внутренней поверхности слоя, действующую на элементарную площадь поверхности dS , на толщине слоя в данной точке поверхности.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\int dS(pd)}{\mathcal{E}}, \quad (16)$$

Для ТМ это позволяет сдвиг частот:

$$\Delta(nka) = -nkd \frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2}. \quad (17)$$

Для ТМ мод электрическое поле имеет также нормальную к поверхности компоненту. Интегрируя отдельно угловые части для всех трех компонент поля и оценивая их радиальные части можно получить, что θ компонента поля много меньше двух других компонент. Таким образом, для ТМ моды относительная поправка для собственной частоты:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{n_p^2 - n_e^2}{n^2 - n_e^2} \frac{d}{a} \frac{n^2 n_e^2 + n_p^2 n^2 - n_p^2 n_e^2}{n^2 n_p^2}. \quad (18)$$

Полученный результат сходится как с результатом, полученным с помощью характеристического уравнения, так и с результатами в работе ([14]).

В этой главе были продемонстрированы новые подходы к оценке сдвига собственных частот при осаждении тонкого диэлектрического слоя на поверхности резонатора. Приведенные методы, во-первых, подтверждают результаты, полученные ранее с использованием возмущения векторного уравнения Гельмгольца [14]. Исходя из рассчитанных поправок, были получены комплексные добавки к частоте из-за наличия поглощения в слое, определяющие зависимость оптических потерь от длины волны и размера резонатора, и показано, что для ТЕ и ТМ мод они различны. Кроме того, рассматривалась зависимость простой диэлектрической поправки от радиального индекса q . Было получено, что для $q \leq 6$ поправки можно считать постоянными, а для мод высших порядков их нужно учитывать более точно.

Эти результаты опубликованы в [A3], [A4].

13.4 Глава 4

В главе аналитически рассматривается связь сфероидальных резонаторов с модами шепчущей галереи с призмой. Как было показано в обзоре литературы, реализация связи с модами шепчущей галереи в оптических микрорезонаторах при помощи призмы [17] является наиболее простым и надежным способом, позволяющим получить эффективность связи до 75% [18], причем в экспериментах с призмной связью часто используется именно несферические резонаторы. В работе для описания связи между призмой и резонатором используется подход, аналогичный разработанному в [19], и исследуются параметры пучка в призме, необходимые для оптимальной связи. Для нахождения сдвигов собственных частот резонатора используется адиабатический инвариант.

Для того, чтобы связаться с резонатором через призму, излучение должно быть сфокусировано на внутренней поверхности призмы под углом, большем полного внутреннего отражения, а резонатор должен быть поднесен к точке фокусировки на расстояние порядка $\lambda/10$, где λ - длина волны [19]. Сферическая система координат выбирается с началом в центре

резонатора и декартова система координат с центром в точке фокусировки излучения (2).

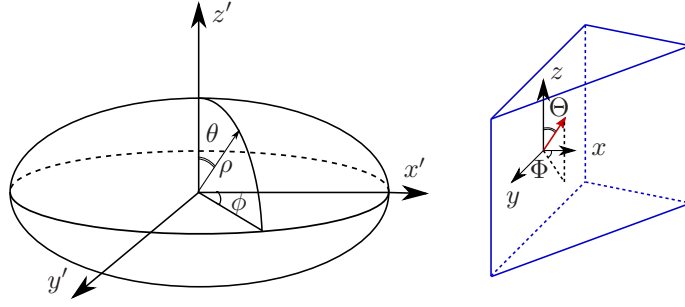


Рис. 2: Сферическая система координат с началом в центре резонатора и декартова с началом в точке фокусировки излучения

Для того, чтобы перейти от распределения поля на поверхности призмы к распределению поля внутри нее, используется интеграл Френеля. Предполагая, что $\tilde{k}_y = k_y/k$ и $\tilde{k}_z = k_z/k$, результат интегрирования можно представить в виде:

$$\tilde{k}_{z0} = \sin \Theta = 0 \quad (19)$$

$$\Delta \tilde{k}_z^2 = \Delta \Theta^2 \cos^2 \Phi = \frac{r \sqrt{\frac{b^2 m^2}{a^2} - \frac{1}{4}} + a}{r b^2 n_p^2 k^2} = \frac{m n_r \frac{b}{a} + l \sqrt{n_r^2 - 1}}{\frac{n_p^2}{n_r} \frac{b^2}{a^2} l^2} \quad (20)$$

$$\tilde{k}_{y0} = \sin \Phi = \frac{m}{n_p k a} \approx \frac{n_r}{n_p} \quad (21)$$

$$\Delta \tilde{k}_y^2 = \Delta \Phi^2 \cos^2 \Phi = \frac{1}{n_p^2 k^2 a r} \approx \frac{n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 l}, \quad (22)$$

и для $p \gg 1$:

$$\tilde{k}_{z0} = \sin \Theta \cos \Phi = \pm \frac{\sqrt[4]{4b^2 m^2 - a^2}}{b n_p k} \sqrt{\frac{l - m}{a}} \approx \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{n_r}{n_p} \frac{\sqrt{m(l - m)}}{l} \quad (23)$$

$$\Delta k_z^2 = \Delta \Theta^2 \cos^2 \Phi \cos^2 \Theta = \frac{a}{n_p^2 k^2 b^2 r} \approx \frac{a^2 n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 b^2 l} \quad (24)$$

$$\tilde{k}_{y0} = \sin \Phi \cos \Theta = \frac{m}{a k n_p} \approx \frac{m n_r}{l n_p} \quad (25)$$

$$\Delta k_y^2 = \frac{1}{n_p^2 k^2 a r} \approx \frac{n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 l}. \quad (26)$$

Новый параметр поперечного размера сфероида b определяет характеристики поля в призме. Одно из важнейших соотношений $n_p > n_r$, следующее из условия полного внутреннего отражения на грани призмы и ограничивающее выбор возможных материалов призмы и резонатора, можно получить из (21) и (25). Это условие не изменяется существенно с изменением b/a из-за характера зависимости собственной частоты от сплюснутости [A2]. Основное отличие от случая идеальной сферы в распределении поля в вертикальной плоскости. Для фундаментальных мод характерная ширина распределения поля в призме зависит от сплюснутости.

При увеличении сплюснутости резонатора характерная ширина распределения увеличивается из-за уменьшения ширины поля, проникающего из резонатора в призму. Для случая мод высокого порядка с $p \gg 1$ зависимость характерной ширины в зависимости от сплюснутости аналогична и, в основном, определяется углом прецессии, зависящим в свою очередь от m/l [19].

Полагая, что падающий на грань призмы пучок Гаусов и углы в призме подобраны оптимальным образом, можно получить сплюснутость резонатора, необходимую для наибольшей связи. Предположим, что падающий на призму луч имеет в направлениях y и z ширины g_y и g_z соответственно, причем отношение g_y/g_z зависит от угла падения излучения в призме. Для того, чтобы оптимизировать величину связи, максимизируем интеграл перекрытия на поверхности призмы [20] между полем резонатора, проникающим в призму и полем излучения:

$$I_{cs} \propto \int ds E_l(y, z) E_r(y, z). \quad (27)$$

Для фундаментальной моды интеграл может быть посчитан, и результат продифференцирован по b/a для поиска экстремума:

$$\frac{b}{a} = \frac{g_z^2}{a^2} m + 3\sqrt{n_r^2 - 1} \frac{ka}{m} \quad (28)$$

Возбуждение мод с $p \gg l$ требует негаусова профиля входного пучка и не рассматривается в настоящей работе.

Оптимальные параметры не зависят одновременно и от g_y и от g_z , так как сплюснутость резонатора существенно изменяет распределение поля лишь в вертикальной плоскости. Как можно видеть из (3), зависимость связи от сплюснутости резонатора слабая. Для типичных экспериментальных значений величина интеграла перекрытия изменяется лишь на 10% при изменении сплюснутости в 3 раза.

Полученный результат для оптимальной сплюснутости резонатора отличается от аналогичного, полученного в работе [21], в которой предполагалось, что оптимальная связь достигается при равенстве отношений характерных ширины пучка в направлениях осей z и y для лазера и для резонатора на грани призмы. Предложенный в настоящей работе метод является методологически более корректным, так как при решении уравнений связанных мод [20] для коэффициентов связи появляются именно интегралы перекрытия, которые и максимизируются в настоящей работе.

Наличие элемента связи (призмы) приводит к тому, что энергия из резонатора будет излучаться через него. Потери энергии на излучение через призму можно характеризовать обратной величиной, которую мы будем называть добротностью нагружения. Сплюснутость резонатора также влияет на добротность нагружения. Найти её можно как отношение внут-

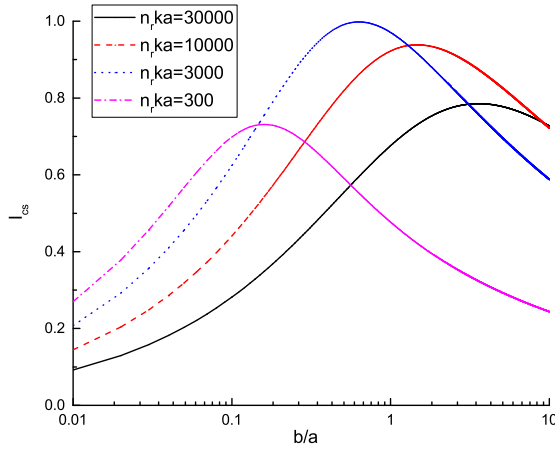


Рис. 3: Интеграл перекрытия для фундаментальных мод $a = 1 \text{ mm}$, $n_r = 1.4$, $g_z = 10 \mu\text{m}$, $g_y = 20 \mu\text{m}$

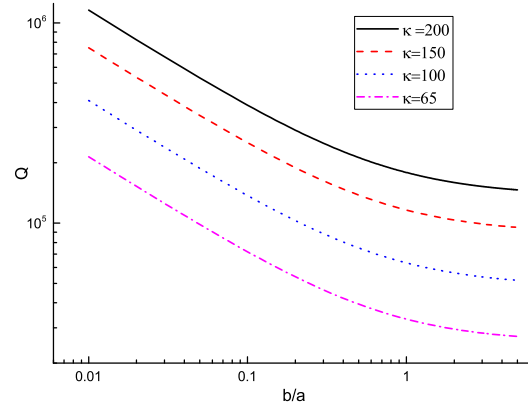


Рис. 4: Добротность при $n_r = 1.4$, $n_p = 1.5$, $d = 0$, $\kappa = a/\lambda$

ренной энергии резонатора $\mathcal{E}$ к энергии P , уходящей через призму:

$$Q = \frac{\omega \mathcal{E}}{P}$$

Для того, чтобы найти энергию, уходящую из резонатора в призму, находящуюся на расстоянии d , интегрируется плотность энергии, выходящей из резонатора, причем аналогично предыдущим выкладкам, поверхность призмы считается бесконечной. Таким образом, добротность нагружения:

$$Q = \frac{n_r^2}{n_p} \left(\frac{2\pi a (n_r^2 - 1)}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{4\pi d \sqrt{n_r^2 - 1}}{\lambda}} \times \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{n_r^2 - 1}} + \frac{\pi a}{bn_r}}$$

Полученное выражение совпадает с добротностью для сферы [19] и изменяется со сплюснутостью, что связано с изменением формы области на поверхности призмы, в которую эффективно проникает поле из резонатора. Добротность нагружения, так же как и в случае сферы, экспоненциально зависит от расстояния между резонатором и призмой, что позволяет легко добиваться оптимального нагружения выбором необходимого расстояния d .

Так как призма находится в области быстро спадающего с расстоянием поля резонатора, то её присутствие влияет на собственные частоты резонатора. Соответствующий малый сдвиг частот может быть легко получен с использованием адиабатического инварианта аналогично [A3]. Находя работу по перемещению призмы из бесконечности на расстояние d , предполагая, что выпадающее поле резонатора E_p зависит только от расстояния d , и рассматривая разность

энергии при наличии призмы на расстоянии d и при ее отсутствии, получим:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta A}{\mathbb{E}} = \frac{1}{Q_l} \left(\frac{n_p^2 - 1}{2\sqrt{n_r^2 - 1}} \right) \quad (29)$$

При наличии потерь в материале призмы часть энергии из резонатора будет поглощаться в ней. Назовем обратную величину этих потерь добротностью призмы. Подставляя комплексный показатель преломления материала призмы $n_p = n_{pr} + in_{pi}$ в выражение для добротности можно получить

$$Q_{li} = \frac{Q}{n_p} \sqrt{n_r^2 - 1} \frac{n_{pr}}{n_{pi}} \frac{n_{pr}^2 + n_{pi}^2}{n_{pr}^2 + n_{pi}^2 + 1} \quad (30)$$

В работе рассматривалось влияние сплюснутости резонатора на величину связи с призмой и добротность нагружения. Было показано, что распределение поля в призме заметно меняется со сплюснутостью резонатора только в направлении сплюснутости. Наличие сплюснутости резонатора может позволить смягчить требования к наклону резонатора относительно плоскости призмы. Добротность нагружения призмой сплюснутого резонатора слабо зависит от сплюснутости. Также было показано, что выбор оптимальных параметров падающего излучения может увеличить связь на несколько процентов.

Эти результаты опубликованы в [А5].

13.5 Глава 5

В главе рассматривалась стабилизация лазерных диодов с помощью оптических микрорезонаторов. Как было показано в обзоре литературы, задача стабилизации имеет важный прикладной характер для задач спектроскопии, телекоммуникации, фотоники, но, на сегодняшний день, не существует простой аналитической теории затыгивания лазера резонатором с модами шепчущей галереи, позволяющей одновременно получить выражения для ширины полосы затыгивания и стабильности затыгнутого лазера. Эти выражения представляют не только фундаментальный интерес, но и могут играть важную роль в генерации оптических солитонов в резонаторах с модами шепчущей галереи с нормальной дисперсией групповой скорости [22].

Для стабилизации диодного лазера с помощью резонатора с модами шепчущей галереи используется стандартная схема: лазер, РШГ и элемент связи с ним. Стабилизация диодного лазера с помощью РШГ описывается системой четырех уравнений [23]: уравнение медленно меняющейся амплитуды (ММА) для моды лазера, 2 уравнения ММА для прямой и обратной мод резонатора, связанных друг с другом за счет Релеевского рассеяния, и также уравнение для концентрации носителей среды лазера. Данная модель учитывает множество эффектов, в частности, динамику инверсной населенности среды лазера, но при этом не является тривиальной и достаточно ресурсоемкая для численного анализа ее динамики. В работе система

лазер-резонатор описывается более просто, с использованием меньшего количества параметров лазера. За счет более простого описания получено аналитическое выражение для ширины полосы затягивания, которое в дальнейшем может использоваться для оценки параметров схем генерации оптических гребенок на РШГ.

Для описания воздействия обратной волны резонатора на лазер используется полученное в работе [24] выражение для отраженной волны, зависящее только от параметров падающего на резонатор излучения, параметров резонатора и коэффициента связи прямой и обратной моды $\tilde{\beta}$. Рассеяние в обратную моду определяется многими факторами, в частности оно может быть вызвано рэлеевским рассеянием, шероховатостями поверхности [24], наличием диэлектрических тел вблизи поверхности резонатора [25]. Комплексная амплитуда отраженного излучения как функция частоты и падающей амплитуды поля определяется как:

$$B_r = -\tilde{A} \frac{i2\delta_c\beta}{(\delta_0 + \delta_c)^2 + \beta^2 - \Delta\omega^2 + i2\Delta\omega(\delta_0 + \delta_c)} \quad (31)$$

где $\tilde{A}$ - амплитуда, $\delta\omega = \tilde{\omega} - \omega_r$, ω_r - собственная частота резонатора с модами шепчущей галереи, $\tilde{\Omega}$ - генерируемая стабилизированным лазером частота, δ_0 и δ_c - собственный декремент затухания резонатора и декремент затухания за счет потерь на связь.

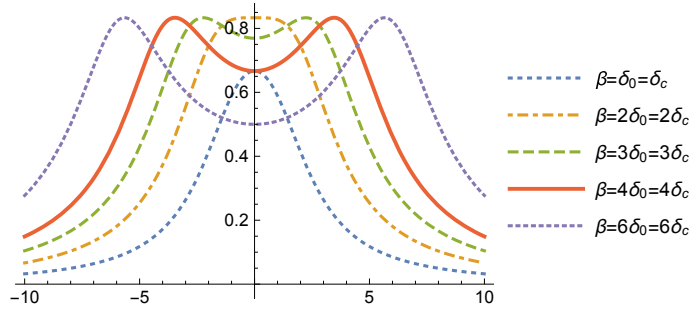


Рис. 5: Зависимость амплитуды отраженного поля от частоты

При описании процессов в лазере пренебрегается сложной зависимостью показателя преломления и усиления среды лазера, предполагая их зависящими только от интенсивности поля, и изменением амплитуды поля за время прохождения до резонатора и обратно в лазер. Укороченное уравнение амплитуды поля лазера:

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} + \left(i\Delta\omega_l(\tilde{A}) + \delta_l - G(\tilde{A}) \right) \tilde{A} = i\tilde{T}B_re^{-i\tilde{\Omega}\tau_d}, \quad (32)$$

$$G(\tilde{A}) = G_0(1 - g\tilde{A}^2) \quad (33)$$

$$\omega_l(\tilde{A}) = \omega_{l0}(1 - h\tilde{A}^2) \quad (34)$$

$$\Delta\omega_l(\tilde{A}) = \tilde{\Omega} - \omega_l(\tilde{A}) \quad (35)$$

где g и h - коэффициент нелинейности усиления среды и нелинейности частоты в зависимости

от амплитуды поля, G_0 и ω_{l0} коэффициент усиления среды и собственная частота холодного лазера, $\tilde{\omega}$ - генерируемая частота и $\tilde{\delta}_l$ - потери в резонаторе лазера. Перейдем к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \tau &= \delta_0 t & A &= \sqrt{g} \tilde{A} \\ \frac{\tilde{\Omega} - \omega_{l0}}{\delta_0} &= \Omega, & \frac{\tilde{\delta}_c}{\delta_0} &= \delta_c \\ \frac{G_0 - \tilde{\delta}_l}{\delta_0} &= G & \frac{\tilde{\beta}}{\delta_0} &= \beta \\ \frac{\omega_{l0} h}{g \delta_0} &= \alpha_i, & \frac{\tilde{T}}{\delta_0} &= T, \\ \frac{\omega_r - \omega_{l0}}{\delta_0} &= \Delta_\omega & \frac{G_0}{\delta_0} &= \alpha_r \end{aligned}$$

Из полученной системы уравнений для действительной и мнимой частей уравнения (32) выражается безразмерная амплитуда поля лазера A от безразмерной генерируемой частоты ω , что позволяет получить уравнение для генерируемой частоты $F(\Delta_\omega, \Omega) = 0$. Характерный вид решений уравнения с затягиванием можно увидеть на рисунке (6). Стабильностью частоты

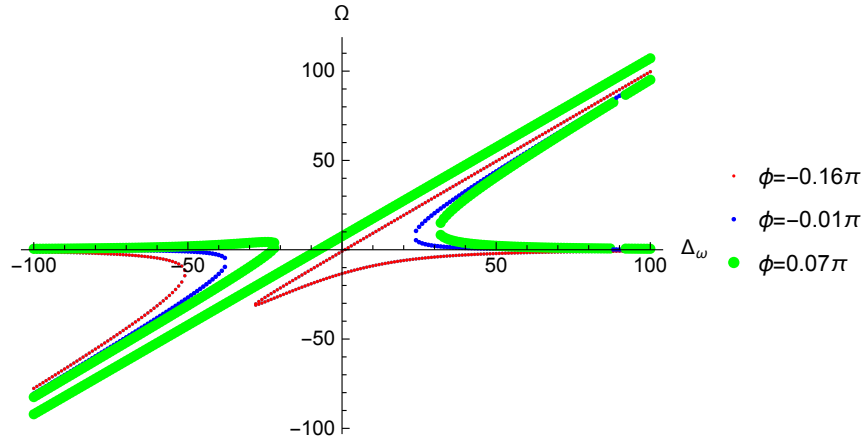


Рис. 6: Зависимость генерируемой Ω частоты от отстройки с затягиванием Δ_ω от ϕ при $\kappa = \delta_0/(3 \cdot 10^9)$, $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\delta_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-8} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$

мы будем называть отношение изменения генерируемой стабилизированным лазером частоты к изменению собственной частоты резонатора лазера, то есть производную $\tilde{\omega}$ по ω_l . Выражение для стабильности легко получить аналитически для случая $\Delta_\omega = 0$ в приближении, что $\Omega|_{(\Delta_\omega = 0)} = 0$. Зависимость величины стабильности отражена на (7).

Чтобы найти ширину полосы затягивания будем искать решение уравнения $F(\Delta_\omega, \Omega) = 0$ в виде $\Delta_\omega = C_1 + C_2/\sqrt{\Omega + C_3} - \Omega$, где C_1 , C_2 , C_3 - константы. Это позволяет получить

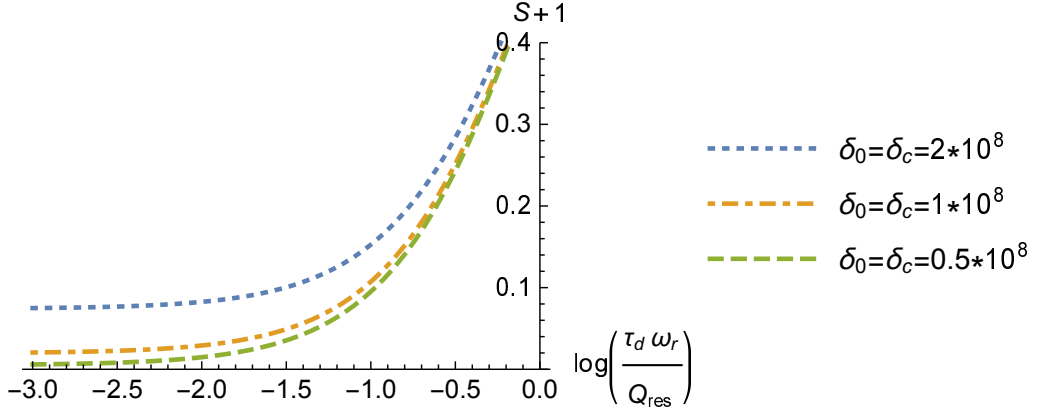


Рис. 7: Зависимость стабильности от κ при $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\delta_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-8} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$, $\phi = 0$

полуширину линии затягивания:

$$\Delta_{lock} = 3 \cdot 2^{2/3} \sqrt[3]{\beta T \delta_c \left(\sin \left(\phi - \frac{G \kappa \alpha_i}{\alpha_r} \right) + \alpha_i / \alpha_r \cos \left(\phi - \frac{G \kappa \alpha_i}{\alpha_r} \right) \right)} \quad (36)$$

Для проверки устойчивости решений предположим, что $A = A_0 + \alpha e^{\lambda \tau}$, где A_0 стационарное решение для амплитуды поля, α – её бесконечно малое приращение, а λ показывает динамику изменения возмущения. Области устойчивости определяются уравнением:

$$\lambda = 2A_0^2 (\alpha_r \cos(\kappa \Omega + \phi) - \alpha_i \sin(\kappa \Omega + \phi)) \quad (37)$$

и при этом, чтобы решение было устойчивым, λ должна быть меньше нуля. Устойчивость решения для данной модели, в первую очередь, зависит от набега фаз τ_d между лазером и резонатором. Параметры лазера α_r и α_i фиксированы для данного лазера, набег же фаз легко варьируется в эксперименте. В зависимости от набега фаз существуют области, в которых решение безусловно устойчиво или безусловно неустойчиво.

Области устойчивых решений с затягиванием и стабилизацией в зависимости от набега фаз при различных значениях α_i показаны на (8).

В ходе рассмотрения модели показано, что несмотря на ее простоту, модель является непротиворечивой и в ней реализуются все особенности, наблюдаемые в эксперименте: наличие стабилизации и затягивания частоты лазера на моду резонатора. Также было показано, что все аналитически полученные величины согласуются со значениями, полученными с помощью численного расчета.

Эти результаты опубликованы в [A6].

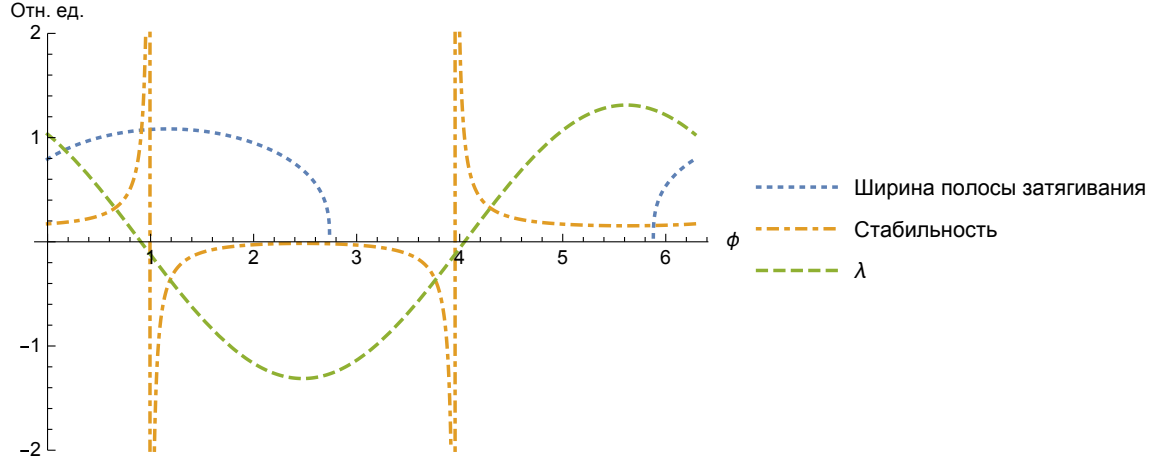


Рис. 8: Рассчитанные величины в относительных единицах от набега фаз при $G_0 = 4 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$, $\tilde{\delta}_l = 3.9 \cdot 10^{10} \text{рад/с}$, $\delta_c = \delta_0$, $g = 10^{-2} \text{м/В}$, $h = 10^{-7} \text{м/В}$, $\tilde{\beta} = 10^6 \text{рад/с}$, $\tilde{T} = 10^{12} \text{рад/с}$, $\omega_{l0} = 3.14 \cdot 10^{15} \text{рад/с}$, $\phi = 0$

14 Основные результаты работы

1. Для собственных частот сфероидов, тороидов и квартик с модами шепчущей галереи с помощью метода Эйнштейна-Бриллюэна-Келлера был получено уточнение разложения собственных частот по азимутальному индексу моды, позволяющее получить увеличение точности приближения около порядка, а также получены выражения для дисперсии групповой скорости продольных и поперечных мод, согласующиеся с численными расчетами. Было показано, что для собственных частот фундаментальных мод можно получить равномерную аппроксимацию ошибки, улучшающую точность еще на порядок. Для сфероида было получено выражение для распределения оптического поля внутри и снаружи резонатора.
2. С помощью приближенного решения характеристического уравнения и применения адиабатического инварианта удалось получить аналитические выражения для сдвигов собственных частот ТМ и ТЕ мод шепчущей галереи при наличии тонкого слоя диэлектрика на поверхности сферического резонатора. Приближения совпали с результатами, полученными ранее с помощью приближенного решения уравнения Гельмгольца, подтвердив их корректность. Получены выражения для добротности резонатора при наличии поглощения в тонком слое.
3. Для связи сфероидальных резонаторов с призмой получены угловые спектры распространения света в призме и показано, что они отличаются от случая сферы из-за характера распределения поля в резонаторе. Для случая сфероида было получено выражение для оптимального сжатия резонатора и показано, что подбор правильной формы может увеличить величину связи на несколько процентов. Было показано, что с увеличением

сжатия резонатора добротность нагружения падает. Было получено приближение для величины добротности потерь в материале призмы с поглощением.

4. Для упрощенной модели стабилизации лазера с нелинейностью среды, пропорциональной интенсивности излучения, резонатором с модами шепчущей галереи, при наличии в нем рэлеевского рассеяния, была показана возможность стабилизации и затягивания. Показано, что в такой модели существуют устойчивые режимы с затягиванием частоты лазера на резонатор, что соответствует экспериментальным данным. Аналитические выражения для стабильности и полосы затягивания, полученные для данной модели, согласуются с численными расчетами.

Список литературы

- [1] P. Del’Haye, T. Herr, E. Gavartin, M.L. Gorodetsky, R. Holzwarth, and T.J. Kippenberg. Octave spanning tunable frequency comb from a microresonator. *Physical Review Letters*, 107:063901, 2011.
- [2] M. Sumetsky. Whispering-gallery bottle microcavities: the three-dimensional etalon. *Optics Letters*, 29:8–10, 2004.
- [3] V. S. Ilchenko, M. L. Gorodetsky, X. S. Yao, and L. Maleki. Microtorus: a high-finesse microcavity with whispering-gallery modes. *Optics Letters*, 26:256–258, 2001.
- [4] J.B. Keller and S.I. Rubinow. Asymptotic solution of eigenvalue problems. *Annalen der Physik*, 9:24–75, 1960.
- [5] M. L. Gorodetsky and A. E. Fomin. Geometrical theory of whispering gallery modes. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 12:33–39, 2006.
- [6] M. L. Gorodetsky and A. E. Fomin. Eigenfrequencies and q factor in the geometrical theory of whispering-gallery modes. *Quantum Electronics*, 37 (2):167–172, 2007.
- [7] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Seidel, and L. Maleki. Kerr combs with selectable central frequency. *Nature Photonics*, 5:293–296, 2011.
- [8] Fan X., White I., Shopova S., and et al. Sensitive optical biosensors for unlabeled targets: a review. *Anal. Chimica*, 620:8, 2008.
- [9] Ilchenko V. Gorodetsky M., Savchenkov A. Ultimate q of optical microsphere resonators. *Opt. Lett.*, 21:453, 1996.
- [10] Rosenberger A. Ganta D., Dale E. Measuring sub-nm adsorbed water layer thickness and desorption rate using a fused-silica whispering-gallery microresonator. *Meas. Sc. and Tech.*, 25(055206), 2014.

- [11] M. L. Gorodetsky. *Optical microresonators with giant quality-factor*. Fizmatlit, 2011.
- [12] Rosenberger A. Farca G., Shopova S. Cavity-enhanced laser absorption spectroscopy using microresonator whispering-gallery modes. *Opt. Express*, 15(25):17443–17448, 2007.
- [13] Westcott S., Zhang J., Shelton R., and et al. Broadband optical absorbance spectroscopy using a whispering gallery mode microsphere resonator. *Rev. Sci. Instrum.*, 79:033106, 2008.
- [14] Arnold S. Teraoka I. Theory of resonance shifts in te and tm whispering gallery modes by nonradial perturbations for sensing applications. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 23(1381), 2006.
- [15] Arnold S., Khoshshima M., and Teraoka I. Shift of whispering-gallery modes in microspheres by protein adsorption. *Opt. Lett.*, 28(4):272, 2003.
- [16] Лифшиц Е.М. Ландау Л.Д. *Теория поля.*, volume Т.,2. Ч.,4. М. Наука, 1988.
- [17] V. S. Ilchenko V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes. *Physics Letters A*, 137(7-8):393–397, 1989.
- [18] Y. Pan and R. K. Chang. Highly efficient prism coupling to whispering gallery modes of a square m cavity. *Appl. Phys. Lett.*, 82(4):487–489, 2003.
- [19] V. S. Ilchenko M. L. Gorodetsky. High-q optical whispering-gallery microresonators: precession approach for spherical mode analysis and emission patterns with prism couplers. *Optics Communications*, 113:133–143, 1994.
- [20] V. S. Ilchenko M. L. Gorodetsky, A .A. Savchenkov. Optical microsphere resonators: optimal coupling and the ultimate q. *Proc. SPIE*, 3267, 1998.
- [21] G. A. Santamaría-Botello, L. E. García Muñoz, and et al. Maximization of the optical intra-cavity power of whispering-gallery mode resonators via coupling prism. *Optics Express*, 24(23):26503–26514, 2016.
- [22] V.E. Lobanov, G. Lihachev, T. J. Kippenberg, and M.L. Gorodetsky. Frequency combs and platicons in optical microresonators with normal gvd. *Opt. Express*, 23(6):7713–7721, Mar 2015.
- [23] А. Н. Ораевский, А. В. Яровицкий, and В. Л. Величанский. Стабилизация частоты излучений полупроводникового лазера модой шепчущей галереи. *Квантовая электроника*, 31(10):897, 2001.
- [24] Vladimir S. Ilchenko Michael L. Gorodetsky, Andrew D. Pryamikov. Rayleigh scattering in high-q microspheres. *J. Opt. Soc. Am. B*, 17(6):1051, 2000.
- [25] V. Sandoghdar A. Mazzei, O. Benson L. de S. Menezes S. Götzinger. Normal mode splitting and purcell enhancement of local rayleigh scattering in a microsphere resonator. *Quantum Electronics and Laser Science Conference*, 07:1–2, 2007.

Список публикаций по теме диссертации

- [A1] M. L. Gorodetsky and Yu A. Demchenko. Accurate analytical estimates of eigenfrequencies and dispersion in whispering-gallery spheroidal resonators. In *Laser Resonators, Microresonators, and Beam Control XIV*, volume 8236 of *Proceedings of SPIE*, page 823623, 2012.
- [A2] Yury A. Demchenko and Michael L. Gorodetsky. Analytical estimates of eigenfrequencies, dispersion, and field distribution in whispering gallery resonators. *Journal of the Optical Society of America B*, 30(11):3056–3063, 2013.
- [A3] Ю. А. Демченко and М. Л. Городецкий. Влияние адсорбированного слоя на резонансные частоты и добротность сферических микрорезонаторов. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, (3):32, 2015.
- [A4] М. Л. Городецкий, Ю. А. Демченко, Д. Ф. Зайцев, В. Н. Крутиков, Ю. М. Золотаревский, and В. Л. Ляковский. Высокодобротные оптические микрорезонаторы с модами типа шепчущей галереи и их применение в прецизионных измерениях. *Метрология*, (12):22–40, 2014.
- [A5] Ю. А. Демченко, И. А. Биленко, and М. Л. Городецкий. Оптимизация призмной связи с оптическими микрорезонаторами типа шепчущей галереи. *Квантовая электроника*, 47(8), 2017.
- [A6] Ю. А. Демченко. Стабилизация лазера резонатором с МШГ. *Труды школы-семинара «Волны-2017»*, (Когерентные и нелинейные волновые явления):20–23, 2017.